

# 一类两自由度含间隙系统的 Hopf 分岔\*

周伟 褚衍东 俞建宁 李志莘

(兰州交通大学数理与软件工程学院, 兰州 730070)

**摘要** 建立了一类两自由度含间隙系统的力学模型, 并研究了该系统的周期运动及运动的受扰运动. 通过选取适当的 Poincaré 截面及系统碰撞的周期性条件, 建立了系统的 Poincaré 映射. 利用 Poincaré 映射数值证明了 Hopf 圈的存在性, 揭示了并讨论了随着参数的变化系统通过 Hopf 分岔及周期倍化分岔向混沌演化的过程. 最后讨论了系统参数对系统动力学行为的影响, 为系统的动力学优化设计找到了理论依据.

**关键词** 含间隙系统, Poincaré 映射, 周期运动, Hopf 分岔

## 引言

在动力机械中除设计要求有间隙外, 很多运行因素都会导致间隙出现. 因此, 对具有间隙的非线性含系统的动力学研究受到很大的重视. 随着生产的发展和科学技术的进步, 含间隙系统在实际工程问题中愈来愈广泛地得到应用. 含间隙系统的周期运动的存在性、稳定性、分岔甚至混沌等问题的研究已取得较大的进展. 含间隙系统和碰撞振动系统一般多为多参数系统, 参数的变化将引起系统响应的本质变化—产生分岔现象. 因此这类机械与装置的动态优化设计完全依赖于对系统复杂运动机理的深刻了解. 由于含间隙系统是复杂的非线性动力学系统, 对含间隙系统和碰撞振动系统的动力性态的研究具有极大的理论价值和工程应用价值. 它的一些根本问题的解决, 将推进非线性科学的发展.

Hopf 分岔是非线性系统产生自激振动的主要机制之一. 迄今为止, 在电力系统、飞行器、航天器、机车车辆、碰撞系统等大量工程系统中都发现有 Hopf 分岔导致的周期性振荡. 关于分岔的一般理论和应用, 国内外已有不少专著论述, 但主要限于二维的情形. 而在实际问题中人们经常会碰到高维的情形. 本文建立了一类两自由度含间隙系统的力学模型, 并研究了该系统的  $1/n$  周期运动, 利用 Poincaré 映射数值研究了该系统的 Hopf 分岔, 揭示了该系统通过 Hopf 分岔向混沌演化的过程.

## 1 两自由度含间隙系统的数学模型分析

图 1 是一两自由度含间隙系统与固定约束发生碰撞的模型<sup>[3]</sup>. 质量为  $m_i$  的质块分别由刚度为  $K_i$  的弹簧和阻尼系数为  $C_i$  的阻尼器相连接, 两个质块只作水平方向的运动, 并分别受到简谐激励力  $P_i \sin(\Omega T + \tau)$  ( $i = 1, 2$ ) 的作用. 当质块  $m_2$  的位移  $X_2$  等于间隙  $-B$  时, 质块  $m_2$  与刚性约束发生碰撞, 改变运动方向后, 又以新的初值运动, 然后再次与刚性约束发生碰撞, 如此往复. 假设模型中的阻尼是 Rayleigh 型比例阻尼, 碰撞过程由碰撞恢复系统  $R$  ( $0 < R < 1$ ) 确定.

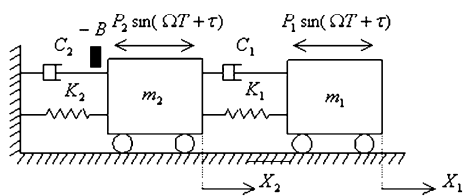


图 1 两自由度含间隙系统的力学模型  
Fig. 1 Mechanical model of two-degree-of-freedom system with clearance

振动系统自由运动的微分方程为:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \sin(\Omega T + \tau) \quad (X_2 > -B) \quad (1)$$

质块  $m_2$  碰撞时的冲击方程为:

$$\dot{X}_{2+} = -R\dot{X}_{2-} \quad (X_2 = -B) \quad (2)$$

式中  $\ddot{X}_i$  表示振子  $m_i$  的位移  $X_i$  对时间  $T$  的二阶导数,  $\dot{X}_i$  表示振子  $m_i$  的位移  $X_i$  对时间  $T$  的一阶导数,  $\dot{X}_{2+}$ ,  $\dot{X}_{2-}$  分别表示质块  $m_2$  与刚性约束发生碰撞前后的瞬时速度.

选取新的无量纲时间尺度和位移尺度<sup>[1]</sup>  $t =$

$$T\sqrt{\frac{K_1}{m_1}}, x_i = \frac{X_i K_1}{P_1 + P_2} \quad (i=1, 2), \text{并进一步令:}$$

$$\mu_m = \frac{m_2}{m_1}, \mu_k = \frac{K_2}{K_1}, \mu_c = \frac{C_2}{C_1}, f_{20} = \frac{P_2}{P_1 + P_2},$$

$$\omega = \Omega\sqrt{\frac{K_1}{m_1}}, b = \frac{BK_1}{P_1 + P_2}, \xi = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 m_1}} \quad (3)$$

并进一步令,  $\mu_k = \mu_c$

则可得方程(1)和(2)的无量纲方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\zeta \\ -2\zeta & 2\zeta(1 + \mu_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \mu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - f_{20} \\ f_{20} \end{bmatrix} \sin(\omega t + \tau)$$

( $x_2 > -b$ ) (4)

$$\dot{x}_{2+} = -R\dot{x}_{2-} \quad (x_2 = -b) \quad (5)$$

利用理论力学的知识,可很容易得到系统(4)的无阻尼固有频率:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1 + \mu_k + \mu_m \pm \sqrt{(1 + \mu_k + \mu_m)^2 - 4\mu_k \mu_m}}{2\mu_m} \quad (6)$$

假设  $\sqrt{(1 + \mu_k + \mu_m)^2 - 4\mu_k \mu_m} \neq 0$ , 并进一步假设:

$\omega_1^2 < \omega_2^2$ , 且令:  $M_{pi} = \frac{1}{(1 - \omega_i^2)} + \mu_m \quad (i=1, 2)$ , 则可

得方程(4)的正则模态矩阵:

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1 - \omega_1^2)\sqrt{M_{p1}}} & \frac{1}{(1 - \omega_2^2)\sqrt{M_{p2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{M_{p1}}} & \frac{1}{\sqrt{M_{p2}}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

取  $\psi$  为变换矩阵, 做如下坐标变换:

$$X = \psi \xi \quad (8)$$

其中  $X = (x_1, x_2)^T$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ . 则经过坐标变换(8), 方程(4)可解耦为:

$$I \ddot{\xi} + C \dot{\xi} + \Lambda \xi = \bar{F} \sin(\omega t + \tau) \quad (9)$$

式中,  $I$  是一个  $2 \times 2$  单位阵,  $C$  和  $\Lambda$  均为  $2 \times 2$  矩

阵,

$$C = \text{diag}(2\zeta\omega_1^2, 2\zeta\omega_2^2) \quad \Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$$

$$\bar{F} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = \Psi^T P \quad P = (1 - f_{20}, f_{20})^T$$

由模态叠加法可以得到方程(4)的解:

$$x_i = \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} (A_j e^{l_j t} + B_j e^{\bar{l}_j t} - h_j \bar{f}_j ( (-\omega_1^2 + \omega^2) \sin(\omega t + \tau) + 2\omega \xi \omega_1^2 \cos(\omega t + \tau) ))$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^2 (\psi_{ij} (l_j A_j e^{l_j t} + \bar{l}_j B_j e^{\bar{l}_j t} - h_j \bar{f}_j (\omega (-\omega_1^2 + \omega^2) \cos(\omega t + \tau) - 2\omega^2 \xi \omega_1^2 \sin(\omega t + \tau) ))) \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

其中  $A_j$  和  $B_j$  为待定系数, 由系统(4)的初值和参数决定.  $\psi_{ij}$  为正则模态矩阵  $\psi$  的元素;  $l_j = -(\xi\omega_j - \sqrt{\omega_j^2 \zeta^2 - 1})\omega_j$ ,  $\bar{l}_j = -(\xi\omega_j + \sqrt{\omega_j^2 \zeta^2 - 1})\omega_j$ ,  $h_j = \frac{1}{(4\zeta^2 \omega^2 + 1)\omega_j^2 - 2\omega_j^2 \omega^2 + \omega^4}$ , ( $j=1, 2$ )

选取 Poincaré 截面<sup>[2]</sup>  $\sigma \{ (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta) \in R^4 \times S. x_2 = -b, \dot{x}_2 = \dot{x}_{2+} \}$ , 其中为了保证  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 我们选取  $\theta = \omega t \bmod 2\pi$ , 可以建立  $1/n$  周期运动的映射方程. 这里用符号  $q = p/n$  表示碰撞振动系统的周期运动 ( $p$  为碰撞次数,  $n$  为激振力周期数).  $q = 1/n$  周期运动表示如果质块  $m_2$  与刚性约束碰撞后瞬间的无量纲时间  $t$  是 0, 那么在下次与刚性约束碰撞的瞬间的无量纲时间  $t$  为  $2n\pi/\omega$ . 从而, 可以确定系统(4)碰撞运动的周期性条件:

$$x_1(0) = x_1\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right) = x_{10}, x_2(0) = -b, x_2\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right) = -b$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_1\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right) = \dot{x}_{10}, \dot{x}_2(0) = -R\dot{x}_2\left(\frac{2n\pi}{\omega}\right) = \dot{x}_{2+} \quad (11)$$

将条件(11)代入模态解(10), 即可得到待定系数  $A_j, B_j (j=1, 2)$  和振动系统(4)的  $1/n$  映射不动点:

$$X^* = (x_{10}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{2+}, \tau_0).$$

考虑系统  $1/n$  运动的受扰运动,

$$x_i = \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} (A_j e^{l_j t} + B_j e^{\bar{l}_j t} - h_j \bar{f}_j ( (-\omega_1^2 + \omega^2) \sin(\omega t + \tau_0 + \Delta\tau) + 2\omega \xi \omega_1^2 \cos(\omega t + \tau_0 + \Delta\tau) ))$$

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^2 (\psi_{ij} (l_j A_j e^{l_j t} + \bar{l}_j B_j e^{\bar{l}_j t} - h_j \bar{f}_j (\omega (-\omega_1^2 + \omega^2) \cos(\omega t + \tau_0 + \Delta\tau) - 2\omega^2 \xi \omega_1^2 \sin(\omega t + \tau_0 + \Delta\tau) ))) \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

设系统发生碰撞后瞬间的无量纲时间为  $t=0$ , 则系统再次发生碰撞前瞬间的无量纲时间为  $t_c = (2n\pi$

+ Δθ)/ω, 其中 Δθ = Δτ' - Δτ. 则系统在相邻两次碰撞时的边界条件可表示为:

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= x_{10} + \Delta x_{10}, x_1(t_e) = x_{10} + \Delta x'_{10}, x_2(0) = -b, x_2(t_e) = -b, \\
 \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_{10} + \Delta \dot{x}_{10}, \dot{x}_1(t_e) = \dot{x}_{10} + \Delta \dot{x}'_{10}, \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{2+} + \Delta \dot{x}_{2+}, \dot{x}_2(t_e) = \dot{x}_{2-} + \Delta \dot{x}'_{2-} \quad (13)
 \end{aligned}$$

综合式和(13), 则可得系统的 Poincaré 映射为:

$$\begin{cases}
 \Delta x'_{10} = f_1(\Delta x_{10}, \Delta \dot{x}_{10}, \Delta x_{2+}, \Delta \tau) \\
 \Delta \dot{x}'_{10} = f_2(\Delta x_{10}, \Delta \dot{x}_{10}, \Delta x_{2+}, \Delta \tau) \\
 \Delta x'_{2+} = f_3(\Delta x_{10}, \Delta \dot{x}_{10}, \Delta x_{2+}, \Delta \tau) \\
 \Delta \tau' = f_4(\Delta x_{10}, \Delta \dot{x}_{10}, \Delta x_{2+}, \Delta \tau)
 \end{cases} \quad (14)$$

### 2 两自由度碰撞系统的 Hopf 分岔

设系统参数(1):  $b = 0, \mu_m = 1, \mu_c = \mu_k = 3, \zeta = 0, R = 0.6, f_{20} = 0$ , 并选取激振频率  $\omega$  作为分岔参数, 图 2 为这组参数下的全局分岔图. 通过计算 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵在不动点处的特征值可知: 当  $\omega \in [3.6, 3.85797)$ , 系统做周期运动. 当  $\omega = 3.85797$  时, 系统有一对共扼复特征值同时穿越单位圆, 碰撞振动系统的周期运动发生 Hopf 分岔, 形成概周期运动. 在 Poincaré 投影图表现为吸引不变环, 如图 3(a); 随着  $\omega$  的进一步增大吸引不变环开始振荡, 如图 3(b); 随后形成锁相, 如图 3(c); 并最终形成混沌, 如图 3(d).

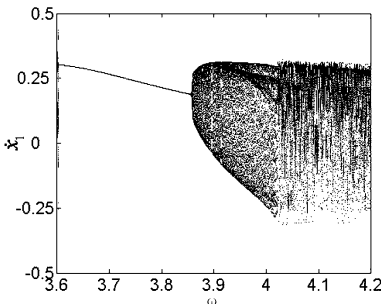


图2 全局分岔图

Fig. 2 Global bifurcation diagram

取定参数(2):  $b = 0, \mu_m = 0.5, \mu_c = \mu_k = 0.5, \zeta = 0, R = 0.2, f_{20} = 0$ . 我们考虑系统的 1/1 周期运动, 当  $\omega = 5.22090$  时系统有一对共扼复特征值同时穿越单位圆. 此时, 系统的稳定焦点图 4(a) 向 1/1 点的吸引不变圈转化, 图 4(b)、图 4(c); 随着  $\omega$  的进一步增大, 当  $\omega = 5.288$  时, 1/1 点的吸引不变圈失去稳定性并形成稳定的 8/8 点的吸引不变圈, 图 4(d); 随后, 8/8 点的吸引不变圈破裂如图 4

(e), 并再次转化成 1/1 点的吸引不变圈, 如图 4(f); 当  $\omega = 5.2981$  时, 1/1 点的吸引不变圈开始倍化形成 2 个 1/1 点的吸引不变圈, 如图 4(g)、图 4(h); 最终形成混沌, 如图 4(i).

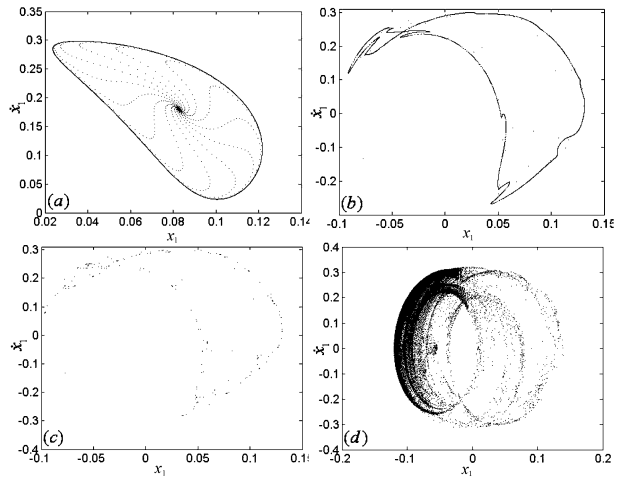


图3 系统参数(1)下的 Poincaré 投影图

(a) : ω = 3.88, (b) : ω = 4.01, (c) : ω = 4.015, (d) : ω = 4.05

Fig. 3 Projected Poincaré sections of the system with parameters (1)

(a) : ω = 3.88, (b) : ω = 4.01, (c) : ω = 4.015, (d) : ω = 4.05

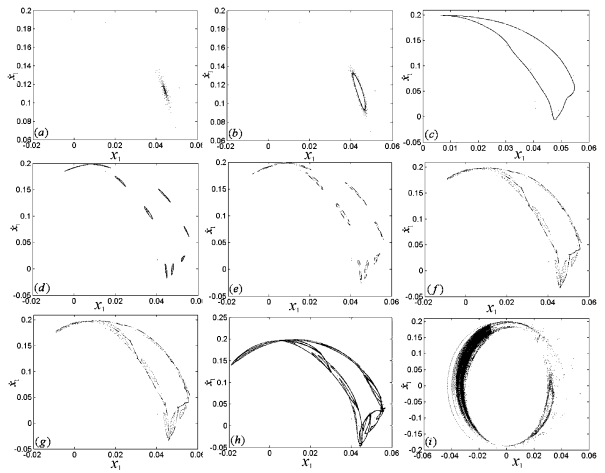


图4 系统参数(2)下的 Poincaré 投影图

(a) : ω = 5.22089 (b) : ω = 5.225

(c) : ω = 5.27 (d) : ω = 5.288, (e) : ω = 5.2892

(f) : ω = 5.2896 (g) : ω = 5.2981 (h) : ω = 5.2995 (i) : ω = 5.395

Fig. 4 Projected Poincaré sections of the system with parameters (2)

(a) : ω = 5.22089, (b) : ω = 5.225,

(c) : ω = 5.27, (d) : ω = 5.288, (e) : ω = 5.2892,

(f) : ω = 5.2896, (g) : ω = 5.2981, (h) : ω = 5.2995, (i) : ω = 5.395

### 3 结论

本文通过选取适当的 Poincaré 截面, 建立了一类两自由度含间隙系统的 Poincaré 映射, 并得到利

用 Poincaré 映射数值证明了 Hopf 圈的存在性,并数值研究了该系统通过 Hopf 分岔向混沌演化的过程. 数值结果表明:系统可以通过  $1/1$  点的吸引不变圈— $8/8$  点的吸引不变圈— $1/1$  点的吸引不变圈,并最终通过倍化通向混沌. 此外,通过分析系统参数变化对系统动力学行为的影响,为系统的动力学优化设计提供了理论依据.

## 参 考 文 献

- 1 赵凯华. 定性及半定量物理学. 北京:高等教育出版社, 1991 (Zhao Kaihua. Qualitative & Semi-Quantitative physics. Beijing: Higher Education Press, 1991 (in Chinese))
- 2 Whiston G S. Singularities in vibro-impact dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 152(3):427~460
- 3 D. J. Wagg. Rising phenomena and the multi-sliding bifurcation in a two-degree of freedom impact oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22:541~548
- 4 Aidanpää J O, Gupta R B. Periodic and chaotic behaviour of a threshold-limited two-degree-of-freedom system. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 165(2):305~327
- 5 谢建华, 郑小武. 惯性式振动落砂机周期运动的 Hopf 分叉. 振动工程学报, 1999, 12(3):297~303 (Xie Jianhua, Zheng Xiaowu. Hopf bifurcation of periodic motions in the inertial shaker. *Journal of Vibration Engineering*, 1999, 12(3):297~303 (in Chinese))
- 6 Luo Guanwei, Xie Jianhua. Hopf bifurcations of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(3):391~480
- 7 Luo Guanwei, Xie Jianhua. Bifurcations and chaos in a system with impacts. *Physica D*, 2001, 148:183~200
- 8 林梅, 丁旺才, 武俊虎. 两点碰撞振动系统的周期运动与分叉. 动力学与控制学报, 2006, 4(1):16~21 (Lin Mei, Ding Wangcai, Wu Junhu. Periodic motion and bifurcation of a vibro-impact system with two motion limiting constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1):16~21 (in Chinese))

# THE HOPF BIFURCATION OF A TWO-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEM WITH CLEARANCE\*

Zhou Wei Chu Yandong Yu Jianning Li Zhiping

(School of Mathematics, Physics and Software Engines Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract** A mechanical model of two-degree-of-freedom system with clearance was established, whose periodic motion and disturbed motion were studied. The Poincaré mapping of the system was established by selecting the appropriate Poincaré section and the periodic conditions of vibro-impact. The existence of Hopf circle was proved by Poincaré mapping numerically. The route to chaos through Hopf bifurcation and period-doubling bifurcation of this system was revealed. Finally, the impact of the system parameters on the dynamical behaviors of this system was analyzed, and the theoretical criterion for the optimal design of dynamical systems was found.

**Key words** system with clearance, Poincaré mapping, periodic motion, Hopf bifurcation