

# 含有分叉的受控多体系统传递矩阵法

杨富锋 芮筱亭 展志焕

(南京理工大学, 动力工程学院, 南京 210094)

**摘要** 多体系统传递矩阵法是解决受控多体系统动力学问题的有效方法, 针对含有分叉的受控多体系统动力学问题, 分别建立了控制激励元件、控制反馈元件及其含有分叉的受控多体系统总体传递矩阵. 实例计算了无控和受控多体系统的运动响应与牛顿欧拉方法比较, 计算表明了受控多体系统传递矩阵法解决分叉控制系统运动的有效性.

**关键词** 多体系统传递矩阵法, 动力学, 控制, 分叉系统

## 引言

随着工程技术发展的需要, 近 40 年来, 国内外专家学者一直不懈努力, 不断创造性地提出和改进各种多体系统动力学方法, 如 Wittenburg 方法<sup>[1]</sup>、Schiehlen 方法<sup>[2]</sup>、Kane 方法<sup>[3]</sup>等, 这些方法极大地推动了现代工程技术的发展, 为解决各种机械系统动力学问题提供了多种有效地计算方法. 现行的各种多体系统动力学方法虽风格迥异, 但必须建立系统的总体动力学方程, 这一点也是所有多体系统动力学方法中带有各自印记的最精彩部分. 寻求高度程式化的方法, 已成为国内外学者普遍关注的理论和实际问题.

多体系统传递矩阵法是实用的工程动力学方法, 无需建立系统总体动力学方程, 解决了兵器、机器人、航空、航天、机械等国防和国民经济建设等诸多领域中以各种方式相联接的多个刚体和弹性体组成的复杂多体系统动力学快速建模与计算问题. 多体系统传递矩阵法系统解决了线性多体系统特征值的计算问题<sup>[4]</sup>. 多体系统离散时间传递矩阵法实现了用多体系统传递矩阵法解决多刚体系统动力学问题和多刚柔体系统动力学问题<sup>[5,6]</sup>. 传递矩阵法用于受控多跨机械臂的振动模态分析, 为多体系统传递矩阵法应用于受控多体系统提供了新思路<sup>[7]</sup>. 文献 8 中把受控元件作为多体系统的元件, 建立了受控线性多体系统传递矩阵法解决了无延迟受控链式线性多体系统动力学问题, 实现了用受

控线性多体系统传递矩阵法求解受控多体系统的稳态响应<sup>[8]</sup>. 文献 9 通过建立控制激励元件传递矩阵和控制反馈元件传递矩阵, 将控制变量写入状态矢量列阵中, 解决了链式延迟受控多体系统和无延迟受控多体系统动力学问题<sup>[9]</sup>.

闭环系统可以经过适当的切割化为分叉系统, 反馈和激励元件的不同位置使分叉受控多体系统具有不同的传递矩阵. 在文献 8 和 9 链式受控多体系统传递矩阵法的基础上, 作为多体系统传递矩阵法的新发展, 本文建立含有分叉的受控多体系统传递矩阵法, 实例计算表明了该方法对含有分叉的多体系统的有效性.

## 1 受控多体系统元件传递矩阵

多体系统元件的传递方程可写成如下形式

$$z_0 = Uz_1 \quad (1)$$

式中,  $U$  是传递矩阵,  $z_1, z_0$  是输入输出端的状态矢量. 线性系统的状态矢量中的状态变量用模态坐标表示, 形式如下

$$Z = [X \quad \Theta \quad M \quad Q]^T \quad (2)$$

式中,  $X, \Theta, M, Q$  分别表示线位移、角位移、内力矩和内力的模态坐标, 对有周期性外力作用的线性系统, 系统的稳态运动可用扩展传递矩阵来表示, 式 (2) 的状态矢量中增加单位 1.

离散时间传递矩阵法中状态矢量的状态变量用物理坐标表示, 状态矢量为

$$z = [x \quad \theta \quad m \quad q \quad 1]^T \quad (3)$$

式中,  $x, \theta, m, q$  分别表示位置、转角、内力矩和内力的物理坐标.

延迟控制系统, 控制力在当前时刻已知, 可视为与当前时刻的状态变量无关的外力列入传递矩阵中. 无延迟控制系统控制力与当前时刻状态相关, 将控制力作为状态变量列入状态矢量中. 定义含有控制力的状态矢量为

$$z = [x \quad \theta \quad m \quad q \quad u]^T \quad (4)$$

式中,  $u$  是控制力.

对无延迟控制系统, 引入控制激励元件和控制反馈元件. 图 1 中控制激励元件的传递方程可以写成

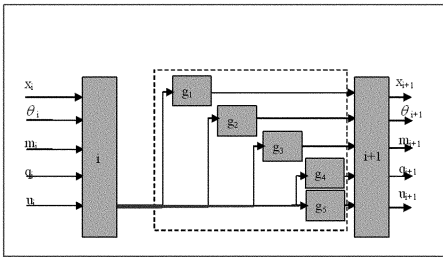


图 1 控制激励元件相互作用关系

Fig. 1 Control actuating element interaction interface

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \\ m \\ q \\ u \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ m \\ q \\ u \end{bmatrix}_i = T_G \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ m \\ q \\ u \end{bmatrix}_i \quad (5)$$

式中,  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  分别表征了被控元件状态变量与控制输入变量的传递关系.

图 2 中控制反馈元件的传递方程可以写成

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \\ m \\ q \\ u \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ m \\ q \\ u \end{bmatrix}_i = T_H \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ m \\ q \\ u \end{bmatrix}_i \quad (6)$$

式中,  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$  分别表征了反馈元件状态变量与控制力的传递关系. 若控制系统为带有参考输入的反馈控制, 即有外加控制力作用于系统, 参考输入作为外力列入受控元件的传递矩阵.

对于离散时间系统分叉系统, 未受控元件的传递矩阵形式为

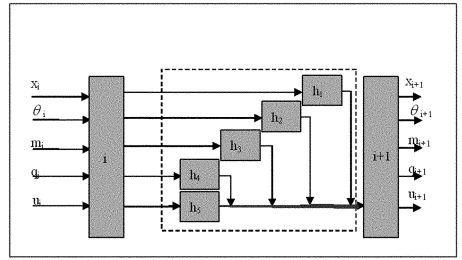


图 2 控制反馈元件相互作用关系

Fig. 2 Feedback control element interaction interface

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{m \times n} & 0_{m \times l} & U_{bm \times 1} \\ 0_{l \times n} & I_l & 0_{l \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times l} & 1 \end{bmatrix}_{(m+l+1) \times (n+l+1)}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (7)$$

式中  $l$  为系统中元件受控变量个数, 受控元件的传递矩阵中元素由无控时元件离散时间传递矩阵中的元素和单位阵  $I_l$  组成. 即

$$U_0 = \begin{bmatrix} U_{m \times n} & U_{bm \times 1} \\ 0_{l \times n} & 1 \end{bmatrix}_{(m+l) \times (n+l)} \quad (8)$$

为无控时元件离散时间传递矩阵.

对于线性时不变分叉系统, 未受控元件的传递矩阵形式为

$$U_2 = \begin{bmatrix} U_{m \times n} & 0_{m \times l} \\ 0_{l \times n} & I_l \end{bmatrix}_{(m+l) \times (n+l)}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (9)$$

式中  $l$  为系统中元件受控变量个数, 受控元件的传递矩阵中元素由无控时元件线性时不变传递矩阵中的元素和单位阵  $I_l$  组成. 即  $U_{m \times n}$  为线性时不变系统元件的传递矩阵.

如果系统存在外力, 其元件的传递矩阵形式为

$$U_i = \begin{bmatrix} U_{m \times n} & 0_{m \times l} & U_{fm \times 1} \\ 0_{l \times n} & I_l & 0_{l \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times l} & 1 \end{bmatrix}_{(m+l+1) \times (n+l+1)}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (10)$$

受控元件的传递矩阵中元素由无控时元件扩展传递矩阵中的元素和单位阵  $I_l$  组成. 即

$$U_0 = \begin{bmatrix} U_{m \times n} & U_{fm \times 1} \\ 0_{l \times n} & 1 \end{bmatrix}_{(m+l) \times (n+l)} \quad (11)$$

为线性时不变系统元件的扩展传递矩阵.

## 2 无控分叉多体系统动力学模型

图 3 所示的由若干个元件组成的分叉多体系统由多个子系统组成, 元件可以是体(刚体、弹性

体、集中质量)、铰(弹性铰、光滑铰、阻尼器)等. 元件  $1, \dots, i$  为基上的元件; 元件  $i_1, \dots, j$  为第一个分支上的元件, 元件  $j_1, \dots, n$  为第二个分支上的元件. 两个分支分别与基上的元件  $i$  相连.  $0$  为基的边界,  $j+1$  为第一个分支的边界,  $n+1$  为第二个分支的边界. 基和每一个分支可看作一个连接于分叉点的链式子系统. 实际上基元件组成的子系统也可以看作一个分支系统.

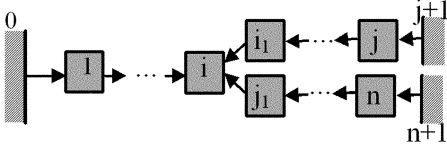


图3 分叉系统框图

Fig. 3 Branched system graph

若图3中的分叉系统为线性时不变系统, 元件的传递矩阵  $U_i, i = 1, \dots, n$ , 建立方法参见文献10. 若该分叉系统为线性时变系统, 则元件的传递矩阵建立方法参见文献5.

对于该分叉系统, 可以看作从边界点  $0, j+1, n+1$  向分叉点元件  $i$  进行传递, 传递方程为

$$z_{i+1} = U_i U_{i-1} \dots U_1 z_{0,1} \quad (12)$$

$$z_{i,i_1} = U_{i_1} \dots U_j z_{j,j+1} \quad (13)$$

$$z_{i,j_1} = U_{j_1} \dots U_n z_{n,n+1} \quad (14)$$

由分叉处元件状态矢量之间的关系得

$$U_i^{(1)} z_{i+1} = z_{i,i_1} \quad (15)$$

$$U_i^{(2)} z_{i+1} = z_{i,j_1} \quad (16)$$

可得无控分叉系统传递方程

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{21} & 0 & U_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0,1} \\ z_{j,j+1} \\ z_{n,n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

系统传递矩阵中,

$$U_{11} = U_i^{(1)} U_i \dots U_1$$

$$U_{12} = -U_{i_1} \dots U_j$$

$$U_{21} = U_i^{(2)} U_i \dots U_1$$

$$U_{23} = -U_{j_1} \dots U_n$$

### 3 受控分叉多体系统传递矩阵

如图4所示的分叉控制系统, 从一个分支上的第  $k$  个元件反馈后对基上的元件  $l$  进行控制.

控制传递关系为

$$z_{i+1,l} = U_l z_{l,l-1} + T_G T_H z_{k-1,k} \quad (18)$$

$$z_{k-1,k} = U_k \dots U_j z_{j,j+1} \quad (19)$$

$$z_{i,i_1} = U_{i_1} \dots U_k \dots U_j z_{j,j+1} \quad (20)$$

$$z_{i,j_1} = U_{j_1} \dots U_n z_{n,n+1} \quad (21)$$

$$z_{i+1} = U_i \dots U_{l+1} (U_l \dots U_1 z_{0,1} + T_G T_H U_k \dots U_j z_{j,j+1}) \quad (22)$$

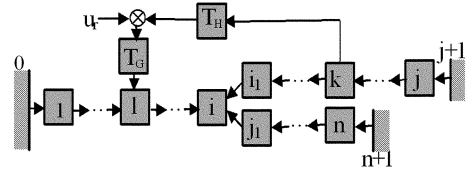


图4 分支到基座的控制图

Fig. 4 The control relation from branch to base

分叉系统的控制传递关系

$$U_i^{(1)} U_i \dots U_{l+1} U_l \dots U_1 z_{0,1} + (U_i^{(1)} U_i \dots U_{l+1} T_G T_H U_k \dots U_j - U_{i_1} \dots U_k \dots U_j) z_{j,j+1} = 0 \quad (23)$$

$$U_i^{(2)} U_i \dots U_{l+1} \dots U_1 z_{0,1} + (U_i^{(2)} U_i \dots U_{l+1} T_G T_H U_k \dots U_j z_{j,j+1} - U_{j_1} \dots U_m \dots U_n z_{n,n+1}) = 0 \quad (24)$$

由(15), (16), (18) ~ (22) 得分支到基座受控分叉系统, 系统总体传递方程为

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{0,1} \\ z_{j,j+1} \\ z_{n,n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

系统传递矩阵中,

$$U_{11} = U_i^{(1)} U_i \dots U_{l+1} U_l \dots U_1$$

$$U_{12} = U_i^{(1)} U_i \dots U_{l+1} T_G T_H U_k \dots U_j - U_{i_1} \dots U_k \dots U_j$$

$$U_{21} = U_i^{(2)} U_i \dots U_{l+1} \dots U_1$$

$$U_{22} = U_i^{(2)} U_i \dots U_{l+1} T_G T_H U_k \dots U_j$$

$$U_{23} = -U_{j_1} \dots U_m \dots U_n$$

因为基座和两个分支都可以看作链式子系统, 系统总传递方程描述了分叉系统任两个分支之间的控制传递关系.

## 4 受控分叉多体系统动力学问题求解

### 4.1 时不变系统动力学问题求解

对于时不变系统, 式(25)可写为

$$U_{all} Z_{all} = 0 \quad (26)$$

式中

$$U_{all} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \end{bmatrix}$$

$$Z_{all} = [Z_{0,1}^T \quad Z_{j,j+1}^T \quad Z_{n,n+1}^T]^T$$

根据系统边界条件, 记去掉  $Z_{all}$  中的零元素状

态矢量为  $\bar{Z}_{all}$ , 去掉  $U_{all}$  中与状态矢量  $Z_{all}$  中零元素对应的列得到方阵为  $\bar{U}_{all}$ . 则

$$\bar{U}_{all} \bar{Z}_{all} = 0 \quad (27)$$

$\bar{U}_{all}$  与系统的结构参数和固有频率  $\omega_k (k = 1, 2, 3, \dots)$  有关, 当系统结构参数确定后, 系统的固有频率  $\omega_k$  对应的行列式值为零, 即

$$\det \bar{U}_{all} = 0 \quad (28)$$

式(28)为系统的特征方程. 求解该特征方程, 即可得系统的固有频率  $\omega_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ . 在给定的归一化条件下, 求解对应于固有频率  $\omega_k$  的  $\bar{Z}_{all}$ , 即对应于系统边界的状态矢量  $Z_{0,1}, Z_{j,j+1}$  和  $Z_{n,n+1}$ . 根据控制传递关系式, 即可求得系统任一元件的状态矢量.

系统元件的体动力学方程可写为<sup>[10]</sup>

$$M_j v_{j,u} + C_j v_{j,i} + K_j v_j = f_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

式中,  $j$  为体元件编号,  $f_j$  为外力.

令

$$v_j = \sum_{k=1}^n V_j^k q^k(t) \quad (30)$$

对方程两边用增广特征矢量  $V^k$  作内积, 再对  $j$  累加, 利用增广特征矢量正交性得

$$\ddot{q}^k(t) + \frac{\sum_j \langle \sum_{k=1}^n (C_j V_j^k) \dot{q}^k(t), V_j^k \rangle}{d^k} + \omega_k^2 q^k(t) = \frac{\sum_j \langle f_j, V_j^k \rangle}{d^k} \quad (31)$$

式中  $d^k = \sum_j \langle M_j V_j^k, V_j^k \rangle$ .

采用数值积分法求出  $q^1, \dots, q^n$ , 代入(30), 即可求得物理坐标下系统的动力响应.

### 4.2 时变系统动力学问题求解

对于时变系统, 式(25)可写为

$$U_{all} Z_{all} = 0 \quad (32)$$

式中

$$U_{all} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \end{bmatrix}$$

$$z_{all} = [z_{0,1}^T \quad z_{j,j+1}^T \quad z_{n,n+1}^T]^T$$

根据系统边界条件, 求解系统传递方程, 根据控制传递关系式, 得到  $t_i$  时刻系统各连接点的状态矢量, 从而得到系统的运动.

### 5 数值算例

如图5所示受控分叉多体系统, 元件1、2、3、4

为空间弹簧, 元件5为刚体, 元件6、7、8为扭簧, 元件9、10、11为转子, 元件5为反馈元件. 通过元件5的状态变量反馈, 控制元件1、2、3、4的刚度, 进而控制元件5的运动. 弹簧1、2、3、4的刚度为

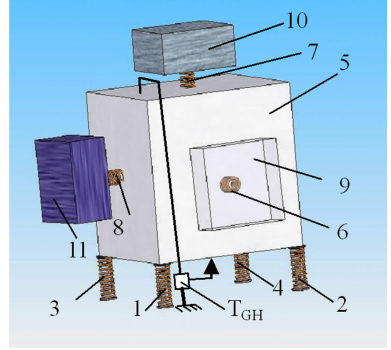


图5 分叉多体系统模型

Fig.5 Branched multibody system model

$$\begin{bmatrix} k_{1x} \\ k_{1y} \\ k_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \text{N/m} \\ 3000 \text{N/m} \\ 2000 \text{N/m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_{2x} \\ k_{2y} \\ k_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \text{N/m} \\ 2500 \text{N/m} \\ 2000 \text{N/m} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_{3x} \\ k_{3y} \\ k_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \text{N/m} \\ 2000 \text{N/m} \\ 4500 \text{N/m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_{4x} \\ k_{4y} \\ k_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \text{N/m} \\ 3000 \text{N/m} \\ 5000 \text{N/m} \end{bmatrix}$$

元件5的质量为2kg, 对几何中心的转动惯量为

$$J_5 = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix}$$

元件9的质量为0.2kg, 元件9、10、11旋转轴的转动惯量为0.0006kg·m<sup>2</sup>, 元件6、7、8的扭转刚度分别为  $k_6 = 1500 \text{N} \cdot \text{m/rad}$ ,  $k_7 = 1500 \text{N} \cdot \text{m/rad}$ ,  $k_8 = 1500 \text{N} \cdot \text{m/rad}$ . 取系统比例阻尼系数  $\alpha = 0.025, \beta = 0.05$ , 元件9、10、11受到外力矩的作用

$$M_x = 1.754 \sin(2\pi \times 37t) \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 1.754 \sin(2\pi \times 40t) \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 1.754 \sin(2\pi \times 43t) \text{N} \cdot \text{m}$$

采用角位移和角加速度作为反馈量, 控制形式为

$$h_x = -k_{a_x} \ddot{\theta}_{5x} - k_{d_x} \dot{\theta}_{5x}, h_y = -k_{a_y} \ddot{\theta}_{5y} - k_{d_y} \dot{\theta}_{5y}, h_z = -k_{a_z} \ddot{\theta}_{5z} - k_{d_z} \dot{\theta}_{5z}$$

控制参数

$$k_{ax} = 2e - 4, k_{dx} = 1000$$

$$k_{ay} = 3e - 4, k_{dy} = 2000$$

$$k_{az} = 4e - 4, k_{dz} = 3000$$

定义各联接点的状态矢量

$$Z_{0,1} = [X_{0,1}, Y_{0,1}, Z_{0,1}, Q_{x_{0,1}}, Q_{y_{0,1}}, Q_{z_{0,1}}]^T_{6 \times 1}$$

$$Z_{5,6} = [X_{5,6}, Y_{5,6}, Z_{5,6}, \theta_{x_5}, \theta_{y_5}, \theta_{z_5}, M_{x_{5,6}},$$

$$M_{y_{5,6}}, M_{z_{5,6}}, Q_{x_{5,6}}, Q_{y_{5,6}}, Q_{z_{5,6}}]^T_{12 \times 1}$$

$$Z_{9,0} = [\theta_9, M_9]^T_{2 \times 1}$$

$Z_{0,2}, Z_{0,3}, Z_{0,4}, Z_{5,1}, Z_{5,2}, Z_{5,3}, Z_{5,4}$  与  $Z_{0,1}$  有相同的形式,  $Z_{5,7}, Z_{5,8}$  与  $Z_{5,6}$  有相同的形式,  $Z_{10,0},$

$Z_{11,0}, Z_{9,6}, Z_{10,7}, Z_{11,8}$  与  $Z_{9,0}$  具有相同的形式.

同时定义

$$Z_{0,1-4} = [X_{0,1}, Y_{0,1}, Z_{0,1}, Q_{x_{0,1}}, Q_{y_{0,1}}, Q_{z_{0,1}}, \dots,$$

$$Q_{x_{0,4}}, Q_{y_{0,4}}, Q_{z_{0,4}}]^T_{24 \times 1}$$

$$Z_{5,6-8} = [X_{5,6}, Y_{5,6}, Z_{5,6}, \theta_{x_5}, \theta_{y_5}, \theta_{z_5}, Q_{x_{5,6}},$$

$$Q_{y_{5,6}}, Q_{z_{5,6}}, \dots, Q_{x_{5,8}}, Q_{y_{5,8}}, Q_{z_{5,8}}]^T_{24 \times 1}$$

应用本文上述的受控分叉多体系统传递矩阵法求解受控多体系统分叉动力学问题,无需建立系统的总体动力学方程,根据元件的传递关系和控制关系按序列写元件的传递方程后拼装系统总传递方程为

$$U_{all} Z_{all} = 0$$

式中

$$Z_{all} = [Z_{0,1-4}^T \quad Z_{5,6-8}^T \quad Z_{9,0}^T \quad Z_{10,0}^T \quad Z_{11,0}^T]^T$$

$$U_{all} = \begin{bmatrix} U_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_{21} & -U_{5,6-8}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_6^{(1)} & -U_9^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & U_7^{(1)} & 0 & -U_{10}^{(2)} & 0 \\ 0 & U_8^{(1)} & 0 & 0 & -U_{11}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$U_{11} = U_{1-4}^{(1)} (U_{1-4} + T_{GH} U_{5,6-8}^{(1)}) - U_{1-4}^{(2)}$$

$$U_{21} = -U_{5,6-8}^{(2)} (U_{1-4} + T_{GH} U_{5,6-8}^{(1)})$$

控制反馈元件和激励元件中元素

$$T_{G_x}(7, 23) = 1, T_{H_x}(23, 4) = h_x$$

$$T_{G_y}(8, 24) = 1, T_{H_y}(24, 5) = h_y$$

$$T_{G_z}(9, 25) = 1, T_{H_z}(25, 6) = h_z$$

$Z_{all}$  由系统边界点状态矢量组成,  $U_{all}$  为该系统总传递矩阵, 是  $24 \times 36$  矩阵.

根据系统边界条件

$$X_{0,j} = 0, Y_{0,j} = 0, Z_{0,j} = 0, j = 1, \dots, 4$$

$$M_9 = 0, M_{10} = 0, M_{11} = 0$$

记去掉  $Z_{all}$  中零元素的状态矢量为  $\bar{Z}_{all}$ , 去掉  $U_{all}$  中与状态矢量  $Z_{all}$  中零元素对应的列得到  $24 \times 24$  的方阵为  $\bar{U}_{all}$ . 则

$$\bar{U}_{all} \bar{Z}_{all} = 0$$

图6、图7和图8分别给出了元件5无控与受控时  $x$  向角速度时间历程、 $y$  向角速度时间历程和  $z$  向角速度时间历程的多体系统传递矩阵法和牛顿欧拉方法的比较. 图6-8中, NC-MS-TMM 为无控多体系统传递矩阵法, C-MS-TMM 为多体系统传递矩阵法求解受控多体系统, NC-Newton-Euler 为牛顿欧拉方法, C-Newton-Euler 为牛顿欧拉方法求解受控多体系统. 从图6-8可见, 元件5的角位移和角加速度作

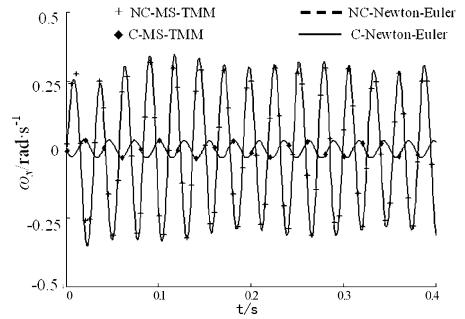


图6 元件5的  $x$  向角速度时间历程

Fig. 6 Time history of angel velocity x in element 5

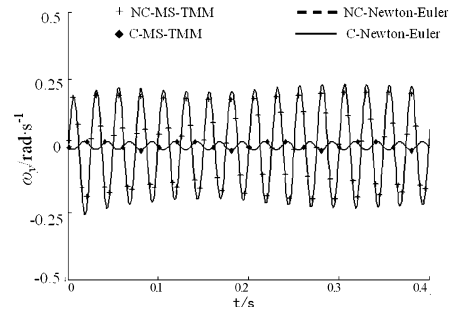


图7 元件5的  $y$  向角速度时间历程

Fig. 7 Time history of angel velocity y in element 5

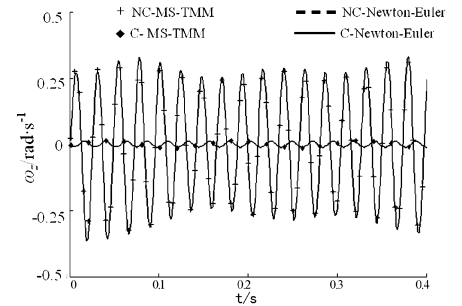


图8 元件5的  $z$  向角速度时间历程

Fig. 8 Time history of angel velocity z in element 5

为反馈量,对元件1-4进行控制,元件5的  $x, y, z$  向振动角速度幅值很快衰减到平衡位置. 受控传递矩阵法的仿真效果与牛顿欧拉方法的仿真效果具

有很好的-致性. 当系统从初始状态运动一定时间后,分叉受控系统稳态运动比无控系统稳态运动的振幅小,说明选择合适的控制参数,对受控分叉多体系统是非常重要的.

## 6 结论

本文作为多体系统传递矩阵法的新发展,建立了含有分叉的受控多体系统传递矩阵法. 实例计算表明,分叉受控多体系统传递矩阵法解决含有分叉的受控多体系统动力学问题与牛顿欧拉方法具有很好的一致性,表明含有分叉的受控多体系统传递矩阵法解决受控多体系统动力学有效. 无需建立系统的总体动力学方程,保持了多体系统传递矩阵法的建模灵活、程式化程度高等所有优点.

## 参 考 文 献

- 1 Jens Wittenburg. Dynamics of Systems of Rigid bodies. Stuttgart: B. G. Teubner, 1977
- 2 W. Schiehlen ed. Multibody Systems Handbook. Berlin: Springer - Verlag, 1990
- 3 T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Lexinson. Spacecraft Dynamics. New York: McGraw - Hill Book Company, 1983
- 4 Xiaoting Rui, Fengchang Qiu. Natural vibration of multibody gun system, International Symposium on Cannon and Gun Technology, Nanjing, China 1993: 494 ~ 502
- 5 Xiaoting Rui, Bin He, Yuqi Lu. Discrete Time Transfer Matrix Method for Multibody System Dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2005, 14: 317 ~ 344
- 6 何斌, 芮筱亭, 陆毓琪等. 舰炮发射动力学模块化建模方法. *动力学与控制学报*, 2004, 2(2): 34 ~ 37 (Bin He, Xiaoting Rui, Yuqi Lu, etc. A blocking method for launching dynamics of hipboard gun. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2): 34 ~ 37 (in Chinese))
- 7 Spring C. C. Hung and Cheng - I. Weng. Model analysis of controlled multilink systems with flexible link and joints. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1992, 3: 634 ~ 641
- 8 陆卫杰, 芮筱亭, 俞来峰. 受控线性多体系统传递矩阵法. *振动与冲击*, 2006, 25(5): 24 ~ 27 (Lu Weijie, Rui Xiaoting, Yun Laifeng, etc. Transfer matrix method of linear controlled multibody system. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(5): 24 ~ 27 (in Chinese))
- 9 杨富锋, 芮筱亭, 俞来峰. 受控多体系统传递矩阵法. *南京理工大学学报*, 2006, 30(4): 414 ~ 418 (Yang Fufeng, Rui Xiaoting, Yun Laifeng. Transfer matrix method of controlled multibody system. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2006, 30(4): 414 ~ 418 (in Chinese))
- 10 芮筱亭, 陆毓琪, 王国平. 多管火箭发射动力学仿真与试验测试方法. 北京: 国防工业出版社, 2003 (Rui Xiaoting, Lu Yuqi, Wang Guoping. Simulation and test methods of launch dynamics of multiple launch rocket system. Beijing: National Defense Industry Press, 2003 (in Chinese))

# THE TRANSFER MATRIX METHOD OF CONTROLLED MULTIBODY SYSTEM WITH BRANCH

Yang Fufeng Rui Xiaoting Zhan Zhihuan

(Institute of Power Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract** The transfer matrices method of multibody system is effective methods which solve the dynamics problem of controlled multibody system. The transfer matrices of control actuator element, control feedback element, other elements and overall transfer matrices of the controlled multibody system were developed to deal with the controlled multibody system with branch. The motion of the controlled multibody system with branch was computed by controlled multibody system transfer matrix method and Newton - Euler method. The computation show that the results obtained by controlled multibody system transfer matrix method is effective.

**Key words** transfer matrix method of multibody system, dynamics, control, branch system