

受力螺旋作用的非圆截面弹性直杆的 Lyapunov 稳定性*

薛纭¹ 陈立群²

(1. 上海应用技术学院机械与自动化工程学院, 上海 200235) (2. 上海大学力学系, 上海 200444)

摘要 基于 Kirchhoff 动力学比拟思想, 研究非圆截面压扭弹性细直杆的 Lyapunov 稳定问题. 用 Cardano 角表示截面的姿态, 根据 Kirchhoff 方程建立杆的平衡微分方程, 得到了两端受力螺旋作用时的直线平衡特解, 导出了具有周期系数的线性化扰动方程, 其周期与扭矩和杆长成正比, 与抗扭刚度成反比, 圆截面情形为其特例. 用 Floquet 理论讨论了其 Lyapunov 稳定性, 算例表明对于给定的弹性杆, 扭矩和压力对稳定是有利的, 而拉力是不稳定的主要因素.

关键词 压扭变形, 弹性细杆, Kirchhoff 方程, 直杆, Lyapunov 稳定性, Floquet 理论

引言

受压弹性杆直线平衡的稳定性研究具有悠久的历史, 最早可追溯到 Daniel Bernoulli 和 Euler (1730). Euler 建立的细长压杆的稳定性理论在现代工程技术中得到广泛的应用, 稳定性已成为衡量压杆承载能力的重要指标之一. 除受压外, 两端还受沿轴线作用的力偶, 从而形成力螺旋作用, 杆将发生压扭变形, 其稳定问题具有重要的工程背景, 如钻杆、大型空间结构上的可盘绕折叠的空间伸展臂等. 1883 年, A. G. Greenhill 导出了圆截面弹性细杆两端为铰支时力螺旋临界值的计算公式^[1,2]:

$$\frac{M_0^2}{4A} + F_0 \leq \frac{\pi^2 A}{l^2} \quad (1)$$

称为 Greenhill 公式, 其中 A 为抗弯刚度. 上世纪 70 年代以来, 作为 DNA 的力学模型, 弹性细杆力学重新受到关注^[3]. 刘延柱教授领导的课题组在国家自然科学基金资助下, 对弹性细杆的平衡和稳定性展开了系统的研究^[4-11], 基于 Kirchhoff 动力学比拟思想, 提出了弹性细杆的 Lyapunov 稳定性概念, 并讨论了与 Euler 稳定性的关系. 弹性细杆的 Lyapunov 稳定性是研究起始值对杆的平衡位形的影响, 应用背景为一类植物的茎、根或杆状的细菌^[12], 其平衡位形为常微分方程的初值问题的解. 本文研究非圆截面弹性细杆在力螺旋作用下直线平衡状态的 Lyapunov 稳定问题. 导出 Kirchhoff 方程的直线平衡特

解, 其线性化扰动方程具有周期系数. 在给定力学参数下, 根据 Floquet 理论讨论其 Lyapunov 稳定性.

1 Kirchhoff 方程

用 Cardano 角表示截面的姿态^[6,13]. 设 $O-\zeta\eta\zeta$ 为惯性参照系, 在弹性杆横截面的形心 p 建立 $p-\zeta\eta\zeta$ 坐标系, 此坐标系依次绕轴 ξ, y_1, z_2 转过 α, β, γ 角:

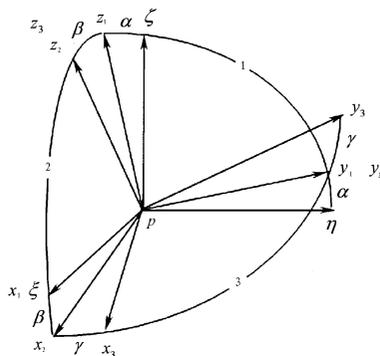


图1 截面姿态的 Cardano 角表示

Fig. 1 Cardano angles of a cross section of the rod

$$p-\zeta\eta\zeta \xrightarrow{\xi, \alpha} p-x_1y_1z_1 \xrightarrow{y_1, \beta} p-x_2y_2z_2 \xrightarrow{z_2, \gamma} p-x_3y_3z_3$$

其中 $p-x_3y_3z_3$ 为截面的主轴坐标系, 单位基矢量为 e_1, e_2, e_3 , 其中 e_3 为截面的外法矢, 亦即是中心线的切线轴, 如图 1 所示, 转动矩阵依次为 S_{10}, S_{21}, S_{32} . Kirchhoff 假定要求^[2]

$$\dot{r} = e_3 \quad (2)$$

其中 $r = \vec{Op}$, 在 $O-\zeta\eta\zeta$ 中的坐标阵为 $r = (\zeta \eta \zeta)^T$, 撇号表示对弧坐标 s 的导数.

设截面的主矩 M 和弯扭度 ω 满足线弹性本构关系

$$\underline{M} = B \underline{\omega} \tag{3}$$

式中

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

这里 M_i, ω_i 为 M 和 ω 依次沿主轴 $p-x_3, y_3, z_3$ 的分量; B_1, B_2 为截面对 $p-x_3, y_3$ 轴的抗弯刚度, B_3 为抗扭刚度. 式(1)中我们假定原始弹性杆是直的且无扭. 建立弹性杆的平衡微分方程, 即 Kirchhoff 方程^[2]:

$$\frac{d(S_{23}\underline{M})}{ds} + \tilde{\omega}^* S_{23}\underline{M} + \tilde{e}_3 \underline{F} = \underline{0} \tag{4}$$

$$\frac{d\underline{F}}{ds} + \tilde{\omega}^* \underline{F} = \underline{0} \tag{5}$$

其中 $\tilde{\omega}^*$ 为 $p-x_2y_2z_2$ 关于弧坐标的角速度 $\omega^* = \omega|_{\gamma=0}$, 而 $\tilde{\omega}^*$ 为其反对称方阵, \tilde{e}_3 为 e_3 的反对称方阵, \underline{F} 为截面主矢在 $p-x_2y_2z_2$ 中的坐标阵. 式(2)、(4)和(5)共9个方程关于变量 $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, F_1, F_2, F_3$ 封闭.

2 Kirchhoff 方程的直杆特解及其扰动方程

方程组(2)、(4)和(5)存在特解

$$\alpha_s = \beta_s = 0, \gamma_s = \frac{M_0}{B_3}s, F_{1s} = F_{2s} = 0, F_{3s} = -F_0 \tag{6}$$

其中 F_0, M_0 为沿轴线作用于杆两端的力(左)螺旋. 式(6)对应于杆的直线平衡状态, 中心线方程为:

$$\xi_s = \eta_s = 0, \zeta_s = s \tag{7}$$

定义扰动量 $x_i, (i=1 \cdots 9)$:

$$x_1 = \alpha - \alpha_s, x_2 = \beta - \beta_s, x_3 = \gamma - \gamma_s = \gamma - \frac{M_0}{B_3}s$$

$$X_{3+j} = F_j - F_{js}, (j=1, 2, 3)$$

$$x_7 = \xi - \xi_s, x_8 = \eta - \eta_s, x_9 = \zeta - \zeta_s \tag{8}$$

将(8)代入式(4)、(3)和(1), 略去二阶微量, 导出线性化扰动方程

$$a_2 x'' + a_1 x' + F_0 x + a = \underline{0}, x_3'' = 0 \tag{9}$$

$$-F_0 x_2 + x_4 = C_1, F_0 x_1 + x_5 = C_2, x_6'' = 0 \tag{10}$$

$$x_7' = x_2, x_8' = -x_1, x_9' = 0 \tag{11}$$

其中

$$a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{M_0(B_1-B_2)}{B_3}\sin 2ks & M_0(1+\frac{B_1-B_2}{B_3})\cos 2ks \\ M_0(-1+\frac{B_1-B_2}{B_3})\cos 2ks & \frac{M_0(B_1-B_2)}{B_3}\sin 2ks \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} B_1 \cos^2 ks + B_2 \sin^2 ks & \frac{B_1 - B_2}{2} \sin 2ks \\ \frac{B_1 - B_2}{2} \sin 2ks & B_2 \cos^2 ks + B_1 \sin^2 ks \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

这里 $k = M_0/B_3, C_1, C_2$ 为积分常数. 显然, 解(6)的 Euler 稳定性取决于式(9.1)的边值问题是否存在非零解. 本文研究其 Lyapunov 稳定性. 将式(9.1)写作标准形式

$$y' = Ay + A_0 \tag{12}$$

式中

$$y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & E_{2 \times 2} \\ -a_2^{-1} F_0 & -a_2^{-1} a_1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -a_2^{-1} a \end{pmatrix}$$

其中 A 的周期为 $T = \pi/k$. 引进无量纲参数

$$\bar{s} = \frac{s}{L}, \sigma = \frac{B_1 - B_2}{B_1}, \mu = \frac{B_3}{B_1}, f_0 = \frac{F_0 L^2}{B_1}, m_0 = \frac{m_0 L}{B_3} \tag{13}$$

将式(12)无量纲化, 注意到稳定性由齐次部分决定, 化作

$$\dot{z} = Bz \tag{14}$$

其中点号表示对无量纲弧坐标的导数,

$$z = \begin{pmatrix} x \\ x'/L \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_4 & -b_5 - b_6 \\ b_2 & b_3 & b_5 - b_6 & -b_4 \end{pmatrix}$$

这里,

$$b_1 = -\frac{f_0(1 - \sigma \cos^2 \bar{m}_0 \bar{s})}{1 - \sigma}, b_2 = \frac{f_0 \sigma \sin 2\bar{m}_0 \bar{s}}{2(1 - \sigma)},$$

$$b_3 = -\frac{f_0(1 - \sigma \sin^2 \bar{m}_0 \bar{s})}{1 - \sigma}, b_4 = \frac{\bar{m}_0 \sigma (2 - \sigma - \mu) \sin \bar{m}_0 \bar{s}}{2(1 - \sigma)},$$

$$b_5 = \frac{\bar{m}_0 (2\mu - \mu\sigma - \sigma^2)}{2(1 - \sigma)}, b_6 = \frac{\bar{m}_0 \sigma (2 - \mu - \sigma) \cos \bar{m}_0 \bar{s}}{2(1 - \sigma)}.$$

系数矩阵 B 的周期为 $\bar{T} = 2\pi/\bar{m}_0$. 当 $\sigma = 0$ 时为圆截面情形, 此时 B 为常值矩阵.

3 稳定性计算

求解方程(6)的稳定性转化为方程(14)的稳定性问题. 式(14)是周期系数的线性齐次常微分方程, 可以用 Floquet 理论讨论其 Lyapunov 稳定性^[13-14], 由初值问题

$$\dot{Z} = BZ, Z(0) = E_4 \quad (15)$$

通过数值计算求得 $Z(\bar{T})$, 这里 $Z(\bar{s})$ 为方程(15)的基解矩阵, E_4 为单位矩阵. 稳定性取决于特征方程

$$|Z(\bar{T}) - \lambda E| = 0 \quad (16)$$

的根, 于是根据 Floquet 定理的七条准则可以判定弹性杆直线平衡状态(6)的 Lyapunov 稳定性.

算例: 在给定参数 $\sigma = 0.15, \mu = 0.75$ 下, 计算不同的力参数 \bar{m}_0, f_0 下的 Lyapunov 稳定性.

1) $\bar{m}_0 = 1.5, f_0 = 10$. 周期为 $\bar{T} = 4.1888$, 由式(15)解得

$$Z(\bar{T}) = \begin{pmatrix} -0.0607 & -0.2152 & -0.2454 & -0.1605 \\ 0.1931 & 0.1110 & 0.1888 & -0.2343 \\ 2.4871 & 1.6309 & -0.2731 & 0.0995 \\ -2.1459 & 2.7235 & -0.0716 & -0.1014 \end{pmatrix}$$

由式(16)解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -0.6683 \pm 0.7439i,$$

$$\lambda_{3,4} = 0.5062 \pm 0.8624i$$

其模皆为 1, 且均为单根, 所以, 系统式(12)是稳定的, 但不是渐进稳定的^[14]. 进一步计算也表明压扭状态是稳定的, 这和文献[6]结果一致.

2) $\bar{m}_0 = 20, f_0 = 0$. 周期为 $\bar{T} = 0.3142$, 由式(15)解得

$$Z(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.0856 & -0.0298 \\ 0 & 1 & 0.0351 & -0.0342 \\ 0 & 0 & 0.4735 & 0.5136 \\ 0 & 0 & -1.5106 & 0.4735 \end{pmatrix}$$

由式(16)解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = 0.4735 \pm 0.8808i, \lambda_{3,4} = 1.0$$

其模皆为 1, 且均为单根, 所以, 系统式(12)是稳定的, 但不是渐进稳定的^[14]. 进一步计算表明受扭状态是稳定的.

3) $\bar{m}_0 = 1.5, f_0 = -3.0$. 周期为 $\bar{T} = 4.1888$, 由式(15)解得

$$Z(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 0.7105 & -2.2669 & -3.5702 & -1.7808 \\ 2.1204 & 0.6534 & 2.0951 & -2.6669 \\ -0.8513 & -0.5428 & -1.6465 & 1.1979 \\ 0.7142 & -1.1610 & -2.0584 & -1.7036 \end{pmatrix}$$

由式(16)解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -0.9267 \pm 0.3757i,$$

$$\lambda_{3,4} = -0.0664 \pm 0.9978i$$

其模皆为 1, 且均为单根, 所以是稳定的, 但不是渐进稳定的^[14]. 这表明拉扭状态也可能是稳定的, 此时, 扭矩是对稳定有利.

4) $\bar{m}_0 = 1.5, f_0 = -3.5$. 周期为 $\bar{T} = 4.1888$, 由式(15)解得

$$Z(\bar{T}) = \begin{pmatrix} 0.5552 & -2.8572 & -4.1335 & -2.1066 \\ 2.6824 & 0.4764 & 2.4783 & -3.1926 \\ -1.1845 & -0.7491 & -2.2328 & 1.3117 \\ 0.9857 & -1.5769 & -2.1094 & -2.3117 \end{pmatrix}$$

由式(16)解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -1.1118 \pm 0.69899i,$$

$$\lambda_{3,4} = -0.0664 \pm 0.4053i$$

其模 $|\lambda_{1,2}| = 1.3 > 1, |\lambda_{3,4}| = 0.7615$, 所以, 系统式(12)在给定参数下是不稳定的^[14]. 进一步计算也表明拉力对稳定是不利的, 这和文献[6]结果一致.

4 结语

值得指出, 以上讨论的弹性细杆平衡的 Lyapunov 稳定性, 是基于所谓“Kirchhoff 动力学比拟”思想, 不能用 Euler 稳定性的概念去理解 Lyapunov 稳定性. 通常情况下, 扭矩和压力对稳定是有利的, 而拉力是不稳定的主要因素.

参考文献

- 1 S. P. 铁摩辛柯, J. M. 盖莱. 弹性稳定理论. 北京: 科学出版社, 第二版, 1965: 169 (S. P. Timoshenko & J. M. Gere. Theory of Elastic Stability, Second Edition. Beijing: Science Press, 1965: 169 (in Chinese))
- 2 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础. 北京, 清华大学出版社 & Springer, 2006, 61 (89): 14 (Liu Y Z. Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod - Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA. Beijing, Tsinghua Press & Springer 2006, 61 (89): 14 (in Chinese))
- 3 刘延柱. 弹性杆基因模型的力学问题. 力学与实践, 2003, 25(1): 1~5 (Liu Y Z. Mechanical problems on elastic rod model of DNA. Mechanics in Engineering, 2003, 25(1): 1~5 (in Chinese))
- 4 刘延柱, 薛纭, 陈立群. 弹性细杆平衡的动态稳定性. 物理学

- 报,2004,53(8):2424~2428(Liu Y Z, Xue Y, Chen L Q. Dynamical stability of equilibrium of a thin elastic Rod. *Acta Physical Sinic*,2004,53(8):2424~2428(in Chinese))
- 5 薛纭,陈立群,刘延柱. Kirchhoff 方程的相对常值特解及其 Lyapunov 稳定性. *物理学报*,2004,53(12):4029~4035(Xue Y, Chen L Q. Liu Y Z. Special solutions of Kirchhoff equations and their Lyapunov stability. *Acta Physical Sinic*,2004,53(12):4029~4035(in Chinese))
- 6 刘延柱. 压杆失稳与 Lyapunov 稳定性. *力学与实践*,2002,24(4):56~59(Liu Y Z. Compressed bar buckling and Lyapunov stability. *Mechanics in Engineering*,2002,24(4):56~59(in Chinese))
- 7 薛纭,陈立群. 再论压杆失稳于 Lyapunov 稳定性. *力学与实践*,2004,26(5):71~72(Xue Y, Chen L Q. Revisit of compressed bar buckling and Lyapunov stability. *Mechanics in Engineering*,2004,26(5):71~72(in Chinese))
- 8 刘延柱,薛纭. 受轴向力和扭矩作用的直杆的平衡稳定性. *力学与实践*,2005,27(1):64~65(Liu Y Z, Xue Y. On stability of equilibrium of a straight rod under axial force and torque. *Mechanics in Engineering*,2005,27(1):64~65(in Chinese))
- 9 彭建华,刘延柱. 弹性细杆的混沌形态. *动力学与控制学报*,2005,3(2):36~39(Peng J H, Liu Y Z. Chaotic configuration of a thin elastic rod. *Journal of Dynamics and Control*,2005,3(2):36~39(in Chinese))
- 10 刘延柱. 松弛状态非圆截面弹性螺旋细杆的稳定性. *动力学与控制学报*,2005,3(4):12~16(Stability of a thin helical rod with circular cross section in relaxed state. *Journal of Dynamics and Control*,2005,3(4):12~16(in Chinese))
- 11 刘延柱,盛立伟. 松弛状态圆截面螺旋细杆的弹性波传播. *动力学与控制学报*,2006,4:289~293(Liu Y Z, Sheng L W. Elastic wave propagation of a thin helical rod with circular cross section in relaxed state. *Journal of Dynamics and Control*,2006,4:289~293(in Chinese))
- 12 Charles W. Wolgemuth a, Raymond E. Goldstein b, Thomas R. Powers. Dynamic supercoiling bifurcations of growing elastic filaments. *Physica D*,2004,190:266~289
- 13 刘延柱. 高等动力学. 北京:高等教育出版社,2001:96(Liu Y Z. Advanced dynamics. Beijing:Higher Education Press,2001,96(in Chinese))
- 14 张劲夫,秦卫阳. 高等动力学. 北京:科学出版社,2004:112~118(Zhang J F, Qin W Y. Advanced dynamics. Beijing:Science Press,2004,112~118(in Chinese))

LYAPUNOV STABILITY OF A STRAIGHT ELASTIC ROD WITH NON CIRCULAR CROSS SECTION UNDER FORCE SCREW*

Xue Yun¹ Chen Liqun²

(1. Department of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

(2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract Lyapunov stability of an elastic rod with non circular cross section in straight equilibrium was studied based on the thought of Kirchhoff kinetic analogy in the paper. Expressing the attitude of a section of the rod by Cardano angles, the equilibrium differential equation was established in terms of Kirchhoff theory of the rod, and its special solution when two ends of the rod were acted by a pair of force screws was found which stands for straight equilibrium state. The linear perturbation equation with periodic coefficient was obtained, where the period is directly proportional to the torque of the end and the length of the rod, and inversely as the torsion rigidity of the rod. The circular cross section of the rod was its special case. Lyapunov stability of equilibrium in the straight state was discussed according to the Floquet theory. It is explained that the torque and compressive force were advantageous to the stability and the tensile force wasn't by numerical examples.

Key words axial and torsional deformation, thin elastic rod, Kirchhoff equation, straight rod, Lyapunov stability, Floquet theory