

Rossler 系统的最小时间同步*

马明 郑永爱 胡冯仪 刘云

(扬州大学信息工程学院,扬州 225009)

摘要 采用最小时间控制方法为 Rossler 的同步误差系统设计了一个非线性状态反馈控制器,基于 Lyapunov 稳定性理论,证明了所设计的控制器能够使受控误差系统全局渐近稳定到同步误差系统的零点,并且使所提出的目标泛函取得极小值.数值仿真表明,所设计的控制器实用有效并且易于实现.

关键词 Rossler 系统, 最小时间控制, Lyapunov 函数

引言

1990年, Pecora 和 Carroll 提出了“混沌同步”的概念,并在实验室中用电路实现了同一信号驱动下的两个相同耦合混沌系统的同步.现如今,人们对混沌同步已做了很多深入的研究,并在不同的混沌系统中实现了不同类型的混沌同步,如完全同步,广义同步,相同步,延迟同步^[1~3]等.

最小时间控制问题,又称时间最优控制问题,它要求在容许控制范围内寻求最优控制,使系统的轨道以最短的时间从任意初始状态转移到要求的目标集.最小时间控制问题在实践中具有重要意义,如希望导弹以最短的时间击中目标,被控对象在最短的时间内达到平衡位置等.一般来说,求非线性系统和任意目标集的时间最优控制的解析解十分困难,所以很多文献[5~12]并没有讨论最小时间控制.本文对一类系统进行了分析,给出了最小时间控制器的显式表达,理论证明和数值模拟表明该控制器的有效性.

1 最小时间控制

考虑如下一阶非线性状态方程:

$$\dot{x} = -g(x, t) + Ku, x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

式中 $x \in R^1$ 是状态变量, $g(x, t)$ 是关于 x 连续可微的且 $g(0, t) = 0, K > 0$ 是常数. 而控制 $u \in R^1$ 且 $|u| \leq 1$. 我们的问题是对给定的初态 $x(t_0) = x_0 \in R^1$, 求满足约束,使状态方程(1)的解满足 $x(t_f) = 0$ 且性能指标

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (2)$$

达到最小的控制 u .

假设最小时间控制问题的控制存在,由(1)和(2)得到哈密顿函数为:

$$H(x, u, \lambda, t) = 1 - \lambda g(x, t) + K\lambda u \quad (3)$$

而共轭方程和横截条件为:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \lambda, \lambda(t_f) = -\mu \quad (4)$$

其中 μ 为待定常数且 $\mu \neq 0$. 否则若 $\mu = 0$, 则有 $H(t_f) = 1$, 它与 $H(t_f) = 0$ (因目标集为 $x(t_f) = 0$, 不显含 t_f) 矛盾.

已知 $g(x, t)$ 关于 x 连续可微的,记 $h(x, t) = \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}$, 只要注意到 $\lambda(t_f) = -\mu$, (4)式可表达为

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = h(x, t) dt, \text{从 } t \text{ 到 } t_f \text{ 积分上式,并考虑到 } \lambda(t_f) = -\mu, \text{可得}$$

$$\ln \lambda(t_f) - \ln \lambda(t) = \int_t^{t_f} h(x, t) dt \quad (5)$$

将上式两边取指数得

$$\frac{\lambda(t_f)}{\lambda(t)} = e^{\int_t^{t_f} h(x, t) dt}, \text{即 } \lambda(t) = -\mu e^{-\int_t^{t_f} h(x, t) dt} \quad (6)$$

因为 $e^{-\int_t^{t_f} h(x, t) dt} > 0$, 由上式直接得:

$$\text{sgn}(\lambda(t)) = -\text{sgn}(\mu) \quad (7)$$

为确定最小时间控制,由极小值原理得:

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (8)$$

考虑到 $K > 0$ 且 $|u| \leq 1$, 得到如下最优控制律:

$$u^*(t) = \text{sgn}(\lambda(t)), \text{即 } u^*(t) = -\text{sgn}(\mu) \quad (9)$$

2008-03-04 收到第1稿,2008-04-27 收到修改稿.

* 扬州大学自然科学基金资助项目(KK0513109, 2006CXJ005)

由于 $\mu \neq 0$, 因此最小时间控制只能有两种形式:

$$u^*(t) = 1, \forall t > t_0 \text{ 或 } u^* = -1, \forall t > t_0 \quad (10)$$

若 $x(t_0) = 0$, 由于要求 $x(t_f) = 0$ 且注意到 $g(0, t) = 0$, 显然, 最优控制 $u^*(t) = 0$. 而最优性能指标显然为零.

如果 $x(t_0) > 0$, 设 t^* 是使 $x(t^*) = 0$ 的第一个时刻, 显然 $t^* - t_0$ 就是把 x_0 引导到 $x(t^*) = 0$ 的最短时间, 而且有

$$x(t) > 0, \forall t \in [t_0, t^*) \quad (11)$$

由于最优控制只有两种形式, $u^*(t) = 1, u^*(t) = -1$, 只要能判断出当 $x(t_0) > 0$ 时, 最小时间控制是用 $u^*(t) = 1$ 还是用 $u^*(t) = -1$ 便可. 为此, 将 $u^*(t) = 1$ 和 $u^*(t) = -1$ 分别代入(1)得:

$$\dot{x}_+ = -g(x_+, t) + K, \dot{x}_- = -g(x_-, t) - K \quad (12)$$

其中 x_+ 为(1)对应于 $u^*(t) = 1$, 初态 $x(t_0) = x_0$ 的解, 而 x_- 为(1)对应于 $u^*(t) = -1$, 初态 $x(t_0) = x_0$ 的解. 只要注意到 $x_+(t_0) = x_-(t_0)$ 和 $-K < K$, 由(12)有 $\dot{x}_+(t_0) > \dot{x}_-(t_0)$. 说明 $\dot{x}_+(t)$ 在 t_0 处的斜率大于 $x_-(t)$ 在 t_0 处的斜率, 因此存在一个 $\varepsilon > 0$ 使

$$x_+(t) > x_-(t), \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) \quad (13)$$

如果 $x_+(t) > x_-(t), \forall t \in [t_0, t^*)$, 则作为时间 t 的曲线 $x_+(t)$ 比 $x_-(t)$ 后于时间轴相交. 因此, 最小时间控制为 $u^* = -1$, 现反设存在一个 $t_1 \in (t_0, t)$ 使

$$\begin{aligned} x_-(t) < x_+(t), \forall t \in (t_0, t_1) \\ x_-(t) = x_+(t), t = t_1 \\ x_-(t) > x_+(t), \forall t \in (t_1, t_1 + \delta) \end{aligned} \quad (14)$$

其中 δ 为一正数. (14) 说明作为时间 t 的曲线, 在 t_1 时刻前 $x_+(t)$ 位于 $x_-(t)$ 之上, 而在 t_1 时刻之后, $x_+(t)$ 位于 $x_-(t)$ 之下, 因此必有 $\dot{x}_+(t_1) < \dot{x}_-(t_1)$; 另一方面由(12)可得:

$$\dot{x}_+(t_1) = -g(x_+(t_1), t_1) + K, \dot{x}_-(t_1) = -g(x_-(t_1), t_1) - K \quad (15)$$

只要注意到 $x_+(t_1) = x_-(t_1)$, 则有 $g(x_+(t_1), t_1) = g(x_-(t_1), t_1)$, 因而有

$$\dot{x}_+(t_1) - \dot{x}_-(t_1) = 2K > 0 \quad (16)$$

它与 $\dot{x}_+(t_1) < \dot{x}_-(t_1)$ 矛盾. 它说明满足(14)的 t_1 是不存在的. 因此有

$$x_+(t) > x_-(t), \forall t \in (t_0, t^*) \quad (17)$$

即作为时间 t 的曲线 $x_-(t)$ 先于 $x_+(t)$ 与时间轴相交. 因此, 当 $x(t_0) = x_0 > 0$ 时, 得到 $u^* = -1$. 从(11)可得

$$u^* = -sgn(x), \forall x > 0 \quad (18)$$

同理当 $x(t_0) = x_0 < 0$ 时, 有 $x_+(t) < x_-(t), \forall t \in (t_0, t^*)$. 类似地讨论知道此时最小时间控制为 $u^* = 1$, 由于此时 $x_+(t) < 0, \forall t \in [t_0, t^*)$. 所以仍有

$$u^* = -sgn(x), \forall x < 0 \quad (19)$$

综上所述, 如果最小时间控制问题的控制存在, 其最优控制为

$$u^* = -sgn(x) \quad (20)$$

2 Rossler 系统最小时间同步的实现及数值仿真

Rossler 系统的数学模型为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + bx_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - a) \end{aligned} \quad (21)$$

当参数 $b = 0.2$ 和 $a = 5.7$ 时, 系统是混沌的, 图 1 显示了系统的相位图(初值取 $[1, 1, 1]$).

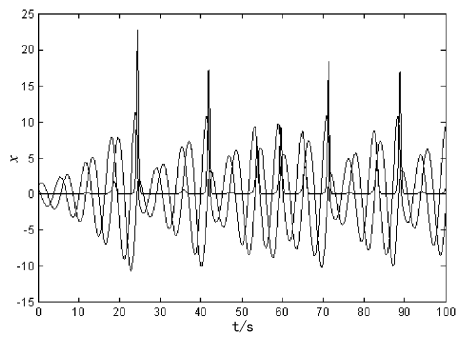


图 1 Rossler 系统混沌吸引子

Fig. 1 The chaotic attractor of Rossler system

构造响应系统为:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - 2x_2 - x_3 + u'_1 + u_1 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + by_2 + u'_2 + u_2 \\ \dot{y}_3 &= -(y_3 - x_3)^3 - (y_3 - x_3)^2 + u'_3 + u_3 \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ 为控制变量, $|u_i| \leq 1, i = 1, 2, 3, u' = [u'_1, u'_2, u'_3]$ 为前馈向量:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} [y_1 - x_1 + c_1(y_2 - x_2)]^3 \\ u'_2 &= \frac{c_1}{c_2 - c_1} [y_1 - x_1 + c_1(y_2 - x_2)]^3 \\ u'_3 &= b + x_3(x_1 - a) \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2} \\ c_2 &= \frac{b - \sqrt{b^2 + 4}}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

令 $e(t) = y(t) - x(t)$ 得误差系统为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_1 + \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} (e_1 + c_1 e_2)^3 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= e_1 + b e_2 + \frac{c_1}{c_2 - c_1} (e_1 + c_1 e_2)^3 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= -e_3^3 - e_3^2 + u_3 \end{aligned} \quad (25)$$

令 $\eta_1 = e_1 + c_1 e_2, \eta_2 = e_1 + c_2 e_2, \eta_3 = e_3, v = u_1 + c_1 u_2, v_2 = u_1 + c_2 u_2, v_3 = u_3$, 则:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= c_1 \eta_1 - c_1 \eta_1^3 + v_1 \\ \dot{\eta}_2 &= c_2 \eta_2 + v_2 \\ \dot{\eta}_3 &= -\eta_3^3 - \eta_3^2 + v_3 \end{aligned} \quad (26)$$

对于系统(26)取性能指标 $J[v(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f$, 系统(21)与系统(22)同步等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - x(t)] = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$ 等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0 (\eta(t) = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T)$, 所以系统(21)与系统(22)同步等价于系统(26)渐近稳定到零点. 为了满足 t_f 最小, 由最小时间控制原理分析可得:

$$\begin{aligned} v_1 &= -c_1 \operatorname{sgn}(\eta_1) \\ v_2 &= c_2 \operatorname{sgn}(\eta_2) \\ v_3 &= -\operatorname{sgn}(\eta_3) \end{aligned} \quad (27)$$

即:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + c_1 u_2 = -c_1 \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2) \\ v_2 &= u_1 + c_2 u_2 = c_2 \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2) \\ v_3 &= u_3 = -\operatorname{sgn}(e_3) \end{aligned} \quad (28)$$

解得:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} [\operatorname{sgn}(e_1 + c_1 e_2) + \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2)] \\ u_2 &= \frac{c_2 \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2) + c_1 \operatorname{sgn}(e_1 + c_1 e_2)}{c_2 - c_1} \\ u_3 &= -\operatorname{sgn}(e_3) \end{aligned} \quad (29)$$

代入系统(25)得:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 + \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} (e_1 + c_1 e_2)^3 + \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} [\operatorname{sgn}(e_1 + c_1 e_2) + \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2)] \\ \dot{e}_2 &= e_1 + b e_2 + \frac{c_1}{c_2 - c_1} (e_1 + c_1 e_2)^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_2 \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2) + c_1 \operatorname{sgn}(e_1 + c_1 e_2)}{c_2 - c_1} \\ \dot{e}_3 &= -e_3^3 - e_3^2 - \operatorname{sgn}(e_3) \end{aligned} \quad (30)$$

构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} [(e_1 + c_1 e_2)^2 + (e_1 + c_2 e_2)^2 + e_3^2] \quad (31)$$

$V(e) \geq 0$, 当且仅当 $e = 0$ 时 $V = 0$, 对 V 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (e_1 + c_1 e_2) (\dot{e}_1 + c_1 \dot{e}_2) + (e_1 + c_2 e_2) (\dot{e}_1 + c_2 \dot{e}_2) + e_3 \dot{e}_3 \\ &= (e_1 + c_1 e_2) [e_2 + c_1 e_1 + b c_1 e_2 - c_1 (e_1 + c_1 e_2)^3 - c_1 \operatorname{sgn}(e_1 + c_1 e_2)] \\ &+ (e_1 + c_2 e_2) [e_2 + c_2 e_1 + b c_2 e_2 + c_2 \operatorname{sgn}(e_1 + c_2 e_2)] + e_3 \dot{e}_3 \end{aligned} \quad (32)$$

考虑式(24)中 c_1, c_2 的值满足 $b c_1 + 1 = c_1^2, b c_2 + 1 = c_2^2$, 式(32)简化为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= c_1 (e_1 + c_1 e_2)^2 - c_1 (e_1 + c_1 e_2)^4 - c_1 |e_1 + c_1 e_2| \\ &+ c_2 (e_1 + c_2 e_2)^2 + c_2 |e_1 + c_2 e_2| - e_3^4 - e_3^3 - |e_3| \end{aligned}$$

由(24)可知 $c_1 > 0, c_2 < 0$, 所以 $c_2 (e_1 + c_2 e_2)^2 + c_2 |e_1 + c_2 e_2| \leq 0$, 当 $|e_1 + c_1 e_2| \geq 1$ 时, $c_1 (e_1 + c_1 e_2)^2 - c_1 (e_1 + c_1 e_2)^4 \leq 0$, 当 $|e_1 + c_1 e_2| < 1$ 时, $c_1 (e_1 + c_1 e_2)^2 - c_1 |e_1 + c_1 e_2| \leq 0$, 所以 $c_1 (e_1 + c_1 e_2)^2 - c_1 (e_1 + c_1 e_2)^4 - c_1 |e_1 + c_1 e_2| \leq 0$, 同理可得 $-e_3^4 - e_3^3 - |e_3| \leq 0$, 即 $\dot{V} \leq 0$ 当且仅当 $e_1 + c_1 e_2 = 0, e_1 + c_2 e_2 = 0$ 且 $e_3 = 0$ 时, $\dot{V} = 0$. 即 $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ 时, $\dot{V} = 0$. 所以受控系统(30)全局渐近稳定, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - x(t)] = 0$. 系统(21)与系统(22)同步实现.

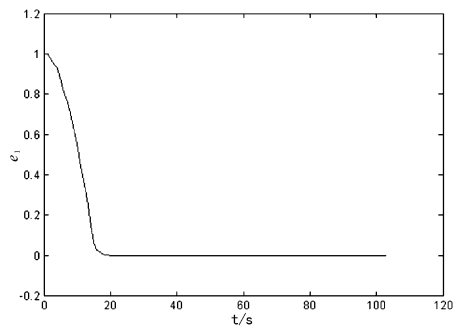


图2 误差系统状态变量随时间演化图

Fig. 2 Stable orbit of state variable of the error system

为了验证最小时间同步能力, 取系统参数 $b = 0.2$ 和 $a = 5.7$, 这时候控制律由(29)给出, 取系统(30)的初值为 $e_0 = [1, -1, 2]^T$, 图2~图4展示了系统(30)的轨道可以迅速趋于零点. 考虑系统(25), 在满足稳定的情况下改变参数的值(其中 $c_2 = -0.905$ 为最优控制对应参数), 为了简单起见, 我们只比较了 e_2 的收敛时间, 由表1可得时间参

数的最优性.

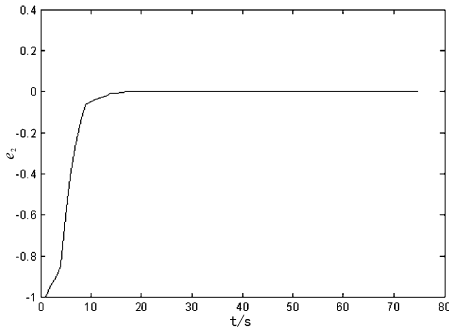


图3 误差系统状态变量随时间演化图

Fig.3 Stable orbit of state variable of error system

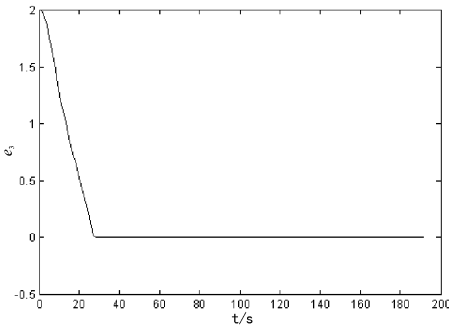


图4 误差系统状态变量随时间演化图

Fig.4 Stable orbit of state variable of error system

表1 误差系统变量的收敛时间

Table 1 Convergence time of the variable of error system

| c_2 | $c_2 = -0.905$ | $c_2 = -0.1$ | $c_2 = -0.5$ | $c_2 = -1.5$ |
|----------------------|----------------|--------------|--------------|--------------|
| Convergence time (s) | 18 | 22 | 19 | 20 |

3 结论

本文应用最小时间控制方法为 Rossler 混沌系统设计了一个最优非线性状态反馈控制器. 采用 Lyapunov 稳定性理论证明所设计的控制器能够使受控误差系统全局渐近稳定到误差系统的零点. 数值仿真表明, 这种最小时间控制方法实用有效, 易于实现. 在不同的初始条件下, 可以迅速将受控误差系统控制到系统的零点.

参 考 文 献

- Hong Y G, Qin H S. Adaptive synchronization of chaotic systems via state or output feedback control. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(4): 1149 ~ 1158
- Liao T L, Tsai S H. Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communication. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2000, 11(9): 1387 ~ 1396
- 赵磊, 赵雪峰, 郑永爱. 采用模糊控制实现混沌系统的广义投影同步. *电机与控制学报*, 2007, 11(6): 644 ~ 648 (Zhao Lei, Zhao Xuefeng, Zheng Yong - ai. Realizing generalized projective synchronization of chaotic systems by fuzzy control. *Electric machines and control*, 2007, 11(6): 644 ~ 648
- 李国勇等. 最优控制理论与参数优化. 北京: 国防工业出版社, 2006 (Li guoyong, et al. Optimal Control Theory and Parameter optimization. BeiJing: National Defense Industry Press, 2006
- Marat Rafikov, Jose Manoel Balthazar. On an optimal control design for Rossler system. *Physics Letters A*, 2004, 333(3 - 4): 241 ~ 245
- Awad El - Gohary, Optimal synchronization of Rossler system with complete uncertain parameters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(2): 345 ~ 355
- Awad El - Gohary, Ammar Sarhan. Optimal control and synchronization of Lorenz system with complete unknown parameters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 30(5): 1122 ~ 1132
- 刘丁, 钱富才, 任海鹏, 孔志强. 离散混沌系统的最小能量控制. *物理学报*, 2004, 53(7): 2074 ~ 2079 (Liu Ding, Qian Fucui, Ren Haipeng, Kong Zhiqiang. Energy minimization control for a discrete chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53(7): 2074 ~ 2079
- 宋运忠, 赵光宙, 齐冬莲. 统一混沌系统的最优控制. *系统仿真学报*, 2007, 19(1): 123 ~ 125 (Song Yunzhong, Zhao Guangzhou, Qi Donglian. Optimal control of unified chaos system. *Journal of System Simulation*, 2007, 19(1): 123 ~ 125
- 高洁, 陆君安. 不确定参数下的四维超混沌吕系统的最优同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (Gao jie, Lu junan. Optimal synchronization of hyperchaotic Lu system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 320 ~ 325
- 李险峰, 张建刚, 褚衍东, 常迎香. 一个新类 Lorenz 混沌系统的动力学分析及电路仿真. *动力学与控制学报*,

2007,5(4):324 ~ 329 (Li Xianfeng, Zhang jiangang, Chu Yandong, Chang Yingxiang. Dynamics analysis and circuit experiment simulation for a new Lorenz - like chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4):324 ~ 329)

12 刘福才, 宋佳秋. 一类参数不确定混沌系统的广义同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(2):130 ~ 133 (GLiu Fucal, Song Jiaqiu. Generalized synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2):130 ~ 133(in Chinese))

TIME MINIMIZATION SYNCHRONIZATION OF ROSSLER SYSTEM*

Ma Ming Zheng Yong - ai Hu Fengyi Liu Yun

(College of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

Abstract A nonlinear state feedback controller was designed for controlling the error system of synchronization of Rossler using time minimization control approach. Based on the Lyapunov stability theory, the designed controller was proved to be able to globally stabilize asymptotically the controlled system to its zero point and minimize the proposed cost functional. The numerical simulation show the effectiveness and readiness of the controller.

Key words Rossler system, time minimization control, Lyapunov function