

# 具有主共振耦合振子的混沌相位同步\*

刘勇<sup>1,2</sup> 王作雷<sup>2</sup> 毕勤胜<sup>2</sup>

(1. 盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224009) (2. 江苏大学理学院, 镇江 212013)

**摘要** 通过引入混沌运动的相位定义分析了线性和非线性耦合参数对两个主共振子系统之间的混沌相位同步的影响. 讨论了在严格 1:1 内共振条件下, 两子系统不同步、不完全相位同步和完全相位同步之间的演化过程, 揭示了不同状态相互转化与 Lyapunov 指数变化之间的关系, 指出随着线性耦合力的增加, 相位同步效应增强, 然而随着非线性耦合力的增加, 相位同步效应减弱.

**关键词** 相位同步, Rössler 振子, 耦合, Lyapunov 指数

## 引言

自 1990 年美国海军实验室的学者 Pecora 和 Carroll 在非线性电子线路中发现混沌同步效应以来<sup>[1]</sup>, 耦合系统中的混沌同步理论及其应用引起了各国学者的广泛关注, 成为当前非线性领域的热点课题之一<sup>[2]</sup>. 人们从理论分析、数值计算及实验等多个角度深入探讨了不同领域中耦合系统混沌同步的本质特征, 取得了大量的成果<sup>[3-7]</sup>, 诸如耦合神经网络, 电子线路系统, 生物系统以及激光系统等等<sup>[8-15]</sup>. 随着研究工作的不断深入, 混沌同步的概念也从完全同步拓展到广义混沌同步, 尤其是弱耦合下的混沌相位同步<sup>[16,17]</sup>. 由于混沌运动的相位不能直接从其时间历程上得到, 人们提出了一些方法从混沌信号的时间历程上计算混沌运动的相位, 如 Gabor<sup>[18]</sup> 提出了基于信号分析方法计算混沌信号的振幅和相位. 近年来, Rosenblum, Pikovsky 和 Kurths 等人提出了基于 Poincare 映射的计算混沌信号相位的方法<sup>[19]</sup>, 其公式为

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi(t - t_k) / (t_{k+1} - t_k), \quad t_k < t < t_{k+1} \quad (1)$$

其中  $t_k$  和  $t_{k+1}$  分别表示第  $k$  次和第  $k+1$  次与 Poincare 截面相交的时间. 混沌运动相位的平均增长率可表示为

$$\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi N / t(N) \quad (2)$$

其中  $t(N)$  表示相点第  $N$  次相交到 Poincare 截面时所需要的时间. 如果  $|n\phi_1 - m\phi_2| < const.$ , 则产生

$n:m$  的混沌相位同步.

本文探讨两 Rössler 系统在线性尤其是在非线性耦合下的混沌相位同步.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1 + \varepsilon_1(x_2 - x_1) + \varepsilon_2(x_2^2 - x_1^2), \\ \dot{y}_1 = \omega_1 x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 = f + z_1(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon_1(x_1 - x_2) + \varepsilon_2(x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z}_2 = f + z_2(x_2 - c) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $a = 0.15, f = 0.2, c = 10.0$  是为了保证参与耦合的两子系统产生混沌现象. 参数  $\omega_1, \omega_2$  分别表示两个 Rössler 系统的固有频率,  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  表示耦合力. 本文考虑两子系统在  $\omega_1, \omega_2$  等于 1:1 时两子系统之间的相位同步效应. 定义  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别表示两子系统状态变量的平均频率, 同时令

$$\Delta\omega = \Omega_1 - \Omega_2 \quad (4)$$

表示两子系统在固有频率比为 1:1 情形下的平均频率的差值.

## 1 线性耦合振子相位同步

为了研究两个固有频率比  $\omega_1, \omega_2$  为 1:1 的混沌相位同步, 取  $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$ , 这说明两个子系统的固有频率是一致的. 两个 Rössler 系统的平均频率可根据公式(2)直接计算, 即在单位时间内系统振动的数目. 两个子系统的平均频率差随着耦合力

$\varepsilon_1$  变化如图 1 所示. 图 1 给出了两个 Rössler 系统同步的典型区域 (见图 1), 即  $\Delta\omega$  随着耦合力  $\varepsilon_1$  的增加趋近于零, 即两个子系统的平均频率比锁定在 1:1, 也就是说, 两个 Rössler 系统相位同步. 当  $\varepsilon_1 < -0.023$  时, 两个 Rössler 系统平均频率差有小的波动, 说明两个子系统的平均频率存在小的差异.

为了揭示混沌相位同步的本质, 图 2 给出了耦合 Rössler 系统四个较大的 Lyapunov 指数随着耦合力  $\varepsilon_1$  变化关系. 当  $\varepsilon_1 < 0.105$  时, 耦合系统几乎总有两个正的、一个零和一个负的 Lyapunov 指数, 除了两个小区域  $\varepsilon_1 \in [-0.004, -0.001]$  和  $\varepsilon_1 \in [0.0275, 0.0325]$  外, 这两个小的区域对应于耦合 Rössler 系统的周期窗口.

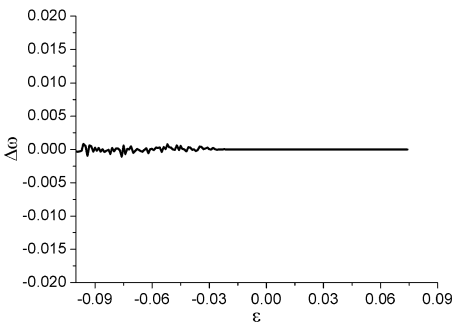


图 1 平均频率差

Fig. 1 Mean frequency difference

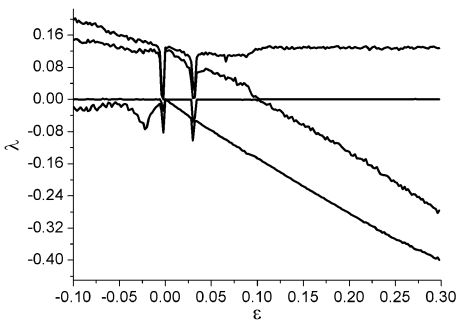


图 2 四个较大的 Lyapunov 指数

Fig. 2 Four large Lyapunov exponents

当  $\varepsilon_1 < -0.023$  时, 负的 Lyapunov 指数波动较大, 说明混沌吸引子在相空间的各个方向上收缩较快, 导致两个 Rössler 振子的相位有小的差异. 然而, 当  $\varepsilon_1 > -0.023$  时, 负的 Lyapunov 指数变化相对缓慢, 说明随着耦合力  $\varepsilon_1$  的增加, 混沌吸引子在相空间的各个方向上变化是一致的, 从而两个 Rössler 振子之间产生相位同步效应. 进一步, 当  $\varepsilon_1 > 0.103$  时, 耦合系统中有一个正的 Lyapunov 指数变为负的, 说明耦合系统的运动从超混沌状态过渡

到简单混沌状态, 最终两个 Rössler 系统的相位保持一致.

这个现象也可从扩散云来说明 (见图 3). 当  $\varepsilon_1 = -0.04$  时, 耦合的 Rössler 系统的相点分布在相空间的两个矩形区域内 (见图 3a), 然而, 当耦合力  $\varepsilon_1$  增加时, 耦合系统的相点逐渐集中到一个相对小的区域 (见图 3b), 这个小区域最终收缩到一条直线, 对应于锁相动力学 (见图 3c). 这说明两个 Rössler 振子随着耦合力  $\varepsilon_1$  的增加由从不完全相位同步向完全相位同步过渡.

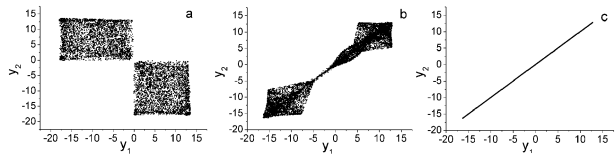


图 3 扩散云

Fig. 3 Diffuse clouds

## 2 非线性耦合振子相位同步

两个子系统固有频率比为 1:1 的耦合系统, 其相位的变化可能会受到非线性耦合力的影响, 本节主要讨论在 1:1 情形下, 参数  $\varepsilon_2$  如何对相位同步产生影响.

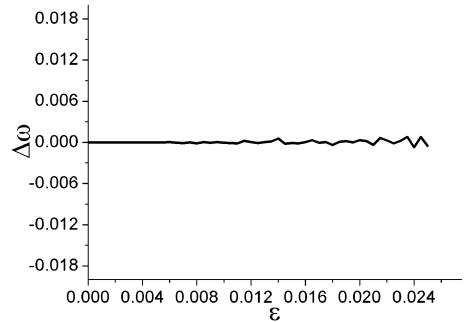


图 4 平均频率差

Fig. 4 Mean frequency difference

两个子系统的平均频率差随参数  $\varepsilon_2$  变化曲线见图 4. 从图 4 可以看出耦合 Rössler 系统的同步区域. 当  $\varepsilon_2 < 0.0083$ ,  $\Delta\omega$  接近于 0, 即两个子系统的平均频率比锁定在 1:1, 也就是说两个 Rössler 系统的平均频率比等于两个 Rössler 系统的固有频率比, 这说明两个 Rössler 系统之间存在相位同步效应. 当  $\varepsilon_2 > 0.0083$  时, 平均频率差曲线存在小的波动, 这说明两个 Rössler 振子之间的相位存在差异, 即当  $\varepsilon_2 > 0.0083$  时, 两个 Rössler 系统之间相位同步效应消失.

图 5 给出了非线性耦合的 Rössler 系统四个较大的 Lyapunov 指数随耦合参数  $\varepsilon_2$  变化的曲线. 当  $\varepsilon_2 < 0.00175$  时, 除了一个很小的区域  $\varepsilon_2 \in [0.00158, 0.00172]$  外, 第三个 Lyapunov 指数很快地变为负数, 且其值非常小; 除了两个很小的区域  $\varepsilon_2 \in [0.0009, 0.0011]$  和  $\varepsilon_2 \in [0.00158, 0.00172]$  外, 第四个 Lyapunov 指数是负数, 且其值也非常小. 当  $0.00175 < \varepsilon_2 < 0.0083$  时, 第三个 Lyapunov 指数变为零, 第四个 Lyapunov 指数仍然负数, 这说明两个子系统混沌相位同步. 进一步的研究说明: 当  $\varepsilon_2 > 0.0083$  时, 第三个 Lyapunov 指数变为正的, 两个子系统的平均频率差有明显的波动, 导致两个振子的相位不一致, 即当  $\varepsilon_2$  增加时, 两个子系统的相位由相位同步向不同步转化.

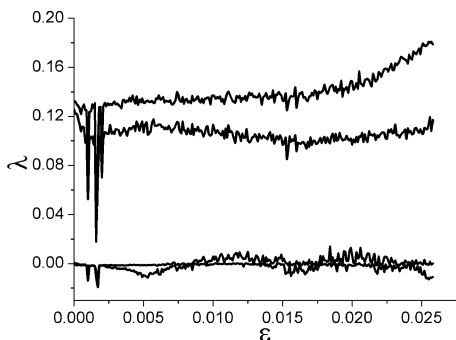


图 5 4 个较大的 Lyapunov 指数

Fig. 5 The four larger Lyapunov exponents

非线性耦合系统的混沌相位动力学也可以从扩散云得到证实 (见图 6). 当  $\varepsilon = 0.0002$ , 相点分布在吸引子的周围 (见图 6a), 然而随着  $\varepsilon_2$  的增加, 相点几乎分布到相平面某个确定的矩形区域 (见图 6b), 这说明两个振子的相位差随着时间的增加趋于无穷, 这也证实了两个子系统相位不同步. 总之, 随着非线性耦合力  $\varepsilon_2$  的增加, 耦合系统的同步效应被减弱.

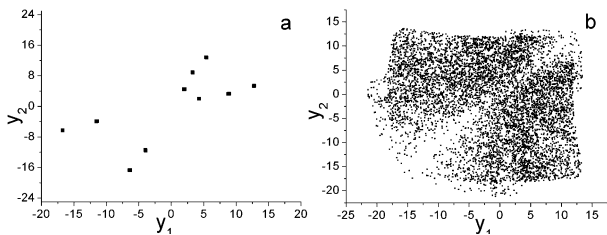


图 6 扩散云

Fig. 6 Diffuse clouds

### 3 一般耦合振子相位同步

本节讨论参数  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  对耦合系统相位同步

的影响.

#### 3.1 情形 (A) $\varepsilon_2 = 0.005$

当非线性耦合力  $\varepsilon_2 = 0.005$  时, 两个 Rössler 系统的平均频率差随着线性耦合力  $\varepsilon_1$  变化关系如图 7 所示. 从图 7 可以看出随着线性耦合参数  $\varepsilon_1$  的增加,  $\Delta\omega$  接近与零, 即两个 Rössler 系统的平均频率比锁定在 1:1, 这说明线性耦合参数  $\varepsilon_1$  在一定条件下, 耦合系统可能产生混沌同步现象. 当  $\varepsilon_1 < 0.0$  时, 两个 Rössler 系统的平均频率差有小的波动, 即两个 Rössler 系统的相位差尽管很小, 但是两个 Rössler 系统的相位仍然不一致.

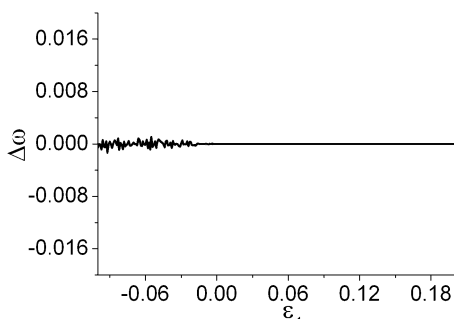


图 7 平均频率差

Fig. 7 Mean frequency difference

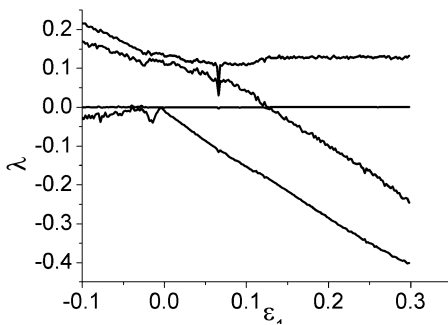


图 8 4 个较大的 Lyapunov 指数

Fig. 8 The four larger Lyapunov exponents

当非线性耦合力  $\varepsilon_2 = 0.005$  时, 耦合系统的四个较大的 Lyapunov 指数随线性耦合力  $\varepsilon_1$  变化曲线如图 8 所示. 从图 8 可知当  $\varepsilon_1 < 0.125$  时, 耦合系统几乎总有两个正的、一个零和一个负 Lyapunov 指数. 进一步研究发现: 当  $\varepsilon_1 < 0.0$  时, 耦合系统负的 Lyapunov 指数有关键性的波动, 说明混沌吸引子在相应空间各个方向上的变化很快, 导致两个 Rössler 系统之间的相位不一致. 然而, 当  $\varepsilon_1 > 0.0$  时, 耦合系统负的 Lyapunov 指数变化相对光滑, 意味着随参数  $\varepsilon_1$  的增加, 吸引子在相空间上的变化几乎是一致的, 即耦合系统是不完全相位同步的.

而且,当  $\varepsilon_1 > 0.125$  时,耦合系统原来两个正的 Lyapunov 指数中的一个变为负的,这说明耦合系统从超混沌状态向简单混沌转化,两个 Rössler 系统的相位完全一致.

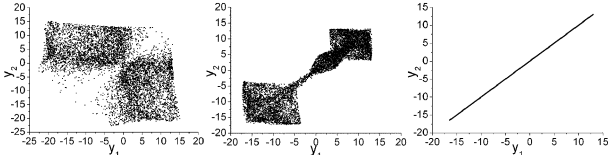


图9 扩散云  
Fig.9 Diffuse clouds

这个现象也可以从扩散云得到证实,见图9. 当  $\varepsilon_1 = -0.05$  时,耦合系统的投影点固定在相空间的两个矩形区域内(见图9a),当线性耦合力  $\varepsilon_1$  增加时,耦合系统的相点集中到一个相对小的区域里(见图9b),随着线性耦合力  $\varepsilon_1$  的继续增加,耦合系统的相点最终收敛到一条直线上(见图9c),即两个子系统的相位锁定,说明两个 Rössler 系统从不完全相位同步向完全相位同步变化.

3.2 情形 (B)  $\varepsilon_2 = 0.02$

当非线性耦合力  $\varepsilon_2$  增加到 0.02 时,  $\varepsilon_1 \in [0.0, 0.151]$ , 两个 Rössler 系统的相位是不一致(见图10),即耦合系统是不同步的. 当线性耦合力  $\varepsilon_1$  增加时,耦合系统的平均频率差波动的幅值变小;当  $\varepsilon_1 > 0.151$  时,耦合系统的平均频率差趋近于零,即在  $\varepsilon_1 = 0.025$  处,耦合系统从不同步向不完全相位同步转化,对应于耦合系统一个正的 Lyapunov 指数变为负的(见图11). 耦合系统在  $\varepsilon_1 = 0.182$  处,从不完全相位同步向完全相位同步转化,对应于耦合系统的另一个正的 Lyapunov 指数变为负的(见图11).

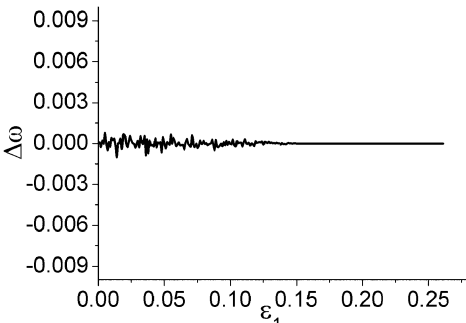


图10 平均频率差  
Fig.10 Mean frequency difference

耦合系统的扩散云图也证实了耦合系统从不同步向不完全相位同步变化,直至完全相位同步(见图

12),这不仅与耦合系统相位差的变化图(见图10)一致,而且与 Lyapunov 指数变化和同步现象之间的关系一致.

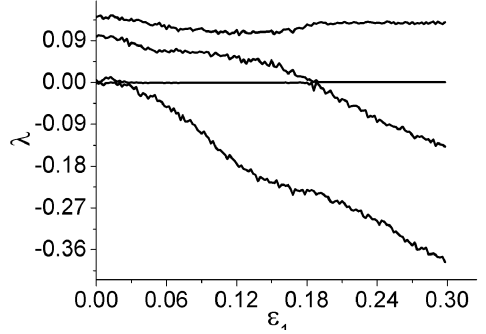


图11 4个较大的 Lyapunov 指数  
Fig.11 The four larger Lyapunov exponents

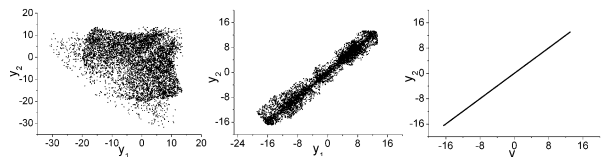


图12 扩散云  
Fig.12 Diffuse clouds

3.3 情形 (C)  $\varepsilon_1 = 0.05$

当线性耦合力  $\varepsilon_1 = 0.05$  时,  $\varepsilon_2 < 0.012$ , 两个 Rössler 系统的平均频率差接近于零(见图13),即耦合系统相位同步. 然而,当  $\varepsilon_2 > 0.012$  时,两个 Rössler 系统的平均频率差有小的波动,波动的振幅随非线性耦合力  $\varepsilon_2$  的增加而变大,说明耦合系统在临界值  $\varepsilon_2 = 0.012$  处,从相位同步向不同步转化,对应于耦合系统的负的 Lyapunov 指数在这一点达到最小值(见图14).

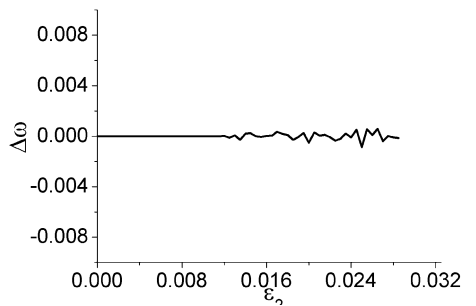


图13 平均频率差  
Fig.13 Mean frequency difference

当耦合系统相位同步时,其扩散云的相点集中到一个相对紧的区域(见图15a),随着参数  $\varepsilon_2$  的增加,耦合系统的相点分散到  $(y_1, y_2)$  平面的某个确定的区域里(见图15b),即两个 Rössler 系统的相位差

随时间的增加趋于无穷大,这说明两个 Rössler 系统是不同步的.

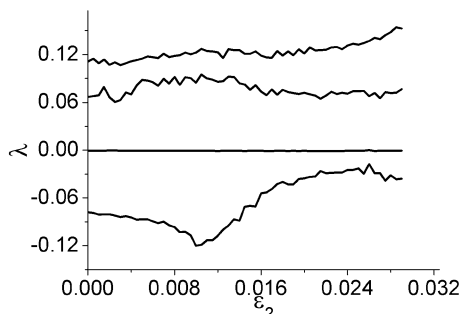


图 14 4 个最大的 Lyapunov 指数

Fig. 14 The four large Lyapunov exponents

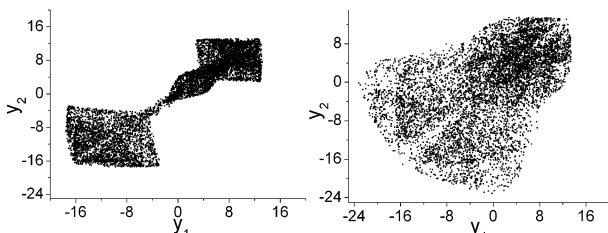


图 15 扩散云

Fig. 15 Diffuse clouds

线性、非线性耦合对耦合系统的相位同步影响是完全不同的,即随着线性耦合力  $\varepsilon_1$  的增加,两个子系统的相互作用导致耦合系统相位同步效应增强;然而随着非线性耦合力  $\varepsilon_2$  的增加,两个子系统的相互作用导致子系统之间的平均频率不一致,即随着非线性耦合力  $\varepsilon_2$  的增加,耦合系统的相位同步效应减弱.

## 4 结论

两个主共振子系统在一定的耦合条件下产生混沌相位同步现象,耦合系统相位同步的变化涉及到不同的相位动力学行为.进一步地,相位同步的产生与混沌结构有关,可以通过耦合系统的 Lyapunov 指数变化得到证实.耦合对相位动力学的影响,尤其对同步的影响,与周期激励系统相比是完全不同的,即随着线性耦合力的增加,相位同步效应增强,而随着非线性耦合力的增加,相位同步效应先增强后减弱.

## 参 考 文 献

- 1 L. M. Pecora and T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64: 821 ~ 824
- 2 A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths. Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences. New York: Cambridge University, 2001
- 3 谭宁, 徐健学, 陈永红, 洪灵. 双同步混沌吸引子动力系统 中的筛形域. *力学学报*, 2003, 35 (3): 310 ~ 316 (Tan Ning, Xu Jianxue, Chen Yonghong, Hong Ling. Riddled basins in dynamical systems with two synchronized chaotic attractors. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35 (3): 310 ~ 316 (in Chinese))
- 4 X Shi and Q S Lu. Firing patterns and complete synchronization of coupled Hindmarsh – Rose neurons. *Chin. Phys.*, 2005, 14: 77 ~ 85
- 5 B Samuel. Stability analysis for the synchronization of chaotic systems with different order: application to secure communication. *Phys. Lett. A*, 2004, 326: 102 ~ 113
- 6 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. *动力学与控制学报*. 2006. 4 (1): 1 ~ 4 (Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006. 4 (1): 1 ~ 4 (in Chinese))
- 7 王兴元, 古利孜拉, 王明军. 单向耦合混沌同步及其在保密通讯中的应用. *动力学与控制学报*, 2008, 6 (1): 40 ~ 44 (Wang Xingyuan, Gulzila, Wang Mingjun. Chaos synchronization via unidirectional coupling and its application to secure communication. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6 (1): 40 ~ 44 (in Chinese))
- 8 S H Zhang, K Shen. Generalized synchronization of chaos in erbium – doped dual – ring laser. *Chinese Physics*, 2002, 11: 894 ~ 899
- 9 L Zhi, J S Si. Global synchronization of Chua's chaotic delay network by using linear matrix inequality. *Chinese Physics*, 2004, 13: 1221 ~ 1225
- 10 R C Elson, et al. Synchronous behavior of two coupled biological neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 5692 ~ 5695
- 11 B Blasius, A Huppert, L Stone, Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature*, 1999, 399: 354 ~ 359
- 12 E Rosa, W Pardo, C M Ticos, J A Walkenstein, M Monti. Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube. *Int. J. Bifur. Chaos*, 2000, 10: 2551 ~ 2563
- 13 E Larinotsev. Phase synchronization of periodic and chaotic states induced by external optical injection in semiconductor lasers. *Int. J. Bifur. Chaos*, 2000, 10: 2441 ~ 2446
- 14 S Taherion, Y C Lai, Experimental observation of lag synchronization in coupled chaotic systems. *Int J Bifur. Chaos*,

- 2000,11;2587 ~ 2594
- 15 M Palus, J Kurths, U Schwarz, D Novotna, I Charvatova, Is the solar activity cycle synchronization with the solar inertial motion. *Int. J Bifur. Chaos*, 2000, 10; 2519 ~ 2526
- 16 M G Rosenblum, A S Pikovsky, J Kurths. Phase Synchronization of Chaotic Oscillators. *Phys. Rev. Lett*, 1996, 76; 1804 ~ 1807
- 17 S Boccaletti, J Kurths, G Osipov, D L Valladares, C S Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physica Rep*, 2002, 336; 1 ~ 101
- 18 D Gabor. Theory of communication. *J. IEEE, London*, 1946, 93; 429 ~ 457
- 19 A Pikovsky, M G Roseblum, G Osipov and J Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D*, 1997, 104; 219 ~ 238

## PHASE SYNCHRONIZATION OF COUPLING OSCILLATORS WITH PRIMARY RESONANCE \*

Liu Yong<sup>1,2</sup> Wang Zuolei<sup>2</sup> Bi Qinsheng<sup>2</sup>

(1. School of mathematical science, Yancheng Teachers University, Yancheng 224009, China)

(2. Faculty of science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract** By introducing the conception of the phase for a chaotic motion, the influence of the linear and nonlinear coupling parameters on the phase synchronization of chaos between two sub – systems was explored. The evolution process from non – synchronized state to imperfect synchronization and further to perfect synchronization between two sub – systems with exact 1:1 internal resonance was discussed. Further investigation reveals that the transition between different phase states is related to the critical change of the Lyapunov exponents. It was pointed out that with the increase of the linear coupling strength, the effect of phase synchronization between two sub – systems was enhanced, while decayed as nonlinear coupling strength increased.

**Key words** phase synchronization, Rössler oscillator, coupling, Lyapunov exponent