

多体系统中典型铰的摩擦力计算模型*

齐朝晖 罗晓明 黄志浩

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

摘要 在铰内间隙很小的前提下,多体系统中铰仍具有运动学约束作用.但由于铰内接触形式与系统状态相关,铰内摩擦力与约束反力之间具有复杂的函数关系.本文在假设铰内接触为刚性接触的前提下,基于分布接触反力与点接触反力之间的等效关系,给出了几种典型铰内摩擦力的计算模型,并通过数值算例验证了所提模型的正确性.

关键词 多体系统, 摩擦, 间隙, 铰

引言

实际机械系统中,铰中的摩擦几乎是不可避免的.摩擦对很多机械系统的动力学行为有着不可忽略的影响.例如,在接近真空环境工作的探测器中的铰,由于不能采用液体润滑,摩擦效应非常突出,对探测器的每一次操作都会引起结构的整体振动.如果不能有效地抑制这种振动,探测器就不得不等待振动衰减到一定幅度以下才能进行下一次动作.在多体系统动力学中考虑铰中摩擦力的影响,无疑会使分析结果更符合实际,从而为利用或减少摩擦提供参考依据.

建立多体系统中铰内摩擦力的计算模型主要有以下可两种方式:

1) 认为铰所连接的两个物体在铰内做一系列含摩擦接触碰撞运动^[2].其突出优点是可以利用单面约束的相关研究成果^[1-15],并且至少在形式上更符合实际物理过程.然而,由于这种方法实际上相当于通过铰内的接触碰撞体现铰的运动学约束作用,相应的计算量过于庞大,以至于其现实性受到质疑.

2) 保持铰的运动学约束作用,考虑铰内的间隙对接触形式的影响,但忽略碰撞效应^[16-18].这种方法保持了铰的运动学约束,同时又避免了由于考虑碰撞所引起的数值病态,因而具有很好的发展前景.

铰的约束反力实际上是通过铰内的接触产生

的,铰中的摩擦力不仅与约束反力相关,还与铰内的接触方式相关.例如,平面滑移铰中常见的四种接触方式,如图1所示.第一种接触方式中:约束反力的模 $f_n = |f_1 - f_3|$,摩擦力的大小为 $f_T = \mu |f_3 + f_1| \neq \mu f_n$;第二种接触方式中:约束反力的模 $f_n = |f_2 - f_4|$,摩擦力的大小为 $f_T = \mu |f_2 + f_4| \neq \mu f_n$;第三种接触方式中:约束反力的模 $f_n = |f_1 + f_2|$,摩擦力的大小为 $f_T = \mu |f_2 + f_1| \neq \mu f_n$;第四种接触方式中:约束反力的模 $f_n = |f_3 + f_4|$,摩擦力的大小为 $f_T = \mu |f_3 + f_4| \neq \mu f_n$.

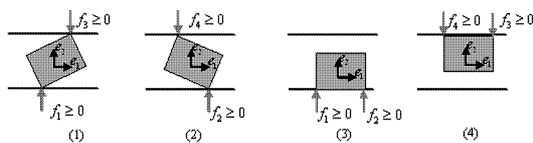


图1 平面棱柱铰的四种可能接触状态

Fig. 1 Four possible contact states of planar prismatic joint

由此可见:即使忽略碰撞效应,铰内的摩擦力计算模型也不是一个简单的问题.相关文献中大多数采用凭直觉列出铰的可能接触形式,进而针对每一种接触形式考虑摩擦力与铰约束反力之间的关系.然而,这种方法难以分析稍稍复杂一些的万向节、楞住铰等.

为了突出主要矛盾,我们假设:1)组成铰的构件是刚体 2)铰内的间隙为无穷小以至于碰撞效应可以忽略 3)铰内的面接触(线接触)可以等效为几个点接触.在以上合理假设的基础上,本文给出了几种典型铰的摩擦力计算模型.

1 分布接触反力与点接触反力之间的等效

刚体 B_a 和刚体 B_b 之间发生面接触,刚体 B_a 上的接触面为 P_a ,其外法线矢量为 \mathbf{n} ,如图2所示。 P_a 内参考点 p 的相对运动速度 $\mathbf{v}_p = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$, P_a 内坐标为 (x, y) 点相对运动速度 $\mathbf{v} = (v_1 - \omega y)\mathbf{e}_1 + (v_2 + \omega x)\mathbf{e}_2$,其中 ω 为 P_a 的相对运动角速度. 假设 P_a 上正压应力为 $\mathbf{n}\sigma(x, y)$,摩擦系数为 μ ,则相应的摩擦应力

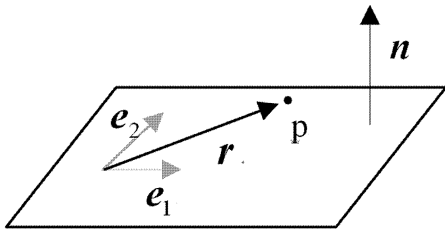


图2 接触面内的相对运动

Fig.2 Relative movement in the contact surface

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\mu\sigma}{|\mathbf{v}|}((v_1 - \omega y)\mathbf{e}_1 + (v_2 + \omega x)\mathbf{e}_2) \quad (1)$$

接触面上接触反力的合力及相对于 p 点的合力矩分别为

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{n}\sigma_0 \quad (2)$$

$$\mathbf{m}_n = \sigma_2\mathbf{e}_1 - \sigma_1\mathbf{e}_2 \quad (3)$$

接触面上的摩擦力

$$\mathbf{f}_T = -\mu(\tau_0v_1 - \omega\tau_2)\mathbf{e}_1 - \mu(\tau_0v_2 + \omega\tau_1)\mathbf{e}_2 \quad (4)$$

$$\mathbf{m}_T = -\mu(\tau_1v_2 - \tau_2v_1 + \omega\tau_3)\mathbf{e}_3 \quad (5)$$

其中

$$\sigma_0 = \iint_S \sigma dx dy; \quad \sigma_1 = \iint_S \sigma x dx dy;$$

$$\sigma_2 = \iint_S \sigma y dx dy \quad (6)$$

$$\tau_0 = \iint_S \frac{\sigma}{|\mathbf{v}|} dx dy; \quad \tau_1 = \iint_S \frac{\sigma}{|\mathbf{v}|} x dx dy;$$

$$\tau_2 = \iint_S \frac{\sigma}{|\mathbf{v}|} y dx dy;$$

$$\tau_3 = \iint_S \frac{\sigma}{|\mathbf{v}|} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

如果将分布式的接触力等效为接触面上几个点处的集中接触力,两者必须形成等效力系,即

$$\sum_i \mathbf{f}_i = \sigma_0; \quad \sum_i (f_i y_i) = \sigma_2; \quad \sum_i (f_i x_i) = \sigma_1 \quad (8)$$

$$\sum_i \left(f_i \frac{v_i - \omega y_i}{\sqrt{(v_1 - \omega y_i)^2 + (v_2 + \omega x_i)^2}} \right) = \tau_0 v_1 - \omega \tau_2 \quad (9)$$

$$\sum_i \left(f_i \frac{v_2 + \omega x_i}{\sqrt{(v_1 - \omega y_i)^2 + (v_2 + \omega x_i)^2}} \right) = \tau_0 v_2 + \omega \tau_1 \quad (10)$$

$$\sum_i \left(f_i \frac{x_i v_2 - y_i v_1 + \omega(x_i^2 + y_i^2)}{\sqrt{(v_1 - \omega y_i)^2 + (v_2 + \omega x_i)^2}} \right) = \tau_1 v_2 - \tau_2 v_1 + \omega \tau_2 \quad (11)$$

如果接触面内各点的相对运动速度方向一致,即 $\omega = 0$,可以证明:只要(8)式满足,则(9) - (11)式自然成立.

2 圆柱铰

圆柱铰在两个接触端面上各有一个接触点,其位置可用方位角 θ_1 和 θ_2 确定,如图3所示. 接触点处的正压力

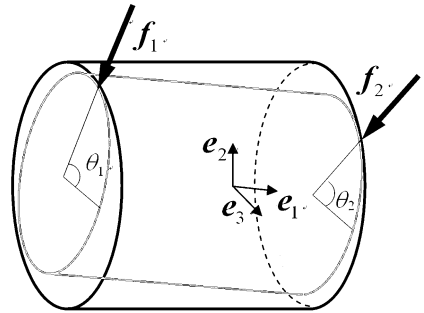


图3 圆柱铰的接触点

Fig.3 Contact points of cylindrical joint

$$\mathbf{f}_1 = -f_1 \cos\theta_1 \mathbf{e}_3 - f_1 \sin\theta_1 \mathbf{e}_2 \quad (12)$$

$$\mathbf{f}_2 = -f_2 \cos\theta_2 \mathbf{e}_3 - f_2 \sin\theta_2 \mathbf{e}_2 \quad (13)$$

两个接触点处的相对速度分别为

$$\mathbf{v}_1 = \dot{s} \mathbf{e}_1 + \omega \mathbf{e}_1 \times R(\cos\theta_1 \mathbf{e}_3 + \sin\theta_1 \mathbf{e}_2) \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{s} \mathbf{e}_1 + \omega \mathbf{e}_1 \times R(\cos\theta_2 \mathbf{e}_3 + \sin\theta_2 \mathbf{e}_2) \quad (15)$$

式中, R 为圆柱体半径, \dot{s} 和 ω 分别为圆柱铰的相对滑动速度和相对转动角速度. 两个接触点处摩擦力分别为

$$\mathbf{f}_{T1} = f_1(k_s \mathbf{e}_1 - k_r \cos\theta_1 \mathbf{e}_2 + k_r \sin\theta_1 \mathbf{e}_3) \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_{T2} = f_2(k_s \mathbf{e}_1 - k_r \cos\theta_2 \mathbf{e}_2 + k_r \sin\theta_2 \mathbf{e}_3) \quad (17)$$

铰内接触力矩

$$\mathbf{m} = (R \cos\theta_1 \mathbf{e}_3 + R \sin\theta_1 \mathbf{e}_2 - c \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{T1}) + (R \cos\theta_2 \mathbf{e}_3 + R \sin\theta_2 \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_{T2}) \quad (18)$$

式中, R 为外圆柱体半径, $2c$ 为圆柱铰左右端面距离. 记接触区域中心处的约束反力 $\mathbf{f}^c = f_1^c \mathbf{e}_1 + f_2^c \mathbf{e}_2 + f_3^c \mathbf{e}_3$, 约束反力矩 $\mathbf{m}^c = m_1^c \mathbf{e}_1 + m_2^c \mathbf{e}_2 + m_3^c \mathbf{e}_3$, 由于接触力系与约束反力系相互等效,因而

$$\begin{Bmatrix} f_2^c \\ f_3^c \\ m_2^c \\ m_3^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -k_r & -1 & -k_r \\ k_r & -1 & k_r & -1 \\ k_r c & k_s R - c & -k_r c & c + k_s R \\ c - k_s R & k_r c & -k_s R - c & -k_r c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \sin \theta_1 \\ f_2 \cos \theta_1 \\ f_2 \sin \theta_2 \\ f_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式中,等效摩擦系数

$$k_r = -\frac{\mu \omega R}{\sqrt{\dot{s} + \omega^2 R^2}}; \quad k_s = -\frac{\dot{\mu} s}{\sqrt{\dot{s} + \omega^2 R^2}} \quad (20)$$

将式(19)中的系数矩阵(简记作 A)的逆 A^{-1} 分解为两个 2×4 阶矩阵 B_1 和 B_2 ,对式(19)求逆可得:

$$f_1 [\sin \theta_1 \quad \cos \theta_1] = [f_2^c \quad f_3^c \quad m_2^c \quad m_3^c] B_1^T \quad (21)$$

$$f_2 [\sin \theta_1 \quad \cos \theta_1] = [f_2^c \quad f_3^c \quad m_2^c \quad m_3^c] B_2^T \quad (22)$$

从中可得

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{(f_2^c f_3^c m_2^c m_3^c) B_1^T B_1 (f_2^c f_3^c m_2^c m_3^c)^T}} \quad (23)$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{(f_2^c f_3^c m_2^c m_3^c) B_2^T B_2 (f_2^c f_3^c m_2^c m_3^c)^T}} \quad (24)$$

摩擦力引起的轴向力和轴向力矩

$$f_T = k_s (f_1 + f_2) e_1 \quad (25)$$

$$m = k_r R (f_1 + f_2) e_1 \quad (26)$$

3 旋转铰

与圆柱铰相比,理想旋转铰的左右端面是封闭的,当内圆柱体在铰内做相对运动时可能与其发生接触.假设旋转铰内的接触形式都是点接触,则可能的接触点只有四个,如图4所示.

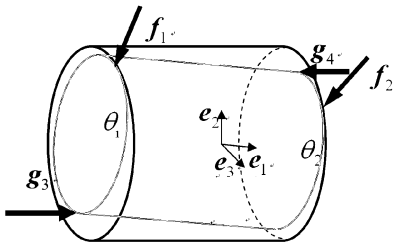


图4 旋转铰的接触点
Fig. 4 Contact points of revolute joint

以内外圆柱体中心重合并且轴线平行位置作为参照,内圆柱体在铰内的相对位置可由内圆柱体中心的相对位移 u_1, u_2, u_3 , 相对转角 β_2, β_3 以及旋转铰内外半径差 δ 描述.其中,左端面方位角为 θ_L 点处的位移

$$\begin{Bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \\ u_3^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -R \cos \theta_L & R \sin \theta_L \\ R \cos \theta_L & 0 & c \\ -R \sin \theta_L & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

式中, R 为内圆柱体半径, $2c$ 为旋转铰左右端面间的距离.接触点 p_3 的方位角 θ_3 对应 $u_1^L - u_1$ 的极值点,即:

$$\left. \frac{\partial u_1^L}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_3} = 0 \rightarrow \sin \theta_3 = \kappa_1 \beta_3; \quad \cos \theta_3 = -\kappa_1 \beta_2 \quad (28)$$

相应的极值 $m_1 = -\kappa_1 R (\beta^2 + \gamma^2)$ 应小于零,因而

$$0 < \kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}} \quad (29)$$

右端面方位角为 θ_R 点处的位移

$$\begin{Bmatrix} u_1^R \\ u_2^R \\ u_3^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -R \cos \theta_R & R \sin \theta_R \\ R \cos \theta_R & 0 & c \\ -R \sin \theta_R & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

接触点 p_4 的方位角 θ_4 应使 $u_1^R - u_1$ 最大,由此可得:

$$\sin \theta_4 = -\kappa_1 \beta_3; \quad \cos \theta_4 = \kappa_1 \beta_2 \quad (31)$$

接触点 p_1 与左端面圆心之间的距离为 δ ,因而其方位角 θ_1 满足方程

$$u_2 - c\beta_3 = \delta \sin \theta_1; \quad u_3 + c\beta_2 = \delta \cos \theta_1 \quad (32)$$

同理可知:接触点 p_2 的方位角 θ_2 满足方程

$$u_2 + c\beta_3 = \delta \sin \theta_2; \quad u_3 - c\beta_2 = \delta \cos \theta_2 \quad (33)$$

由式(32)及式(33)可得

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \delta (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) / 2c; \\ \beta_3 &= \delta (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) / 2c \\ u_2 &= \delta (\sin \theta_2 + \sin \theta_1) / 2; \\ u_3 &= \delta (\cos \theta_2 + \cos \theta_1) / 2 \end{aligned} \quad (35)$$

利用上式,求出比例系数 κ_1 ,进而得到接触点方位角之间的关系:

$$\begin{aligned} \sin \theta_3 &= \frac{(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}{\sqrt{2 - 2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}}; \\ \cos \theta_3 &= \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\sqrt{2 - 2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\sin \theta_4 = -\sin \theta_3; \quad \cos \theta_4 = -\cos \theta_3 \quad (37)$$

由于内圆柱体不可能同时接触左右端面,轴向接触反力

$$g_3 = g_3 e_1; \quad g_4 = -g_4 e_1 \quad (38)$$

满足互补方程

$$0 \leq g_3 \perp g_4 \geq 0 \quad (39)$$

记铰中心处的约束反力 $f^c = f_1^c e_1 + f_2^c e_2 + f_3^c e_3$, 约束反力矩 $m^c = m_1^c e_1 + m_2^c e_2 + m_3^c e_3$. 其中, f_1^c 由轴向接触力合成, 即

$$f_1^c = g_3 - g_4 \quad (40)$$

结合互补条件式(39)可知:

$$\begin{cases} g_3 = f_1^c; g_4 = 0 (f_1^c > 0) \\ g_4 = -f_1^c; g_3 = 0 (f_1^c < 0) \end{cases} \quad (41)$$

接触点 p_1, p_2 的法向接触反力及其相对于铰中心的力矩分别为:

$$\begin{aligned} f_1^n &= -f_1 (\sin\theta_1 e_2 + \cos\theta_1 e_3); \\ m_1^n &= c f_1 (\sin\theta_1 e_3 - \cos\theta_1 e_2) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} f_2^n &= -f_2 (\sin\theta_2 e_2 + \cos\theta_2 e_3); \\ m_2^n &= -c f_2 (\sin\theta_2 e_3 - \cos\theta_2 e_2) \end{aligned} \quad (43)$$

式中, $2c$ 为左右端面间的距离, 并且 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$.

接触点 p_3, p_4 的轴向接触反力相对于铰中心的力

矩分别为:

$$\begin{aligned} m_3^n &= g_3 R (\cos\theta_3 e_2 - \sin\theta_3 e_3); \\ m_4^n &= -g_4 R (\cos\theta_4 e_2 - \sin\theta_4 e_3) \end{aligned} \quad (44)$$

接触点处的相对速度分别为:

$$v_i = \omega R (\sin\theta_i e_3 - \cos\theta_i e_2) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (45)$$

由库伦摩擦定律, 铰内接触点处的摩擦力及其相对于铰中心的力矩分别为:

$$\begin{aligned} f_1^f &= -\mu f_1 (\sin\theta_1 e_3 - \cos\theta_1 e_2); \\ m_1^f &= -c \mu f_1 (\cos\theta_1 e_3 + \sin\theta_1 e_2) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} f_2^f &= -\mu f_2 (\sin\theta_2 e_3 - \cos\theta_2 e_2); \\ m_2^f &= c \mu f_2 (\cos\theta_2 e_3 + \sin\theta_2 e_2) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} f_3^f &= -\mu g_3 (\sin\theta_3 e_3 - \cos\theta_3 e_2); \\ m_3^f &= -c \mu g_3 (\cos\theta_3 e_3 + \sin\theta_3 e_2) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} f_4^f &= -\mu g_4 (\sin\theta_4 e_3 - \cos\theta_4 e_2); \\ m_4^f &= c \mu g_4 (\cos\theta_4 e_3 + \sin\theta_4 e_2) \end{aligned} \quad (49)$$

由约束反力系与接触力系之间的互等关系可得:

$$\begin{pmatrix} f_2^c \\ f_3^c \\ m_2^c \\ m_3^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mu & -1 & \mu \\ -\mu & -1 & -\mu & -1 \\ -c\mu & -c & c\mu & c \\ c & -c\mu & -c & c\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \sin\theta_1 \\ f_1 \cos\theta_1 \\ f_2 \sin\theta_2 \\ f_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & \mu \\ -\mu & 0 & -\mu & 0 \\ -c\mu & R & c\mu & -R \\ -R & c\mu & R & -c\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_3 \sin\theta_3 \\ g_3 \cos\theta_3 \\ g_4 \sin\theta_4 \\ g_4 \cos\theta_4 \end{pmatrix} \quad (50)$$

通过对系数矩阵求逆可得:

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \sin\theta_1 \\ f_1 \cos\theta_1 \\ f_2 \sin\theta_2 \\ f_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2c\mu^2 - R & -R\mu & R & (R - 2c)\mu \\ (2c + R)\mu & -R & -R\mu & 2c\mu^2 + R \\ R & (R - 2c)\mu & 2c\mu^2 - R & -R\mu \\ -R\mu & 2c\mu^2 + R & (2c + R)\mu & -R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{g}_3 \sin\theta_3 \\ \bar{g}_3 \cos\theta_3 \\ \bar{g}_4 \sin\theta_4 \\ \bar{g}_4 \cos\theta_4 \end{pmatrix} \quad (51)$$

式中

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2c(1 + \mu^2)} \begin{bmatrix} -c & -c\mu & -\mu & 1 \\ c\mu & -c & -1 & -\mu \\ -c & -c\mu & \mu & -1 \\ c\mu & -c & 1 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_2^c \\ f_3^c \\ m_2^c \\ m_3^c \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \bar{g}_3 \\ \bar{g}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2c(1 + \mu^2)} \begin{pmatrix} g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (52)$$

将式(36)和式(37)代入式(51)中, 可求得接触反力 f_1 和 f_2 , 以及摩擦力引起的轴向力矩

$$m_1^c = \mu R (f_1 + f_2 + g_3 + g_4) \quad (53)$$

4 万向节

万向节可以看作两个旋转铰的组合. 其中, 水平轴上的接触点方位角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$; 竖直轴上接触点方位角分别为 $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$; 其含义与旋转铰相应变量相同, 如图5所示.

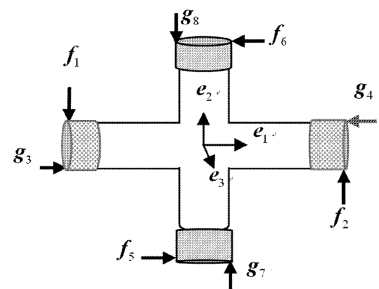


图5 万向节接触点与接触反力

Fig. 5 Contact points and contact forces of universal joint

不失一般性,假设水平转轴和内接物体相连, 竖直转轴和外接物体相连,作用在内接物体上的约束反力在铰点处的等效力系为 (f^c, m^c) . 根据旋转铰中铰点处约束反力与铰内接触反力之间的关系可得:

$$\begin{pmatrix} f_2^c \\ f_3^c \\ m_2^c \\ m_3^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mu & -1 & \mu \\ -\mu & -1 & -\mu & -1 \\ -c_1\mu & -c_1 & c_1\mu & c_1 \\ c_1 & -c_1\mu & -c_1 & c_1\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \sin\theta_1 \\ f_1 \cos\theta_1 \\ f_2 \sin\theta_2 \\ f_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & \mu \\ -\mu & 0 & -\mu & 0 \\ -c_1\mu & R_1 & c_1\mu & -R_1 \\ -R_1 & c_1\mu & R_1 & -c_1\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_3 \sin\theta_3 \\ g_3 \cos\theta_3 \\ g_4 \sin\theta_4 \\ g_4 \cos\theta_4 \end{pmatrix} \quad (54)$$

式中 $2c_1$ 为水平轴的长度, R_1 为水平轴的半径. 按 (45) 式求得水平方向接触反力 g_3, g_4 后, 由上式就可得到纵向接触反力 f_1, f_2 . 水平方向的摩擦力矩

$$m_1^c = \mu R_1 (f_1 + f_2 + g_3 + g_4) \quad (55)$$

将坐标基矢量做替换: $e_1 \rightarrow e_2, e_2 \rightarrow e_3, e_3 \rightarrow e_1$, 竖直轴上的接触反力就可按水平轴相应的方法计算. 竖直轴上的接触力 (含摩擦力) 与水平轴上的接触力 (含摩擦力) 一起构成平衡力系:

$$\begin{pmatrix} f_3^c \\ f_1^c \\ m_3^c \\ m_1^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mu & -1 & \mu \\ -\mu & -1 & -\mu & -1 \\ -c_2\mu & -c_2 & c_2\mu & c_2 \\ c_2 & -c_2\mu & -c_2 & c_2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_5 \sin\theta_7 \\ f_5 \cos\theta_7 \\ f_6 \sin\theta_6 \\ f_6 \cos\theta_6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & \mu \\ -\mu & 0 & -\mu & 0 \\ -c_2\mu & R_2 & c_2\mu & -R_2 \\ -R_2 & c_2\mu & R_2 & -c_2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_7 \sin\theta_7 \\ g_7 \cos\theta_7 \\ g_8 \sin\theta_8 \\ g_8 \cos\theta_8 \end{pmatrix} \quad (56)$$

式中 $2c_2$ 为竖直轴的长度, R_2 为竖直轴的半径. 轴向接触反由下式求得:

$$\begin{cases} g_7 = f_2^c; & g_8 = 0 (f_2^c > 0) \\ g_8 = -f_2^c; & g_7 = 0 (f_2^c < 0) \end{cases} \quad (57)$$

沿竖直轴方向的摩擦力矩

$$-m_2^c = \mu R_2 (f_5 + f_6 + g_7 + g_8) \quad (58)$$

5 数值算例

如图 6 所示单摆, 其长 $L = 1\text{m}$, 宽和高分别为 $a = b = 0.1\text{m}$. 单摆的质量密度为 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$, 重力加速度 $g = 9.80665$, 方向沿 y 轴负方向. 单摆与

底座之间通过圆柱铰连接, 圆柱铰的摩擦半径 $R = 0.05\text{m}$, 左右端面的距离为单位值, 初始位置水平, 轴向初始速度为 $v_0 = 1\text{m/s}$, 摩擦系数 $\mu = 0.1$.

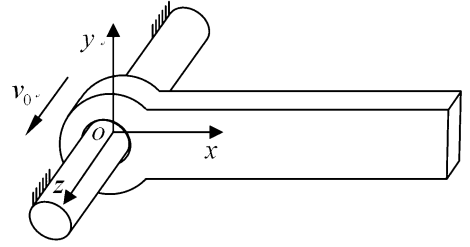


图 6 单摆模型

Fig. 6 Single pendulum model

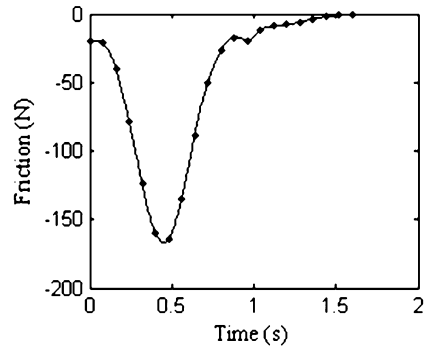


图 7 轴向摩擦力

Fig. 7 Friction along the axis

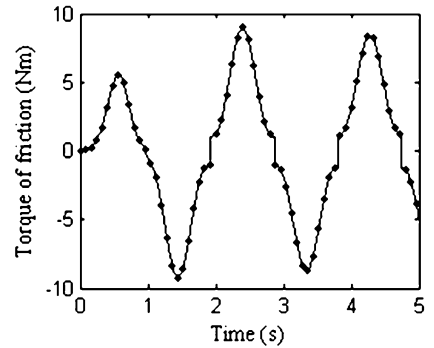


图 8 轴向摩擦力矩

Fig. 8 Torque of friction along the axis

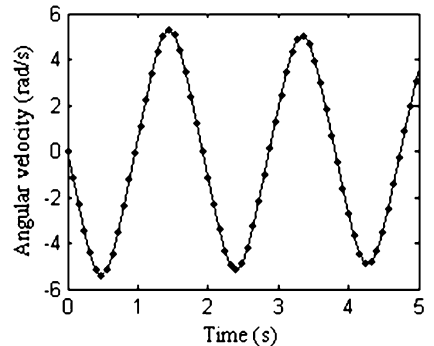


图 9 单摆的角速度

Fig. 9 Angular velocity of the single pendulum

计算结果如图7-图9所示,其中,*线为ADAMS计算结果,一线为本文计算结果。

由以上结果可以看出,本文计算结果和ADAMS结果是一致的,说明本文建立的摩擦力模型是正确的。利用本文所述方法还可以容易地得到左右端面的接触形式,如图10-图11所示。

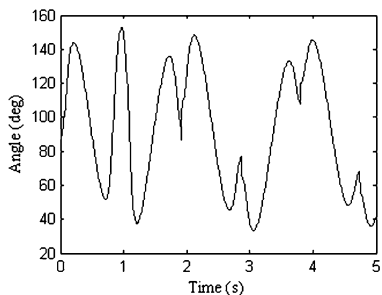


图10 方位角 θ_1

Fig.10 Orientation angle θ_1

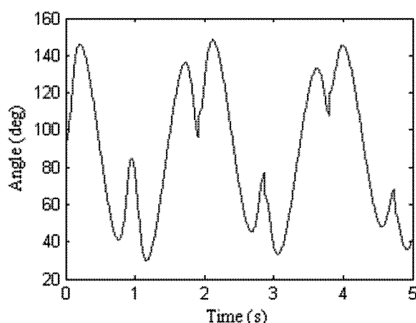


图11 方位角 θ_2

Fig.11 Orientation angle θ_2

6 结束语

实际机械系统中铰内的间隙都是很小的,但摩擦力往往是不可忽略的。本文所提出的方法一方面充分考虑了铰内间隙的影响,另一方面有又保留了铰的运动学约束作用,是一种现实可行的方法。

参 考 文 献

- 1 阎绍泽,陈鹿民,季林红,俞武勇,金德闻. 含间隙铰的机械多体系统动力学模型. 振动工程学报,2003,16(3):290~294 (Yan Shaoze, Chen Lumin, Ji Linhong, Yu Wuyong, Jin Dewen. Dynamic modeling of multibody system with clearance joints. *Journal of Vibration Engineering*, 2003,16(3):290~294(in Chinese))
- 2 王剑峰,王琪. 含干摩擦多体系统 Lagrange 方程的数值

- 3 丁遂亮,洪嘉振. 柔性多体系统接触碰撞动力学研究. 上海交通大学学报,2003,37(12):1927~1930 (Ding Suiliang, Hong Jiazhen. Dynamic analysis of impact loads in flexible multibody systems by FEM. *Engineering Mechanics*, 2003,37(12):1927~1930(in Chinese))
- 4 郭安萍,洪嘉振,杨辉. 柔性多体系统接触碰撞子结构动力学模型. 中国科学(E辑),2002,32(6):765~770 (Guo Anping, Hong Jiazhen, Yang Hui. Contact-impact substructure model for dynamics of flexible multibody system. *Science in China (Series E)*, 2002,32(6):765~770 (in Chinese))
- 5 盛立伟,刘锦阳,余征跃. 柔性多体系统弹性碰撞动力学建模. 上海交通大学学报,2006,40(10):1790~1797 (Sheng Liwei, Liu Jinyang, Yu Zhengyue. Dynamic modeling of a flexible multibody system with elastic impact. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2006,40(10):1790~1797 (in Chinese))
- 6 刘才山,陈滨,彭瀚,乔勇. 多体系统多点碰撞接触问题的数值求解方法. 动力学与控制学报,2003,1(1):59~65 (Liu Caishan, Chen Bin, Peng Han, Qiao Yong. Numerical resolution of multi-body systems with multiple contact/impact points. *Journal of Dynamics and Control*, 2003,1(1):59~65 (in Chinese))
- 7 王树勇,袁士杰. 多体系统在冲击约束下的碰撞运动. 北京理工大学学报,1997,17(2):136~141 (Wang Shuyong, Yuan Shijie. Collision motion of multibody systems with impulsive constraints. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 1997,17(2):136~141 (in Chinese))
- 8 Inna Sharf, Yuning Zhang. A contact force solution for non-colliding contact dynamics simulation. *Multibody Syst Dyn*, 2006,16:263~290
- 9 Mihai Anitescu, Gary D Hart. A fixed-point iteration approach for multibody dynamics with contact and small friction. *Math. Program. Ser. B*, 2004,101:3~32
- 10 Lars Johansson. A linear complementarity algorithm for rigid body impact with friction. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1999,18:703~717
- 11 Peng Song, Jong-Shi Pang, Vijay Kumar. A semi-implicit time-stepping model for frictional compliant contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004,60:2231~2261

- 12 Gerhard Hippmann. An algorithm for compliant contact between complexly shaped bodies. *Multibody System Dynamics*, 2004, 12: 345 ~ 362
- 13 Y Kanno, J A C Martins. Arc - length method for frictional contact problems using mathematical programming with complementarity constraints. *J. Optim. Theory Appl*, 2006, 131: 89 ~ 113
- 14 Jong - Shi Pang, Jeffrey C. Trinkle. Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi - rigid - body contact problems with Coulomb friction. *Mathematical Programming*, 1996, 73: 199 ~ 226
- 15 Ch Glocker, F Pfeiffer, München. Complementarity problems in multibody systems with planar friction. *Archive of Applied Mechanics*, 1993, 63: 452 ~ 463
- 16 Peter Ravn. A Continuous Analysis Method for Planar Multibody Systems with Joint Clearance. *Multibody System Dynamics*, 1998, 2: 1 ~ 24
- 17 Olivier A Bauchau, Carlo L Bottasso. Contact Conditions for Cylindrical, Prismatic and Screw Joints in Flexible Multibody Systems. *Multibody System Dynamics*, 2001, 5: 251 ~ 278
- 18 Paulo Flores, Jorge Ambrósio, J Pimenta Claro. Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints. *Multibody System Dynamics*, 2004, 12: 47 ~ 74

FRICIONS IN JOINTS OF MULTIBODY SYSTEMS*

Qi Zhaohui Luo Xiaoming Huang Zhihao

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract Joints of multibody systems can keep their constraints under the condition of very small clearances. However, the frictions in a joint are involved in the constraint forces, as the result of the correlations between the state of the systems and form of contact in the joint. Based on the equivalence of points contact and distributed contact, we presented the formulations of frictions in typical joints with small clearances on the assumption that the deformations of joints are negligible. An example was given to validate the presented formulations.

Key words multibody systems, frictions, clearances, joints