第 6 卷第 3 期 2008 年 9 月
1672-6553/2008/06(3)/193-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 6 No. 3
Sep. 2008

# $\alpha$ 方法在非完整力学系统数值积分中的应用*

马秀腾　陈立平　张云清

（华中科技大学 CAD 中心，武汉　430074）

**摘要**　将源于直接积分方法的广义－α 法和 α－RATTLE 法应用到非完整力学系统动力学方程数值积分中，直接求解指标－2 的微分－代数方程（DAEs），这两种方法的质量矩阵可以是常量，也可以与广义坐标相关．最后，文中通过一个非完整力学系统：Snakeboard 模型，对这两种方法进行了验证，并且与 DASSL 算法包的结果进行了比较．

**关键词**　非完整约束，　微分－代数方程（DAEs），　广义－α 法，　α－RATTLE 法

## 引 言

力学系统所受的约束一般可分为完整约束和非完整约束．完整约束是指几何约束和可积分的微分约束；非完整约束是指不可积分的微分约束[1,2]．带有非完整约束的力学系统称为非完整力学系统．非完整力学在机器人领域，特别是机器人运动和机器人抓取中有重要的应用[1,3,4]．

受约束的力学系统动力学模型一般可用微分－代数方程（DAEs）来描述，如果系统仅仅受完整约束，则其动力学模型的方程可表示为指标－3 的 DAEs[5]．如果系统仅仅受非完整约束，则其动力学模型的方程可表示为指标－2 的 DAEs；如果系统既受完整约束，又受非完整约束，则可表示为指标－3 的 DAEs[3]．从 1980 年代以来 DAEs 的数值积分算法一直是研究的热点[5,6]，也是计算多体系统动力学研究的主要内容之一[7]．

自 1959 年 Newmark 方法[8]提出以来，直接积分方法在结构动力学数值积分中有着广泛的应用[9]．直接积分法还包括 Newmark 方法推广得到的广义－α 法、Wilson－θ 法、WBZ－α 和 HHT－α 法等[10]．结构动力学中，其求解的主要是不带约束的运动学方程，一般情况是二阶常微分方程（ODEs）的数值解，这些方法的研究已经比较透彻．

Geradin 和 Cardona[11]首先将直接积分方法中的 Newmark 方法和 HHT－α 方法推广到数值求解受完整约束力学系统动力学方程，也就是求解指标－3 的 DAEs．最近，Lunk 和 Simeon[12]将广义－α 方法的数值求解对象推广到带完整约束的力学系统，提出了 α－RATTLE 方法[12]，其求解的是降指标的受完整约束的力学系统的动力学方程（指标－2），但此方法要求动力学方程的质量矩阵是常量；Jay 和 Negrut[13]将 HHT－α 方法的数值求解对象推广到约束力学系统，包括降指标的带完整约束的力学系统动力学方程（指标－2）和仅受非完整约束的非完整力学系统的动力学方程（指标－2）．

本文首先将广义－α 法应用到非完整约束力学系统，直接求解指标－2 的 DAEs．其次，参考 HHT－α 方法在非完整力学系统数值积分中的应用，将 α－RATTLE 法应用到非完整约束力学系统，求解指标－2 的 DAEs，这两种方法的质量矩阵可以是常量，也可以与广义坐标相关，推广了 α 方法的应用范围．

最后，文中将这两种算法的结果与经典的 DAEs 数值求解算法包 DASSL[5] 的结果进行了比较．DASSL 求解的是用哑导方法[14]降指标的仅受非完整约束的非完整力学系统动力学方程（指标－1）．

## 1　问题描述

本文研究仅受非完整约束，而不受纯完整约束的非完整力学系统．从 DAEs 的角度描述这类非完整力学系统，其动力学方程可以表示为[4]：

$$M(q)\ddot{q}+\Psi_{\dot{q}}^{T}(\dot{q},q,t)\lambda=f(\dot{q},q,t)\quad \Psi(\dot{q},q,t)=0$$

2008-03-23 收到第 1 稿，2008-04-21 收到修改稿．

* 国家自然科学基金（60574053）和国家“八六三”高技术研究发展计划（2006AA110105）资助项目

此方程是具有指标 -2 的 DAEs[3,5]. 在经典力学领域,所研究的非完整约束主要是形如 $\Phi(q,t)\dot{q}=0$ 的形式,也就是说非完整约束 $\Psi(\dot{q},q,t)$ 可以表示成 $\dot{q}$ 的线性组合[15],动力学方程为

$$M(q)\ddot{q}+\Phi^T(q,t)\lambda=f(\dot{q},q,t) \quad \Phi(q,t)\dot{q}=0$$

这也是本文研究的非完整系统的数学模型.

## 2 广义 -α 方法

分别令,

$$f_{n+1}:=f(\dot{q}_{n+1},q_{n+1},t_{n+1}),M_{n+1}:=M(q_{n+1})$$

$$F:=f(\dot{q},q,t)-\Phi^T(q,t)\lambda,M_n:=M(q_n)$$

$$F_{n+1}:=F(\dot{q}_{n+1},q_{n+1},\lambda_{n+1},t_{n+1})$$

$$F_{n+1}:=f_{n+1}-\Phi^T(q_{n+1},t_{n+1})\lambda_{n+1}$$

由广义-α 方法可得,离散的动力学方程可表示为:

$$M_{1+n}a_{1+n}+\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}M_na_n=\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}F_{n+1}+\frac{\alpha_f}{1-\alpha_m}F_n$$

$$0=\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}$$

其中

$$q_{n+1}=q_n+h\dot{q}_n+\frac{1}{2}h^2((1-2\beta)a_n+2\beta a_{n+1})$$

$$\dot{q}_{n+1}=\dot{q}_n+h((1-\gamma)a_n+\gamma a_{n+1})$$

离散方程中 $a_n$ 的初始值由

$$M_na_n=(1-\alpha)F_n+\alpha F_{n+1}$$

给出[12]. 式中

$\alpha=\alpha_m-\alpha_f,\alpha_f=\rho_\infty/(1+\rho_\infty),\alpha_m=(2\rho_\infty-1)/(1+\rho_\infty)$,$\rho_\infty$ 为无穷远处的谱半径,$\rho_\infty\in[0,1]$. $\alpha=(\rho_\infty\text{-}1)/(\rho_\infty+1)$,$\beta=(1\text{-}\alpha)^2/4$,$\gamma=1/2\text{-}\alpha$. 当 $\rho_\infty=0$ 时表示高频响应将被渐近零化,其等价于 $L$-稳定,此时算法的数值耗散最大;当 $\rho_\infty=1$ 时表示算法无数值耗散[12,16].

采用 Newton - Raphson 法求解离散的动力学方程,得:

$$J\begin{pmatrix}\Delta a\\ \Delta\lambda\end{pmatrix}^{(k)}=\begin{pmatrix}-e_1\\ -e_2\end{pmatrix}^{(k)}$$

其中 Jacobian 矩阵 $J$ 为

$$\begin{bmatrix}\tilde{M} & \frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}\Phi^T\\ (\Phi\dot{q})_q\beta h^2+\Phi\gamma h & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}=M+(Ma)_q\beta h^2-\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}(F_q\beta h^2+F_{\dot{q}}\gamma h)$$

$$e_1=M_{1+n}a_{1+n}+\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}M_na_n-\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}F_{n+1}-\frac{\alpha_f}{1-\alpha_m}F_n$$

$$e_2=\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}$$

对于质量矩阵是常数的情况,$(Ma)_q=0$,如果质量矩阵与广义坐标 $q$ 相关,计算 $(Ma)_q$ 时,可以通过近似替换

$$Ma\doteq M(q_n+h\dot{q}_n)a_{n+1}$$

来避免 $(Ma)_q$ 的计算,降低计算复杂性.

为了改善 Jacobian 矩阵的条件数,避免矩阵奇异,根据缩放的思想[17,18],将与运动约束相关的非线性方程两边同乘以 $1/h$,最后离散的动力学方程为:

$$M_{1+n}a_{1+n}+\frac{\alpha_m}{1\text{-}\alpha_m}M_na_n\text{-}\frac{1\text{-}\alpha_f}{1\text{-}\alpha_m}F_{n+1}\text{-}\frac{\alpha_f}{1\text{-}\alpha_m}F_n=0$$

$$\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}/h=0$$

采用 Newton - Raphson 法求解此非线性方程组得:

$$J'\begin{pmatrix}\Delta a\\ \Delta\lambda\end{pmatrix}^{(k)}=\begin{pmatrix}-e_1\\ -e_2'\end{pmatrix}^{(k)}$$

其中 Jacobian 矩阵 $J'$ 为,

$$\begin{bmatrix}\tilde{M}' & \frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}\Phi^T\\ (\Phi\dot{q})_q\beta+\Phi\gamma & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}'=M(q_n+h\dot{q}_n)-\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}(F_q\beta h^2+F_{\dot{q}}\gamma h)$$

$$e_2'=\frac{1}{h}\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}$$

## 3 α - RATTLE 方法

参考 HHT - α 方法在非完整约束系统中的应用[13],将 α - RATTLE 方法[12]推广到数值求解非完整系统动力学方程中,离散的动力学方程可表示为:

$$M_{1+n}a_{1+n}+\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}M_na_n=\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}f_{n+1}+\frac{\alpha_f}{1-\alpha_m}f_n$$

$$0=\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}$$

其中

$$q_{n+1}=q_n+h\dot{q}_n+\frac{1}{2}h^2((1\text{-}2\beta)a_n+2\beta a_{n+1})+\frac{1}{2}h^2R_{1/2}$$

$$\dot{q}_{n+1}=\dot{q}_n+h((1-\gamma)a_n+\gamma a_{n+1})+hR_{1/2}$$

$$R_{1/2}=\text{-}M^{\text{-}1}(q_n+\frac{h}{2}\dot{q}_n)\Phi^T(q_n+\frac{h}{2}\dot{q}_n,t_n+\frac{h}{2})\lambda_{n+1}$$

$a_n$ 的初始值的获取以及 $\alpha_m$、$\alpha_f$、$\alpha$、$\beta$,$\gamma$ 的取值与广义 $-\alpha$ 方法的取值完全相同. 与广义 $-\alpha$ 方法类似,此方法也可以采用缩放的思想,将非完整约束的方程变为

$$\frac{1}{h}\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}=0$$

最后离散的动力学方程可写为:

$$M_{n+1}a_{n+1}+\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}M_n a_n=\frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}f_{n+1}+\frac{\alpha_f}{1-\alpha_m}f_n$$

$$\frac{1}{h}\Phi(q_{n+1},t_{n+1})\dot{q}_{n+1}=0$$

数值求解此离散的动力学方程的过程以及质量矩阵的处理与广义 $-\alpha$ 方法的完全相同.

## 4　数值算例

图 1 为 Snakeboard 的简化模型[19]. 其中板的质量为 $m$,转动惯量为 $J$,转动体的转动惯量是 $J_r$,轮子(假设前后轮完全相同)的转动惯量是 $J_w$,从板的质心到轮的距离为 $L$,加在板的质心的力是 $F$,方向平行于板的轴线方向,$F=(F_x,F_y)$,加在轮子和板之间扭簧的刚度为 $k_w$,转动体和板之间扭簧的刚度为 $k_r$,其动力学方程为:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J+J_r+2J_w & J_r & J_w & J_w \\ 0 & 0 & J_r & J_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_w & 0 & J_w & 0 \\ 0 & 0 & J_w & 0 & 0 & J_w \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\phi}_b \\ \ddot{\phi}_f \end{pmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\phi_b+\theta) & -\sin(\phi_f+\theta) \\ \cos(\phi_b+\theta) & \cos(\phi_f+\theta) \\ L\cos\phi_b & L\cos\phi_f \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \\ -k_r\varphi \\ -k_w\phi_b \\ -k_w\phi_f \end{pmatrix}$$

非完整约束的约束方程为:

$$-\sin(\phi_b+\theta)\dot{x}+\cos(\phi_b+\theta)\dot{y}-L\cos\phi_b\dot{\theta}=0$$

$$-\sin(\phi_f+\theta)\dot{x}+\cos(\phi_f+\theta)\dot{y}-L\cos\phi_f\dot{\theta}=0$$

模型参数分别为 $m=6\text{kg}$,$J=0.016\text{kg. m}^2$,$J_r=0.072\text{kg. m}^2$,$J_w=0.0013\text{kg. m}^2$,$L=0.2\text{m}$,$F=20\text{N}$,$k_r=1\text{N. m/rad}$,$k_w=0.1\text{N. m/rad}$,

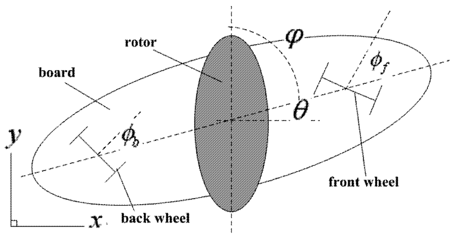


图 1　Snakeboard 简化模型

Fig. 1　The simplified model of the Snakeboard

系统初始值为 $x=y=\theta=\phi_b=0$,$\psi=0.2\text{rad}$,$\phi_f=\pi/3\text{rad}$. 取 $\rho_\infty=3/7$,则 $\alpha_m=-0.1$,$\alpha_f=0.3$,$\alpha=-0.4$,$\beta=0.49$,$\gamma=0.9$,分别采用广义 $-\alpha$ 方法和 $\alpha-$RATTLE 方法求解此方程,并与经典的 DAEs 数值求解算法包 DASSL 的结果进行比较. DASSL 算法包只能求解指标 $-1$ 的 DAEs 和(刚性)ODEs,本文采用哑导[14]的方法将 DAEs 的指标从 2 降为 1,然后用 DASSL 算法包求解.

Snakeboard 模型板的质心处横坐标 $x$、$y$ 和轴线与 $x$ 轴夹角 $\theta$ 随时间变化的曲线分别如图 2、图 3 和图 4 所示.

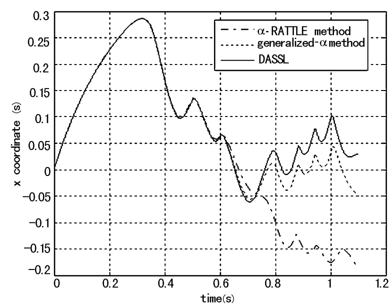


图 2　坐标 $x$ 随时间变化曲线

Fig. 2　The evolution of coordinate x

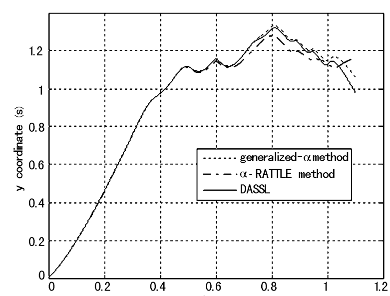


图 3　坐标 $y$ 随时间变化曲线

Fig. 3　The evolution of coordinate y

数值仿真结果表明,广义 $-\alpha$ 方法的求解结果与 *DASSL* 算法包求解的结果非常接近,$\alpha-$*RATTLE* 方法在仿真初期与 *DASSL* 算法包的结果以及广义 $-\alpha$ 的结果几乎重合,但随着时间的推移,仿真结

果相差较大.

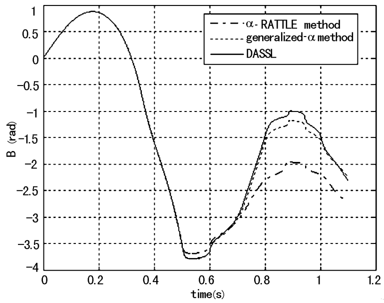


图 4 $\theta$ 随时间变化曲线

Fig. 4 The evolution of θ

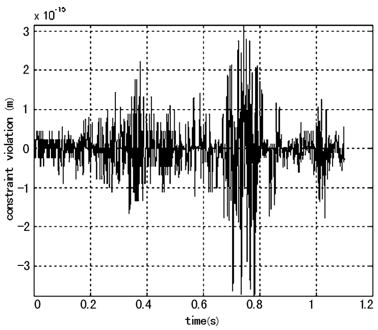


图 5 广义 $-\alpha$ 方法的违约曲线

Fig. 5 The drift - off curve of generalized $-\alpha$

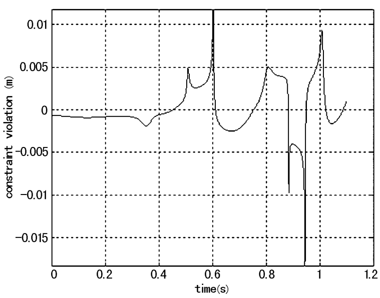


图 6 $\alpha$ - RATTLE 方法的违约曲线

Fig. 6 The drift - off curve of $\alpha$ - RATTLE

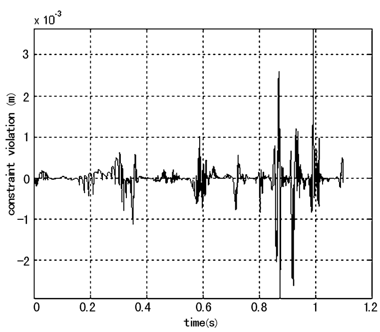


图 7 DASSL 算法包求解得到的违约曲线

Fig. 7 The drift - off curve of DASSL solver

约束方程的违约[5]现象在数值求解 DAEs 过程中普遍存在,以第一个非完整约束的约束方程为例,图 5、图 6 和图 7 分别给出广义-$\alpha$ 方法、$\alpha$-RATTLE 方法和经典 DASSL 算法包求解得到的违约曲线.

结果表明,广义-$\alpha$ 方法方法的违约量最小,数量级是 $10^{-15}$, $\alpha$-RATTLE 法违约量的数量级是 $10^{-2}$,哑导方法降为指标 -1 后,采用 DASSL 算法包求解违约量的数量级是 $10^{-3}$.

## 5 总结

首先将广义-α 法应用到非完整力学系统的动力学方程的数值积分中,直接求解指标-2 的 DAEs,其次,参考 HHT-α 方法在非完整力学系统数值积分中的应用,将 α-RATTLE 法应用到非完整力学系统,求解指标-2 的 DAEs,同时广义-α 法和 α-RATTLE 方法所求解的非完整力学系统动力学方程的质量矩阵可以是常量,也可以与广义坐标相关. 最后通过算例,将 α 方法的结果与经典的 DAEs 数值求解算法包 DASSL 的结果进行了比较.

α 方法中的 $\alpha\in[-1,0]$,改变 α 的大小可以控制数值耗散的大小. 因此,从能量角度研究 α 方法在约束力学系统中的应用将是本文后继的工作.

## 参 考 文 献

1 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社,1991(Mei F X, Liu D, Luo Y, Advanced Analytical Mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991(in Chinese))

2 赵跃宇,金波,许文喜. 关于非完整系统虚位移的不确定性问题与非线性问题. 动力学与控制学报,2003,1(2):20 ~ 24(ZhaoY Y, Jin B, Xu W X. On the unqualitative and nonlinear problems of virtual displacement in nonholonomic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2003, 1(1):20 ~ 24(in Chinese))

3 D F Evensberget. Numerical simulation of nonholonomic dynamics. Master thesis of Norwegian University of Science and Technology, 2006

4 P J Rabier, W C Rheinboldt. Non- holonomic motion of rigid mechanical systems from a DAE viewpoint. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000

5 K B Brenan, S L Campbell, L R Petzold. Numerical Solution of initial-value problems in differential algebraic equations (2nd ed). SIAM, 1996

6 潘振宽,赵维加,洪嘉振等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法. 力学进展,1996,26(1):28 ~ 40(Pan Z K, Zhao W J, Hong J Z, et al. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multibody sys-

tems。*Advances in Mechanics*, 1996, 26(1): 28 ~ 40 (in Chinese))

7 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京:高等教育出版社, 1999(Hong J Z. Computational dynamics of multibody systems. Beijing: China Higher Education Press, 1999 (in Chinese))

8 N Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1959: 67 ~ 94

9 T J R Hughes. The finite element method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1987

10 Fung Tat Ching. Numerical dissipation in time-step integration algorithms for structural dynamic analysis. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2003, (5): 167 ~ 180

11 A Cardona, M Geradin. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis. *Computers & Structures*, 1989, 33(3): 801 ~ 820

12 C Lunk, B Simeon. Solving constrained mechanical systems by the family of Newmark and alpha-methods. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2006, 86(10): 772 ~ 784

13 L O Jay, D Negrut. Extensions of the HHT-alpha method to differential-algebraic equations in mechanics. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2007, 26: 190 ~ 208

14 S E Mattsson, G Söderlind. Index reduction in differential-algebraic equations using dummy derivatives. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993, 14(3): 677 ~ 692

15 金波,赵跃宇,周海兵. 本质线性非完整系统的 Hamilton 的原理. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 32 ~ 36 (Jin B, Zhao Y Y, Zhou H B. Hamilton principle of intrinsical linear nonholonomic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 32 ~ 36 (in Chinese))

16 J Chung, G M Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-a method. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60: 371 ~ 375

17 C L Bottasso, D Dopico, L Trainelli. On the optimal scaling of index three DAEs in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2007, 19(1-2): 3 ~ 20

18 D Negrut, R Rampalli, G Ottarsson, et al. On an Implementation of the Hilber-Hughes-Taylor Method in the Context of Index 3 Differential-Algebraic Equations of Multibody Dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2007, 2: 73 ~ 85

19 A Lewis, J Ostrowski, R Murray, et al. Nonholonomic mechanics and locomot ion: The snakeboard example. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994: 2391 ~ 2397

# NUMERICAL INTEGRATION OF NONHOLONOMIC CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEMS BY α METHODS *

Ma Xiuteng Chen Liping Zhang Yunqing

(*Center for Computer-Aided Design, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan* 430074, *China*)

**Abstract** The generalized-α method and α-RATTLE method were used in the numerical integration of nonholonomic constrained mechanical systems, i. e. numerical solution of index-2 DAEs directly. During the integration, these two α-methods can settle the systems that their mass matrices are related with generalized coordinates. Finally, the two methods were verified by a numerical example, the classical nonholonomic constrained mechanical system: Snakeboard. The results were compared with those obtained by the solver DASSL.

**Key words** nonholonomic constraints, differential-algebraic equations (DAEs), generalized-α method, α-RATTLE method

Received 23 March 2008, revised 21 April 2008.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60574053) and the National High-Tech Research and Development Plan of China (2006AA110105)