第 6 卷第 3 期 2008 年 9 月
1672-6553/2008/06(3)/208-5

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 3
Sep. 2008

时滞影响下的环式耦合混沌神经元同步*

郑艳红[1,2]　陆启韶[1]

(1. 北京航空航天大学理学院,北京　100083)(2. 福建师范大学数学与计算机科学学院,福州　350007)

摘要　由于突触连接,神经元之间的信息传递普遍存在着时滞效应. 本文讨论时滞对四个环式耦合混沌 HR (Hindmarsh – Rose)神经元的同步动力学行为影响. 通过计算同步差,发现适当的时滞会诱发或增强混沌神经元间的完全同步,即时滞的作用使耦合系统在较小的耦合强度下存在稳定的同步状态. 进一步还发现时滞会诱发神经元间出现相位同步,增大在相同步窗口. 此外, 在完全同步出现可以观察到由时滞诱发的一些复杂现象,包括近似同步与相位同步之间的转迁等.

关键词　神经元,　环式耦合,　时滞,　同步

引 言

耦合振子系统的同步是非线性动力系统的一个基本现象. 它经常出现在许多物理、机械、通讯、生态和神经系统中,并且在振荡的集群行为中扮演着重要的角色[1]. 在耦合振子中发现了完全同步、相位锁定、滞后同步和广义同步等[2-8]. 然而,信息流在耦合系统中的传递并不都是瞬时的,因为信号传输的有限速度会产生有限的时滞. 在物理和生物系统中,时滞是普遍存在的. 时滞的出现,使得有限维的动力系统变为无穷维的系统,从而诱发了更复杂的动力特性,因此时滞耦合系统的非线性行为引起了许多学者的关注. 文献[9]研究了两个时滞信号耦合的 Rössler 振子间的相位同步. 两个电耦合 HR(Hindmarsh – Rose)神经元[10]和 ML (Morris – Lecar)神经元[11]通过一个有效地时滞在低耦合强度下能取得同步,并且在同步过程中耦合神经元的混沌运动会变成规则的周期行为. 当两个全同混沌系统受一不规则时滞信号调节时也会出现同步行为[12]. 此外,文献[13]揭示了带时滞耗散和脉冲耦合的 HH(Hodgkin – Huxley)系统的同步振动稳定性. 网络模型的研究指出时滞的相互作用还会导致一些有趣的现象[14].

在神经系统中,由于沿着神经轴突和化学突触中信号传输的有限的传播速度,时滞在神经信息传递中是固有的. 例如,实验表明通过无髓鞘轴突纤维,信号传输的速度为 1m/s,结果在脑皮层的网络里传播时造成了高达 80ms 的时滞. 本文以 HR 神经元模型为例,考虑时滞对四个环式耦合混沌 HR 神经元同步活动的影响. 不仅发现时滞可以增强混沌神经元间的同步,还观察到由时滞诱导的一些复杂动力学现象,如近似同步,相位同步等,这些结果对于深入研究时滞对神经元网络的同步和信息传递有参考价值.

1　具有时滞的环式耦合的 HR 神经元模型

HR 神经元模型是 Hindmarsh 和 Rose 根据蜗牛神经细胞的电压钳实验数据提出的[15]. 三个变量的 HR 神经元模型是描述神经元放电行为的数学表达. 它可用于模拟真实神经元中的峰放电、簇放电和混沌现象. 作为我们时滞神经元网络的单位振子,HR 神经元由如下运动方程表述:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = r[s(x - \chi) - z] \end{cases} \tag{1}$$

这里 x 代表神经细胞的膜电位,y 是与内电流(例如 N_a^+ 或 K^+) 相关的恢复变量,z 表示与 C_a^{2+} 激活的 K^+ 离子电流相关的慢变调节电流. a, b, c, d, r, s 以及 χ 都是系统参数,这里 $a = 1, b = 3, c = 1, d = 5, s = 4, r = 0.015, \chi = -1.6$. I_{ext} 表示外界直流激励. 当 $2.92 < I_{ext} < 3.40$ 时,系统表现多尺度的簇—峰放电的混沌行为. 本文取 $I_{ext} = 2.95$,这表明神经

2007-10-09 收到第 1 稿,2008-01-14 收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10432010,10702023,10702002),北京航空航天大学博士研究生创新基金资助项目

元是处于混沌状态.

现在我们考虑具有时滞的环式耦合的混沌 HR 神经元的同步行为. 一个神经元通过轴突侧支与中间神经元相连,中间神经元再反过来与该神经元发生突触联系,构成闭合环路,这种方式称为环状联系. 多个神经元之间通过电突触耦合,如果所有的神经元都只受到其最邻近的两个神经元的耦合作用,并且首尾的神经元相连形成一个环状结构,这种连接方式称为环式结构. 其结构示意图如图 1 所示. 它们的动力学行为由如下的时滞微分方程组来描述:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = y_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I_{ext} + g[x_2(t-\tau) + \\ \qquad x_n(t-\tau) - 2x_1(t)], \\ \dot{x}_i = y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_{ext} + g[x_{i+1}(t-\tau) + \\ \qquad x_{i-1}(t-\tau) - 2x_i(t)] \\ \dot{x}_n = y_n - ax_n^3 + bx_n^2 - z_n + I_{ext} + [x_{n-1}(t-\tau) + \\ \qquad x_1(t-\tau) - 2x_n(t)] \\ \dot{y}_j = c - dx_j^2 - y_j \\ \dot{z}_j = r(s(x_j - \chi) - z_j), 2 \leqslant i \leqslant n-1, 1 \leqslant j \leqslant n\end{cases} \tag{2}$$

这里 $g \geqslant 0$ 是耦合强度,下标 i(或 j)代表第 i(或 j)个神经元. 系统的参数取值与系统(1)相同,这表明 n 个神经元是全同的. 由方程(2)可以看出神经元是在经过时滞 τ 后接收到来自最邻近的两个神经元的信号.

下面取 $n=4$,考察时滞对四个环式耦合的混沌神经元间同步的影响.

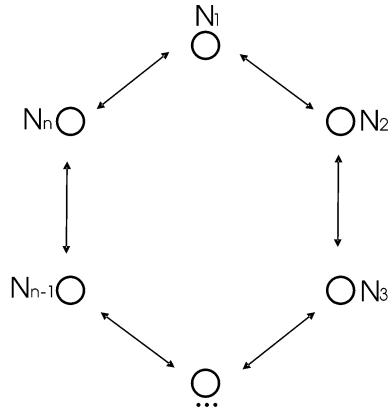

图 1　具有环式结构的神经元耦合系统示意图

Fig. 1　The coupled neural system with ring connection

2　时滞对电突触耦合神经元完全同步的诱发或增强作用

耦合系统的同步状态记为(x,y,z),则其动力学行为可由下面方程表述:

$$\begin{cases}\dot{x} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} + 2g[x(t-\tau) - x] \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = r[s(x-\chi) - z]\end{cases} \tag{3}$$

引入横截向量 $X^j_\perp = X^{j+1} - X^1$, $j=1,2,3$,并在状态 X^1 的同步流形处对系统(2)线性化,则可得

$$\begin{cases}\dot{x}_\perp = (-3ax_1^2 + 2bx_1)x_\perp + y_\perp - z_\perp + \\ \qquad 2g(x_\perp(t-\tau) - x_\perp) \\ \dot{y}_\perp = -2dx_1x_\perp - y_\perp \\ \dot{z}_\perp = rsx_\perp - rz_\perp\end{cases} \tag{4}$$

这里 $X^j_\perp = (x_\perp, y_\perp, z_\perp)$. 同步状态的稳定性是由系统(4)的 Lyapunov 指数决定的. 如果所有 Lyapunov 指数为负,则同步状态是稳定的. 这个条件可以由最大 Lyapunov 指数为负值来保证. 进一步,同步状态的稳定性可以由膜电位的平均同步差 $\| e \|$ 来验证. 膜电位的平均同步差定义为

$$\| e \| = \frac{1}{3}(|e_{11}| + |e_{21}| + |e_{31}|)$$

这里 $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}) = (x_{i+1} - x_1, y_{y+1} - y_1, z_{i+1} - z_1)$, $i=1,2,3$. 若 $\lim\limits_{t\to\infty} \max \| e \| = 0$,这意味着耦合系统完全同步的发生,即当 $t \to \infty$, $X^1 \to X^2 \to X^3 \to X^4$.

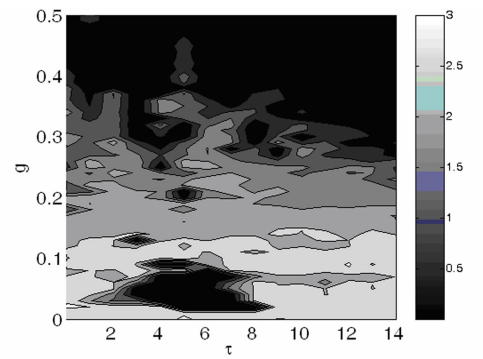

图 2　在参数平面上膜电位差最大值的变化

Fig. 2　The variation of the maximum of the membrane potential difference ||e|| in (τ, g) – parameter space

数值计算结果表明,当耦合强度 $g < 0.4$ 时,四个无时滞电突触耦合的 HR 神经元不能达到完全同步. 如果考虑了神经元信息传递过程中的时间滞后 τ,情况会有什么变化呢? 为此当时滞 τ 与耦合强度 g 变化时,我们计算最大膜电位差 $\| e \|$ 来判断四个耦合神经元的同步行为. 图 2 给出了环式耦

合下参数平面(τ,g)的最大膜电位差 $\|e\|$ 的变化. 它显示在不同时滞下不同的耦合强度使耦合系统达到同步的可能性. 由图 1 可以看到在参数平面(τ,g)上存在一些区域,这些区域里膜电位差 $\|e\|$ 的最大值趋向于零,这说明在这些区域里四个环式耦合神经元的完全同步有效地被增强.

现在考察耦合系统在有或无时滞的情况下达到完全同步时耦合强度的临界值. 为此我们计算膜电位差 $\|e\|$ 最大值随耦合强度 g 的变化,如图 3 所示. 由图 3 我们可以看到在没有时滞的情况下,只有当耦合强度大于 0.4 时,耦合神经元才能达到完全同步. 而当取时滞 $\tau=3$ 时,则只要耦合强度 $g>0.3$,膜电位差 $\|e\|$ 最大值就能趋于零. 这表明耦合系统达到完全同步时耦合强度临界值为 0.3. 达到完全同步所需的耦合强度临界值越小,就表明从一个神经元到其它神经元的信息传输越容易. 当耦合强度 $0.3<g<0.4$ 时,时滞 $\tau=3$ 使耦合系统由近似同步转化到完全同步,所以我们可以说时滞能增强耦合系统的同步.

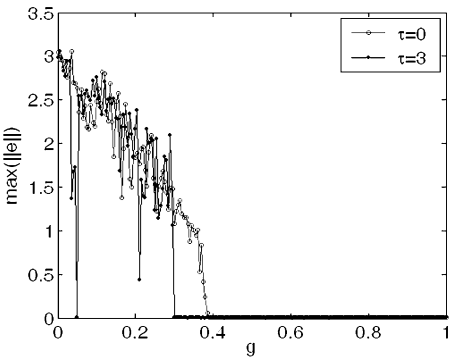

图 3 无时滞($\tau=0$)和具有时滞($\tau=3$)时,
最大膜电位差随耦合强度 g 的变化

Fig. 3 The maximum of the membrane potential difference $||e||$ versus the coupling strength for $\tau=0$ (without delay) and 3 (with delay)

为了清楚地看到时滞对耦合系统的影响,我们给出四个环式耦合的神经元在不考虑时滞($\tau=0$)和具有时滞($\tau=4$)两种不同情况下的膜电位相关图,如图 4 和图 5 所示. 我们是在相同的耦合强度 $g=0.05$ 下对两种情况进行比较的. 图 4(a)和图 5(a)分别画出系统 $\tau=0$ 和 $\tau=4$ 情况下神经元 1、神经元 2 和神经元 3 关于膜电位的空间相图; 图 4(b)和图 5(b)分别画出系统无时滞和具有时滞情况下神经元 2、神经元 3 和神经元 4 关于膜电位的空间相图. 由图 4 可以看出,当耦合强度为 0.05 时,不考虑神经元信息传输时滞时,四个环式耦合的神经元是不同步,但当传输时滞为 4 时,四个神经元就达到完全同步,如图 5 (a) 和 (b) 所示. 由此可见时滞诱发了神经元间的同步.

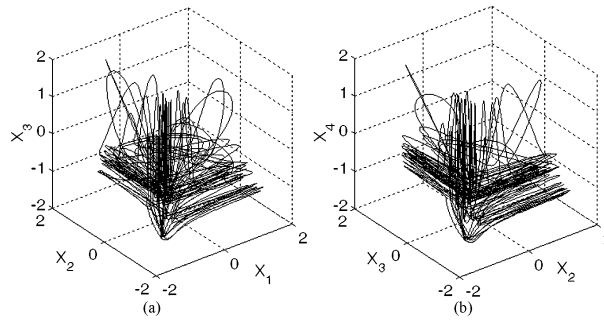

图 4 $g=0.05,\tau=0$ 情形:
(a) (x_1,x_2,x_3)的空间相图,(b) (x_2,x_3,x_4)的空间相图

Fig. 4 (a) The phase portrait in (x_1,x_2,x_3) – space, (b) the phase portrait in (x_2,x_3,x_4) – space for $g=0.05,\tau=0$

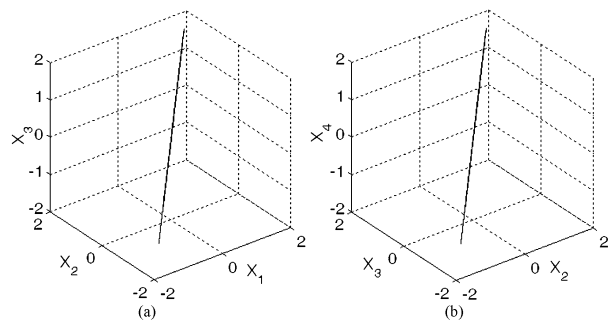

图 5 $g=0.05,\tau=4$ 情形:
(a) (x_1,x_2,x_3)的空间相图,(b) (x_2,x_3,x_4)的空间相图

Fig. 5 (a) The phase portrait in (x_1,x_2,x_3) – space, (b) the phase portrait in (x_2,x_3,x_4) – space for $g=0.05,\tau=4$

3 时滞诱发的耦合神经元间的相位同步

为了研究神经元耦合系统的相位同步,先定义神经元的相位. 假定每个神经元峰序列$\{t_n\}$的相位为

$$\phi(t)=2n\pi+2\pi\frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n},t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1} \qquad (5)$$

若瞬时的相位差$\Delta\phi(t)=n\phi_1(t)-m\phi_2(t)$满足$|\Delta\phi(t)|<const.$ 这里 m 和 n 为正整数,则称两个神经元是相位锁定的. 当 $m=n=1$ 时,则称两个神经元是相位同步的. 特别地,若两个神经元的相位差的最大值 $\max|\Delta\phi(t)|<2\pi$,则说明达到同步后,当其中一个神经元产生动作电位,在其下一次动作电位产生前另一个神经元也会产生动作电位,

即两个神经元几乎同时产生动作电位,也就是说,相位同步实际上是峰同步[16].

下面我们考察时滞对四个神经元间相位同步的影响. 为此我们分别计算系统没有时滞和具有时滞两种情况下四个神经元间的最大相位差随耦合强度的变化. 由图 6 (a)可以看出,系统在没有时滞的情况下,除了当 $0.56 < g < 1$ 时,神经元 1 与神经元 3,神经元 2 与神经元 4 之间出现相位同步外,其它区域四个神经元达不到相位同步. 在系统具有时滞 $\tau = 3$ 的情况下,当 $g \in (0.31, 0.44) \cup (0.48, 0.58) \cup (0.62, 0.77)$ 时,神经元间的相位差的最大值都趋于零,这意味着全体神经元是相位同步的,如图 6 (b)所示. 由此可见,耦合的对称性使神经元间出现相位同步也具有对称性. 同时,时滞的出现还会使耦合神经元间出现相位同步的范围变大,即时滞诱发了神经元间的相位同步.

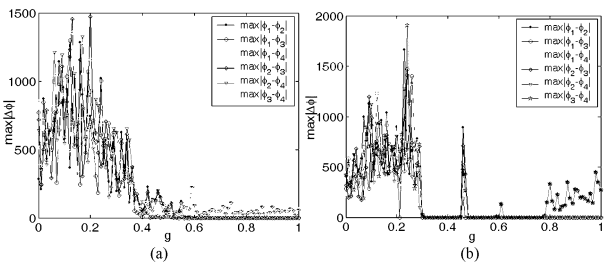

图 6　神经元间的相位差的最大值随耦合强度的变化,时滞为 (a) $\tau = 0$, (b) $\tau = 3$

Fig. 6　The maximum of $|\Delta\phi(t)|$ versus the coupling strength for the delay (a) $\tau = 0$, (b) $\tau = 3$

4　结论

由于突触间隙的存在,神经元之间的信息传递存在着时滞效应,时滞是普遍存在的. 本文研究时滞耦合对四个环式耦合 HR 神经元同步的影响. 数值模拟表明有效的时滞会诱发或增强耦合神经元间的同步,如当四个环式耦合 HR 神经元间的时滞为 3 时,使耦合系统达到完全同步的耦合强度的临界值为 0.3,该值小于无时滞情况下耦合系统出现完全同步耦合强度的临界值. 而时滞为 4 时,能使耦合的神经元在很小的耦合强度下达到完全同步. 由此可见耦合强度越小,越有利于从一个神经元到其它神经元的信息传输. 此外,在完全同步出现前神经元间的行为是复杂的. 在这过程中出现近似同步、相位同步的转迁等现象. 时滞的出现会诱发神经元间的相位同步,也可以使耦合神经元出现相位同步的范围变大.

参　考　文　献

1　Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press, 2001

2　Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares DL, Zhou CS. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, 366: 1 ~ 101

3　Shuai JW, Durand DM. Phase synchronization in two coupled chaotic neurons. *Phys. Lett. A*, 1999, 264: 289 ~ 297

4　Taherion S, Lai YC. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 1999, 59: 6247 ~ 6250

5　Zheng ZG, Hu G. Generalized synchronization versus phase synchronization. *Phys. Rev. E*, 2000, 62: 7882 ~ 7885

6　Shi X, Lu QS. Phase Synchronization in electrically coupled different neuronal pacemakers with the Chay model. *Chin. Phys. Lett.*, 2005, 22 (3): 547 ~ 550

7　Dhamala M, Jirsa VK, Ding M. Transitions to synchrony in coupled bursting neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 028101(1) ~ 028101(4)

8　王青云,陆启韶. 兴奋性化学突触耦合的快峰神经元的同步动力学. 动力学与控制学报, 2008, 6(1): 35 ~ 39 (Wang Qingyun, Lu Qishao. Synchronization of coupled neurons with excitory chemical synapse. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 35 ~ 39 (in Chinese))

9　Chen JY, Wong KW, Shuai JW. Phase synchronization in coupled chaotic oscillators with time delay. *Phys. Rev. E*, 2002, 66: 056203(1) ~ 056203(7)

10　Dhamala M, Jirsa VK, Ding M. Enhancement of neural synchrony by time delay. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 074104 (1) ~ 074104(4)

11　Wang QY, Lu QS. Time delay – enhanced synchronization and regularization in two coupled chaotic neurons. *Chin. Phys. Lett.*, 2005, 22: 543 ~ 546

12　Kye WH, Choi M, Kurdoglyan MS, Kim CM, Park YJ. Synchronization of chaotic oscillators due to common delay time modulation. *Phys. Rev. E*, 2004, 70: 046211 (1) ~ 046211 (4)

13　Rossoni E, Chen Y, Ding M, Feng J. Stability of synchronous oscillations in a system of Hodgkin – Huxley neurons with delayed diffusive and pulsed coupling. *Phys. Rev. E*,

2005,71: 061904(1) ~ 061904(11)

14 Atay FM, Jost J, Wende A. Delays, connection topology, and synchronization of coupled chaotic maps. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 144101(1) ~ 144101(4)

15 Hindmarsh JL, Rose RM. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. London Ser. B*, 1984, 221: 87 ~ 102

16 Shi X, Lu QS. Rhythm synchronization of coupled neurons with temporal coding scheme. *Chin. Phys. Lett.*, 2007, 24: 636 ~ 639

SYNCHRONIZATION IN RING COUPLED CHAOTIC NEURONS WITH TIME DELAY *

Zheng Yanhong[1,2] Lu Qishao[1]

(1. *School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083, *China*)

(2. *School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *China*)

Abstract Time delay exists widely in information transduction between neurons due to synaptic connection. The effects of time delay on the synchronization behaviour of four chaotic HR (Hindmarsh – Rose) neurons with ring coupling scheme were studied. By computing the synchronization errors, it is found that complete synchronization among neurons can be induced or enhanced by appropriate time delays, namely, a stable synchronous state exists at lower coupling strengths under the action of time delay. It is further observed that time delay can also induce phase synchronization and enlarge the in – phase synchronization window. Moreover, complex phenomena induced by time delay, such as the transition between nearly complete synchronization and phase synchronization, can be observed before the occurrence of complete synchronization.

Key words neuron, ring coupling, time delay, synchronization

Received 9 October 2007, revised 14 January 2008.

* The project supported by the National Science Foundation of China (10432010, 10702023 and 10702002) and the Innovation Foundation of BUAA for PhD Graduates