

考虑参数不确定性的主动悬架鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制*

宋刚 林家浩 吴志刚

(大连理工大学运载工程与力学学部,工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

摘要 基于线性矩阵不等式方法,提出了一种新的考虑参数不确定性的鲁棒 H_2/H_∞ 控制器设计方法,并用于车辆主动悬架设计.假定系统不确定参数是范数有界的,通过引入同一个 Lyapunov 矩阵来同时满足闭环系统的 H_2 和 H_∞ 性能条件,把鲁棒 H_2/H_∞ 控制器设计转化为具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,进而应用内点法等凸优化技术进行求解.以四分之一车辆模型主动悬架设计为例,进行了数值仿真.结果表明,无论车辆簧上质量是否存在变异,鲁棒 H_2/H_∞ 控制器均能给出很好的控制效果.

关键词 主动悬架, 鲁棒 H_2/H_∞ 控制, 线性矩阵不等式, 参数不确定性

引言

为了更好地改进车辆的操纵稳定性和行驶平顺性,近半个世纪以来智能悬架的研究和开发日益引起了人们广泛的兴趣.其主要思想是根据悬架系统的状况和当前路面激励,通过施加主动控制力,或者主动地调节悬架系统的刚度或阻尼系数,来实现操纵稳定性和行驶平顺性的提高. Yoshimura 等^[1]结合线性反馈控制和模糊控制,考虑悬架刚度和阻尼的非线性特性,对二分之一车辆模型进行了研究;文献[2~4]采用预瞄控制策略分别对主动和半主动悬架在连续或离散系统框架内进行了研究,说明若在车身前部安装路面位移传感器,可有效改善主动或半主动悬架的性能;史明光等^[5]采用 H_∞ 控制方法进行电液主动悬架设计,通过选取适当的加权函数对系统的频域性能指标进行了整定;Chen 和 Guo^[6]把轮胎动载荷、悬架动行程和所需控制力作为硬约束条件,提出了基于线性矩阵不等式优化技术的多目标控制策略.除此之外,在悬架设计中常用的控制策略还有神经网络控制^[7],滑模控制^[8],自适应控制^[9],等等.

车辆因载重不同或其它原因,致使簧上质量或其它结构参数会在一定范围内变化.为避免因参数不确定所带来的控制系统性能恶化甚至失效,在控制器设计时采用鲁棒性较强的一些控制方法是非常有必要的:Doyle^[10]通过算例说明 LQG 控制方法

稳定裕度非常有限;陈虹等^[11]对以不同速度在不同路面上行驶的车辆,分析了基于名义系统模型设计的 H_2 控制器和 H_∞ 控制器在各种不确定因素(簧上质量、轮胎刚度、悬架刚度和悬架阻尼)下的鲁棒性,指出控制系统的性能会随着结构不确定因素的增多而降低,但 H_∞ 主动悬架比 H_2 主动悬架能更好地容忍系统的不确定性.为增强在参数不确定情况下控制系统的稳定性,Xie 等^[12]提出了考虑参数不确定性的鲁棒 H_∞ 控制方法.多目标控制在某些情况下比单目标控制更容易兼顾控制系统的各项性能^[13],Wu 和 Fei^[14]提出了考虑参数不确定的鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制方法,并把该问题的求解转化为求解含有尺度参数的修正代数 Riccati 方程和含有尺度参数的交叉耦合非线性方程.

本文针对车辆主动悬架设计,考虑车辆可能发生的簧上质量变异,在以往关于结构鲁棒控制研究^[15,16]和随机振动高效计算方法研究成果^[17]的基础上,把车辆主动悬架设计问题归结为参数不确定系统的鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制问题,提出了一种新的车辆主动悬架控制策略.不同于文献[14]给出的此类问题求解方法,本文采用线性矩阵不等式方法,通过引入同一个 Lyapunov 矩阵来同时满足闭环系统的 H_2 和 H_∞ 性能条件,把鲁棒 H_2/H_∞ 控制器设计转化为具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,进而可以应用内点法等凸优化技术进行求解.本文方法简洁直观,在控制器设计时不需要过

多地调试参数,使鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制器的设计更易实现.以四分之一车辆模型为例,在频域内和时域内分别对被动悬架和采用本文提出的鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制策略的主动悬架系统进行了数值仿真.

1 鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制

1.1 系统描述

考虑如下线性不确定连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1w + (B_2 + \Delta B_2)u \\ z_1 = C_1x + D_{12}u \\ z_2 = C_2x + D_{22}u \\ y = (C_y + \Delta C_y)x + D_{y1}w + (D_{y2} + \Delta D_{y2})u \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x \in R^n$ 为系统状态向量; $u \in R^m$ 为控制输入; $w \in R^l$ 为外部扰动; $z_1 \in R^p$ 和 $z_2 \in R^q$ 为控制输出向量,分别与 H_∞ 性能指标和 H_2 性能指标相关; $y \in R^r$ 为量测输出向量; $A, B_1, B_2, C_1, D_{12}, C_2, D_{22}, C_y, D_{y1}$ 和 D_{y2} 为已知的具有适当维数的常数实矩阵; $\Delta A, \Delta B_2, \Delta C_y$ 和 ΔD_{y2} 为未知实矩阵,反映系统模型中的参数不确定性.假定参数不确定性是范数有界的,且具有以下形式:

$$\begin{aligned} [\Delta A \quad \Delta B_2] &= D_1F[E_1 \quad E_2], \\ [\Delta C_y \quad \Delta D_{y2}] &= D_2F[E_1 \quad E_2] \end{aligned} \quad (2)$$

其中, D_1, D_2, E_1 和 E_2 为已知常数实矩阵,反映了不确定参数的结构信息; F 为适当维数的不确定实矩阵,满足 $F^T F \leq I$,其中 I 表示单位阵.

1.2 鲁棒 H_2/H_∞ 输出反馈控制器设计

考虑如下满阶动态输出反馈控制器:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} RA + A^T R + \hat{B}C_y + C_y^T \hat{B}^T & A^T + \hat{A} & RB_1 + \hat{B}D_{y1} & C_1^T \\ A + \hat{A}^T & AS + SA^T + B_2 \hat{C} + \hat{C}^T B_2^T & B_1 & SC_1^T + \hat{C}^T D_{12}^T \\ B_1^T R + D_{y1}^T \hat{B}^T & B_1^T & -I & 0 \\ C_1 & C_1 S + D_{12} \hat{C} & 0 & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} RD_1 + \hat{B}D_2 & E_1^T \\ D_1 & SE_1^T + \hat{C}^T E_2^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{-1}I & 0 \\ 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_k \hat{x}(t) + B_k y(t) \\ u(t) = C_k \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\hat{x} \in R^n$ 为控制器的状态, A_k, B_k 和 C_k 为待确定的控制器参数矩阵.将控制器(3)应用到系统(1),并利用式(2),可得闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{D}F\bar{E})\bar{x} + \bar{B}w \\ z_1 = \bar{C}_1\bar{x} \\ z_2 = \bar{C}_2\bar{x} \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_k \\ B_k C_y & A_k + B_k D_{y2} C_k \end{bmatrix}, \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} D_1 \\ B_k D_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = [E_1 \quad E_2 C_k], \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_k D_{y1} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_1 &= [C_1 \quad D_{12} C_k], \quad \bar{C}_2 = [C_2 \quad D_{22} C_k] \end{aligned}$$

定理 如果存在标量 $\varepsilon > 0$, 对称正定矩阵 R, S, Z 和适当维数实矩阵 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & J_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -Z & C_2 & C_2 S + D_{22} \hat{C} \\ C_2^T & -R & -I \\ SC_2^T + \hat{C}^T D_{22}^T & -I & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$\text{trace}(Z) < \gamma_2^2 \quad (7)$$

其中

则不确定系统(1)存在一个鲁棒 H_2/H_∞ 输出反馈控制器(3),使得闭环系统渐近稳定,且从 w 到 z_1 的传递函数 $T_{z_1 w}(s)$ 满足 $\|T_{z_1 w}(s)\|_\infty < \gamma_1$,从 w 到 z_2 的传递函数 $T_{z_2 w}(s)$ 满足 $\|T_{z_2 w}(s)\|_\infty < \gamma_2$.进一步,如果不等式(5)~式(7)可解,通过对矩阵 $I - RS$ 进行奇异值分解,得到可逆实矩阵 M 和 N ,满足 $MN^T = I - RS$ (8)

则控制器参数矩阵 A_k 、 B_k 和 C_k 可通过以下式子得到:

$$A_k = M^{-1}(\hat{A} - RAS - \hat{B}C_yS - RB_2\hat{C} - \hat{B}D_{y2}\hat{C})N^{-T} \quad (9)$$

$$B_k = M^{-1}\hat{B} \quad (10)$$

$$C_k = \hat{C}N^{-T} \quad (11)$$

下面给出定理的证明:

利用有界实引理, 闭环系统(4)渐近稳定, 且从 w 到 z_1 的传递函数 $T_{z_1w}(s)$ 满足 $\|T_{z_1w}(s)\|_\infty < \gamma_1$ 的充要条件为存在对称正定矩阵 X_1 , 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{D}\bar{F}\bar{E})X_1 + X_1(\bar{A} + \bar{D}\bar{F}\bar{E})^T & \bar{B} & X_1\bar{C}_1^T \\ \bar{B}^T & -I & 0 \\ \bar{C}_1X_1 & 0 & -\gamma_1^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

另一方面, 由文献[18, 19], 闭环系统(4)渐近稳定, 且从 w 到 z_2 的传递函数 $T_{z_2w}(s)$ 满足 $\|T_{z_2w}(s)\|_2 < \gamma_2$ 的充要条件为存在对称正定矩阵 X_2 和 Z , 使得式(7)及以下矩阵不等式成立

$$(\bar{A} + \bar{D}\bar{F}\bar{E})X_2 + X_2(\bar{A} + \bar{D}\bar{F}\bar{E})^T + \bar{B}\bar{B}^T < 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -Z & \bar{C}_2X_2 \\ X_2\bar{C}_2^T & -X_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

若 $X_1 = X_2$, 这时, 由矩阵的 Schur 补性质^[18], 式(13)由式(12)自动得到满足. 引入附加约束, 令 $X_1 = X_2 = X$, 并对 X 进行如下分块:

$$X = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & W \end{bmatrix}, X^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & U \end{bmatrix} \quad (15)$$

对于满阶输出反馈控制器, $S, N \in R^{n \times n}$, $R, M \in R^{n \times n}$. 由文献[20]引理3, 只要正定对称矩阵 R 和 S 满足

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (16)$$

便可保证 $X > 0$. 引入矩阵

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

利用 $XX^{-1} = I$, 可得

$$MN^T = I - RS, \quad X\Phi_1 = \Phi_2, \quad \Phi_1^T X \Phi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \quad (18)$$

下面分别对式(12)和式(14)进行变量替换. 由文献[19]引理2及矩阵的 Schur 补性质, 式(12)对所有满足 $F^T F \leq I$ 的不确定矩阵 F 成立的充要条件为存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X + X\bar{A}^T + \varepsilon\bar{D}\bar{D}^T + \varepsilon^{-1}X\bar{E}^T\bar{E}X & \bar{B} & X_1\bar{C}_1^T \\ \bar{B}^T & -I & 0 \\ \bar{C}_1X & 0 & -\gamma_1^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

由矩阵的 Schur 补性质, 式(19)等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X + X\bar{A}^T & \bar{B} & X\bar{C}_1^T & \bar{D} & X\bar{E}^T \\ \bar{B}^T & -I & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_1X & 0 & -\gamma_1^2I & 0 & 0 \\ \bar{D}^T & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1}I & 0 \\ \bar{E}X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

定义:

$$\hat{A} = RAS + MB_kC_yS + RB_2C_kN^T + MA_kN^T + MB_kD_{y2}C_kN^T \quad (21)$$

$$\hat{B} = MB_k \quad (22)$$

$$\hat{C} = C_kN^T \quad (23)$$

对式(20)左边的矩阵分别左乘 $\text{diag}\{\Phi_1^T, I, I, I, I\}$ 和右乘 $\text{diag}\{\Phi_1, I, I, I, I\}$, 即可得到式(5). 对式(14)左边的矩阵分别左乘 $\text{diag}\{I, \Phi_1^T\}$ 和右乘 $\text{diag}\{I, \Phi_1\}$, 即可得到式(6). 式(16)可由式(6)自动得到满足. 证毕.

需要说明的是, 若在控制器设计时不考虑可能的参数不确定性, 即取 $D_1 = 0, D_2 = 0, E_1 = 0, E_2 = 0$, 则式(5)~式(7)就退化为传统的基于名义系统模型的 H_2/H_∞ 输出反馈控制.

1.3 鲁棒 H_2/H_∞ 控制器设计具体步骤

下面给出鲁棒 H_2/H_∞ 输出反馈控制器设计的具体步骤:

1) 给定 $\varepsilon > 0$, 求解如下凸优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{R,S,A,B,C} \gamma_1^2 \\ & \text{s. t. (i) 式(5)} \\ & \quad \text{(ii) 式(16)} \end{aligned} \quad (24)$$

问题(24)的求解可以采用凸优化技术,如内点法, MATLAB 语言 LMI 工具箱也提供了求解器“mincx”.

- 2) 若问题(24)不可解,重新给定 ε ,重复步骤 1.
- 3) 重复步骤 1 和步骤 2. 对每个可行的 ε ,记 $\varepsilon = \varepsilon_i$ 时由问题(24)所得到的最小 γ_1 为 γ_{1i}^* .
- 4) 取 $\varepsilon = \varepsilon_i, \gamma_1 > \gamma_{1i}^*$,在满足扰动抑制度 γ_1 下使闭环系统的 H_2 性能指标尽可能地小:

$$\begin{aligned} & \min \gamma_2^2 \\ & s. t. \quad (i) \text{ 式(5)} \\ & \quad \quad (ii) \text{ 式(6)} \\ & \quad \quad (iii) \text{ 式(7)} \end{aligned}$$

保存最优解 R, S, A, B 和 C ; 记所得到的最小 γ_2 为 γ_{2opt} . (25)

5) 由 $MN^T = I - RS$, 对 $I - RS$ 进行奇异值分解,得到可逆实矩阵 M 和 N ; 进而,根据式(9) ~ (11),计算得到控制器参数矩阵 A_k, B_k 和 C_k .

6) 保持 ε 取值不变,取不同的扰动抑制度 γ_1 ,重复步骤 4 和步骤 5.

7) ε 取值改变,重复步骤 4 ~ 步骤 6. 综合比较闭环系统的各项性能,确定最终的 ε, γ_1 及其所对应的鲁棒 H_2/H_∞ 控制器.

2 主动悬架鲁棒 H_2/H_∞ 混合控制

取四分之一车辆模型,如图 1. 各符号含义: 簧上质量 m_s , 车轮质量 m_u , 悬架刚度 k_s , 悬架阻尼系数 c_s , 轮胎刚度 k_t , 路面不平度 z_0 , 控制力 u . 假定因载重不同等原因,使簧上质量存在变异,记 $m_s = m_{s0} + \Delta m_s$, 其中 m_{s0} 表示名义簧上质量, Δm_s 表示簧上质量的变异. 假定主动悬架无预瞄信息可以利用. 忽略作动器动态特性.

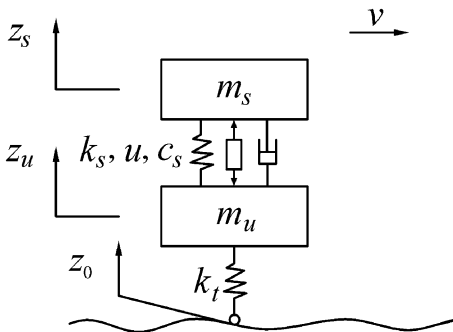


图 1 车辆模型

Fig. 1 Model of vehicle

车辆运动方程可写为:

$$m_s \ddot{z}_s + c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s (z_s - z_u) - u = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & m_u \ddot{z}_u + c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_s (z_s - z_u) + \\ & k_t (z_u - z_0) + u = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

式(26)和式(27)可整理为:

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}_1 w_1 + \tilde{B}_2 u \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} x &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}^T, x_1 = z_s - z_u, \\ x_2 &= z_u - z_0, x_3 = \dot{z}_s, x_4 = \dot{z}_u \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s/m_s & 0 & -c_s/m_s & c_s/m_s \\ k_s/m_u & -k_t/m_u & c_s/m_u & -c_s/m_u \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_s \\ -1/m_u \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$w_1 = \dot{z}_0$$

假定悬架动行程和车身竖向加速度可以量测,并考虑到量测噪声,有

$$y = \tilde{C}_y x + \tilde{D}_{y2} u + w_2 \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} y &= \begin{Bmatrix} z_s - z_u \\ \dot{z}_s \end{Bmatrix} + w_2, \\ \tilde{C}_y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s/m_s & 0 & -c_s/m_s & c_s/m_s \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_{y2} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/m_s \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

w_2 为量测噪声向量,可假定各量测噪声均为零均值、彼此互不相关、且与路面激励也互不相关的平稳高斯白噪声,满足

$$\begin{aligned} E[w_2(t)] &= 0, \text{cov}[w_2(t_1), \\ w_2(t_2)] &= R_t \delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (30)$$

其中,“E”和“cov”分别表示均值和协方差, R_t 为量测噪声强度矩阵, δ 为 Dirac 函数.

考虑到车辆簧上质量的变异,式(28)和式(29)可写为式(1)中的形式,如下:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + (B_2 + \Delta B_2)u \quad (31)$$

$$y = (C_y + \Delta C_y)x + D_{y1} w + (D_{y2} + \Delta D_{y2})u \quad (32)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_s/m_{s0} & 0 & -c_s/m_{s0} & c_s/m_{s0} \\ k_s/m_u & -k_t/m_u & c_s/m_u & -c_s/m_u \end{bmatrix}$$

$$B_1 = [\bar{B}_1 \quad 0], B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_{s0} \\ -1/m_u \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s/m_{s0} & 0 & -c_s/m_{s0} & c_s/m_{s0} \end{bmatrix},$$

$$D_{y1} = [0 \quad I], D_{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_{s0} \end{bmatrix} \quad (33)$$

而 $\Delta A, \Delta B_2, \Delta C_y$ 和 ΔD_{y2} 可表示为式(2)的形式,其中

$$D_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T,$$

$$E_1 = [-\alpha k_s/m_{s0} \quad 0 \quad -\alpha c_s/m_{s0} \quad \alpha c_s/m_{s0}]$$

$$D_2 = [0 \quad 1]^T, F = \bar{\delta}, E_2 = \alpha/m_{s0} \quad (34)$$

这里, α 和 $\bar{\delta}$ 为实标量, 反映簧上质量的变异程度; α 在控制器设计时给定, 满足 $|\bar{\delta}| \leq 1$.

3 仿真计算

取车辆参数为^[3]: $m_{s0} = 250\text{kg}, m_u = 30\text{kg}, k_s = 1 \times 10^4\text{N/m}, k_t = 1 \times 10^5\text{N/m}, c_s = 1000\text{Ns/m}$; 假定因车辆载重不同等原因引起 Δm_s 在 $-30\text{kg} \sim +70\text{kg}$ 之间变化, 在控制器设计时取 $\alpha = 0.22$ (α 含义见式(34)). 车身竖向加速度和轮胎动挠度分别反映车辆的乘坐舒适性和操纵稳定性, 本文控制器设计的目的是使车辆行驶过程中车身竖向加速度尽可能地降低, 同时避免悬架动行程和轮胎动挠度过大地增加, 此外控制力应被限制在一个可以接受的水平. 鉴于本文的重点是给出更快捷方便的鲁棒 H_2/H_∞ 控制器的实现方法, 而该控制方法与其他控制方法之间的数值比较并不是本文的重点; 这里仅给出被动悬架与鲁棒 H_2/H_∞ 控制主动悬架的数值仿真结果. 取控制输出向量系数矩阵

$$C_1 = \begin{bmatrix} -k_s/m_{s0} & 0 & -c_s/m_{s0} & c_s/m_{s0} \\ \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1/m_{s0} \\ 0 \\ 0 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -k_s/m_{s0} & 0 & -c_s/m_{s0} & c_s/m_{s0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{22} = \begin{bmatrix} 1/m_{s0} \\ \rho_4 \end{bmatrix}$$

其中 $\rho_1 = 20, \rho_2 = 400, \rho_3 = 1 \times 10^{-2}, \rho_4 = 3 \times 10^{-3}$; C_1, D_{12}, C_2 和 D_{22} 含义见式(1).

图2给出了 $\varepsilon = 30$ 时, 所得的闭环系统 H_2 性能与扰动抑制度 γ_1 之间的关系, 其中 ε, γ_1 和 γ_{2opt} 含义见优化问题(25). 可以看出, 当 γ_1 取值接近系统最优 H_∞ 范数时, 闭环系统的 H_2 性能指标随着 γ_1 的减少增加很快. 综合比较闭环系统的 H_∞ 性能和 H_2 性能, 在鲁棒 H_2/H_∞ 控制器设计时, 取 $\varepsilon = 30, \gamma_1 = 200$.

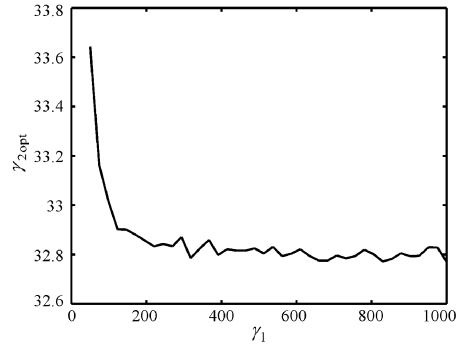


图2 闭环系统 H_2 性能与 H_∞ 性能间的关系 ($\varepsilon = 30$)

Fig. 2 H_2/H_∞ trade-off curve of closed-loop systems when $\varepsilon = 30$

取路面输入 z_0 为零均值平稳随机过程, 其单边功率谱密度满足^[21]:

$$G_z(n) = G_r \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-2} \quad (35)$$

这里, n 为空间频率, G_r 为参考空间频率 n_0 下的路面功率谱密度值, $n_0 = 0.1\text{m}^{-1}$. 仿真中采用 C 级路面谱, $G_r = 256 \times 10^{-6}\text{m}^3$. 若车辆以恒定速度 v 直线行驶, 路面输入 w_1 可认为是零均值平稳高斯白噪声 (w_1 含义见式(28)), 记其强度为 R_w , 有

$$R_w = \pi S_w, S_w = 2\pi v n_0^2 G_r \quad (36)$$

仿真中取行车速度 $v = 20\text{m/s}$. 取量测噪声强度矩阵

$$R_v = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (37)$$

首先采用虚拟激励法^[17]对被动悬架和采用鲁棒 H_2/H_∞ 控制策略的主动悬架动力响应进行随机振动分析. 路面功率谱上、下截止频率分别取为 2.83m^{-1} 和 0.011m^{-1} . 表 1 给出了不同簧上质量变异情况下, 控制前后车身竖向加速度 \ddot{z}_s 、悬架动行程 $z_s - z_u$ 、轮胎动挠度 $z_u - z_0$ 的均方根值, 以及主动悬架作动器输出控制力 u 的均方根值. 可以看出, 对于不同程度的簧上质量变异, 鲁棒 H_2/H_∞ 控制器均能实现较好

的控制效果: 与被动悬架相比, 主动悬架显著地降低了车身竖向加速度, 同时又避免了悬架动行程和轮胎动挠度过大的增加(悬架动行程均方根值略有降低, 而轮胎动挠度均方根值略有增大). 当实际簧上质量与名义簧上质量完全一致时, 被动悬架车身竖向加速度均方根值为 1.017m/s^2 , 而主动悬架为 0.874m/s^2 , 降低了 14.1%; 对于簧上质量存在较大变异 ($\Delta m_s = +70\text{kg}$) 的情况, 控制前后车身竖向加速度均方根值分别为 0.816m/s^2 和 0.708m/s^2 , 降低了 13.2%. 显示了较好的鲁棒性.

表 1 控制前后车辆响应均方根值

Table 1 Mean square roots of vehicle responses with and without robust H_2/H_∞ control

Perturbationcases		Mean square roots			
		$\ddot{z}_s (\text{m/s}^2)$	$z_s - z_u (\text{mm})$	$z_u - z_0 (\text{mm})$	$u (\text{N})$
$\Delta m_s = 0$	Uncontrolled	1.017	11.89	4.35	—
	Controlled	0.874	11.59	4.62	72.40
$\Delta m_s = -30\text{kg}$	Uncontrolled	1.142	11.23	4.35	—
	Controlled	0.975	11.13	4.68	77.71
$\Delta m_s = +30\text{kg}$	Uncontrolled	0.919	12.51	4.36	—
	Controlled	0.793	12.03	4.58	68.26
$\Delta m_s = +70\text{kg}$	Uncontrolled	0.816	13.29	4.37	—
	Controlled	0.708	12.61	4.53	63.99

表 2 控制前后车身竖向加速度频率加权均方根值

Table 2 Frequency-weighted mean square roots

of vertical body accelerations with and without robust H_2/H_∞ control

Perturbationcases	Frequency-weighted mean square roots of \ddot{z}_s		
	Uncontrolled(m/s^2)	Robust H_2/H_∞ control(m/s^2)	Reduction
$\Delta m_s = 0$	0.874	0.790	9.6%
$\Delta m_s = -30\text{kg}$	0.992	0.888	10.5%
$\Delta m_s = +30\text{kg}$	0.782	0.712	9.0%
$\Delta m_s = +70\text{kg}$	0.686	0.629	8.3%

表 3 控制前后车辆峰值响应

Table 3 Maximum vehicle responses with and without robust H_2/H_∞ control

Perturbationcases	Peak responses				
	$\ddot{z}_s (\text{m/s}^2)$	$z_s - z_u (\text{mm})$	$z_u - z_0 (\text{mm})$	$u (\text{N})$	
$\Delta m_s = 0$	Uncontrolled	3.640	47.87	15.26	—
	Controlled	3.103	36.98	15.00	218.30
$\Delta m_s = -30\text{kg}$	Uncontrolled	4.026	45.71	15.09	—
	Controlled	3.439	34.91	15.00	240.03
$\Delta m_s = +30\text{kg}$	Uncontrolled	3.314	48.43	15.37	—
	Controlled	2.825	39.22	15.00	200.25
$\Delta m_s = +70\text{kg}$	Uncontrolled	2.928	50.69	15.37	—
	Controlled	2.521	41.84	14.99	190.18

图 3~图 5 给出了车辆簧上质量存在 $\Delta m_s = +70\text{kg}$ 的变异时, 被动悬架和主动悬架车身竖向加速度、

悬架动行程和轮胎动挠度响应的功率谱曲线. 车辆各阶自振频率分别为 5.33rad/s 和 60.58rad/s . 可

以看出,车辆响应功率谱峰值出现在车辆自振频率附近.图3显示,与被动悬架相比,主动

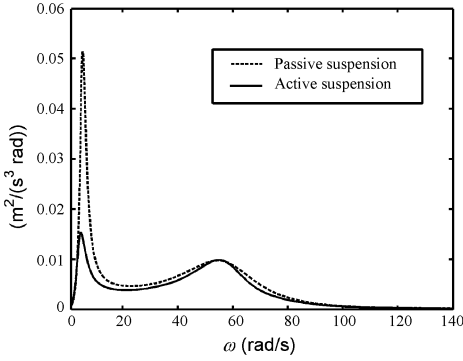


图3 车身竖向加速度响应功率谱曲线(Δm_s = +70kg)

Fig. 3 Power spectral densities of vertical body acceleration responses when Δm_s = +70kg

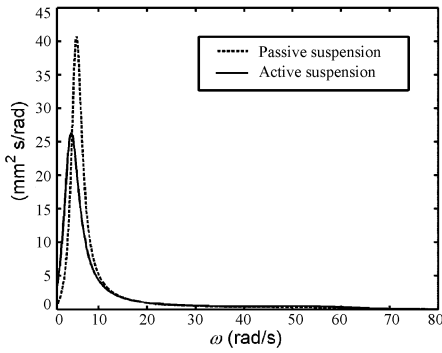


图4 悬架动行程响应功率谱曲线(Δm_s = +70kg)

Fig. 4 Power spectral densities of suspension working space responses when Δm_s = +70kg

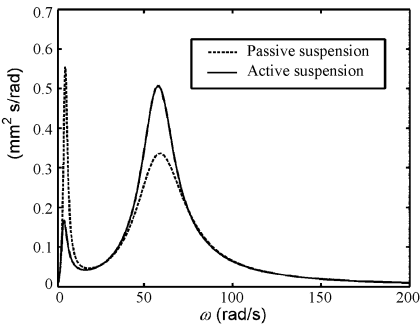


图5 轮胎动挠度响应功率谱曲线(Δm_s = +70kg)

Fig. 5 Power spectral densities of dynamic tyre deflection responses when Δm_s = +70kg

悬架车身竖向加速度响应功率谱低频段峰值得到了较大的降低.而图5表明,由路面激励引发的轮胎动挠度响应频率分布带宽较宽,在高频部分有相

当大的能量分布;施加控制力后,轮胎动挠度功率谱峰值虽在高频段有所增大,但在低频段却得到了较大的降低.

由于人体对不同频段的振动敏感程度不同,为了更好地反映主动悬架所带来的车辆乘坐舒适性的变化,表2给出了不同簧上质量变异情况下,被动悬架和主动悬架车身竖向加速度频率加权均方根值.关于频率加权加速度均方根值的计算,采用ISO2631-1:1997(E)标准^[21]:

$$a_w = \left[\int_{0.5}^{80} w_k^2(f) G_a(f) df \right]^{1/2} \quad (38)$$

其中, $G_a(f)$ 为加速度响应单边功率谱; f 表示频率,单位为 Hz; $w_k(f)$ 为频率加权函数,采用

$$w_k(f) = \begin{cases} 0.5 & (0.5 < f \leq 2) \\ f/4 & (2 < f \leq 4) \\ 1 & (4 < f \leq 12.5) \\ 12.5/f & (12.5 < f < 80) \end{cases} \quad (39)$$

从表2可以看出,对于不同程度的簧上质量变异,控制后车辆的乘坐舒适性都得到了提高.当簧上质量不存在变异时,控制前车身竖向加速度频率加权均方根值为 0.874 m/s^2 ,而控制后降为 0.790 m/s^2 ,降低了 9.6%;当簧上质量存在 $\Delta m_s = +70 \text{ kg}$ 的变异时,控制前车身竖向加速度频率加权均方根值为 0.686 m/s^2 ,而控制后降为 0.629 m/s^2 ,降低了 8.3% .

此外,表3给出了被动悬架和主动悬架在时域内的仿真计算结果.其中,人工生成道路激励和量测噪声时程曲线,仿真时间取为 20s.同样可以看出,对于不同程度的簧上质量变异,鲁棒 H_2/H_∞ 控制器均能实现较好的控制效果:与被动悬架相比,主动悬架车身竖向加速度峰值响应得到了较大的降低,同时,悬架动行程峰值响应和轮胎动挠度峰值响应也有不同程度的降低.

4 结论

本文基于线性矩阵不等式处理方法,给出了考虑参数不确定性的鲁棒 H_2/H_∞ 输出反馈控制器存

在的充分条件及其设计方法,并以四分之一车辆模型主动悬架设计为例分别在频域内和时域内进行了数值仿真.数值结果表明,即使车辆簧上质量存在较大变异,本文建议的鲁棒 H_2/H_∞ 控制器仍能实现很好的控制效果.

参 考 文 献

- 1 T. Yoshimura, K. Nakaminami, M. Kurimoto, J. Hino. Active suspension of passenger cars using linear and fuzzy-logic controls. *Control Engineering Practice*, 1999, 7(1): 41 ~ 47
- 2 J. Marzbanrad, G. Ahmadi, H. Zohoor, Y. Hojjat. Stochastic optimal preview control of a vehicle suspension. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275(3-5): 973 ~ 990
- 3 H. S. Roh, Y. Park. Stochastic optimal preview control of an active vehicle suspension. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 220(2): 313 ~ 330
- 4 A. Hac, I. Youn. Optimal design of active and semi-active suspensions including time delays and preview. *Journal of Vibration and Acoustics (ASME)*, 1993, 115: 498 ~ 508
- 5 史明光, 方敏, 陈无畏. 基于 LMI 的四自由度车辆模型主动悬架 H_∞ 控制. 合肥工业大学学报, 2004, 27(3): 237 ~ 241 (Shi Mingguang, Fang Min, Chen Wuwei. H_∞ control for the active suspension system in the 4 degree-of-freedom half-vehicle model based on the LMI method. *Journal of Hefei University of Technology*, 2004, 27(3): 237 ~ 241 (in Chinese))
- 6 H Chen, KH Guo. Constrained H_∞ control of active suspensions: an LMI approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, 13(3): 412 ~ 421
- 7 姜立标, 王薇, 谢东, 等. 汽车半主动空气悬架自适应模糊神经网络控制. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(12): 1747 ~ 1750 (Jiang Libiao, Wang Wei, Xie Dong, et al. Self-adaptive fuzzy neural network control for automotive semi-active air suspension. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2005, 37(12): 1747 ~ 1750 (in Chinese))
- 8 郑玲, 邓兆祥, 李以农. 汽车半主动悬架的滑模控制及鲁棒性. 汽车工程, 2004, 26(6): 678 ~ 682 (Zheng Ling, Deng Zhaoxiang, Li Yinong. Sliding mode control for semi-active suspension systems and its robustness. *Automotive Engineering*, 2004, 26(6): 678 ~ 682 (in Chinese))
- 9 孙建民, 柳贡民. 基于 LMS 自适应滤波的汽车主动悬架研究. 振动与冲击, 2004, 23(4): 139 ~ 143 (Sun Jianmin, Liu Gongmin. Study on automobile active suspension based on LMS adaptive filter. *Journal of Vibration and Shock*, 2004, 23(4): 139 ~ 143 (in Chinese))
- 10 JC Doyle. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, AC-23(4): 756 ~ 757
- 11 陈虹, 赵桂军, 孙鹏远, 郭孔辉. H_2 和 H_∞ 主动悬架统一的理论框架与比较. 汽车工程, 2003, 25(1): 1 ~ 6 (Chen Hong, Zhao Guijun, Sun Pengyuan, Guo Konghui. H_2 and H_∞ active suspensions: a unified theoretic framework and comparison. *Automotive Engineering*, 2003, 25(1): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 12 LH Xie, MY Fu, CE de Souza. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1253 ~ 1256
- 13 张远勤, 林桐, 穆静, 严世榕. 基于 LMI 的建筑结构地震动 H_2/H_∞ 混合控制. 福州大学学报(自然科学版), 2004, 32(1): 60 ~ 64 (Zhang Yuanqin, Lin Tong, Mu Jing, Yan Shirong. H_2/H_∞ control for seismic-excited buildings based on linear matrix inequalities (LMI). *Journal of Fuzhou University (Natural Science)*, 2004, 32(1): 60 ~ 64 (in Chinese))
- 14 HN Wu, YC Fei. Mixed H_2/H_∞ robust output feedback control for uncertain linear systems. *Control Theory and Applications*, 2000, 17(3): 367 ~ 373
- 15 吴志刚. 线性鲁棒控制的理论与计算. 大连: 大连理工大学出版社, 2003 (Wu Zhigang. Theory and computation of linear robust control. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003 (in Chinese))
- 16 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算. 北京: 科学出版社, 2007 (Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Tan Shujun. Theory and computation of control based on state space. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese))

- 17 林家浩,张亚辉. 随机振动的虚拟激励法. 北京:科学出版社,2004 (Lin Jiahao, Zhang Yahui. Pseudo-excitation method for random vibration analysis. Beijing: Science Press,2004(in Chinese))
- 18 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法. 北京:清华大学出版社,2002(Yu Li. Robust control:linear matrix inequality approach. Beijing: Tsinghua University Press, 2002(in Chinese))
- 19 CT Lai,CH Fang,SW Kau,CH Lee. Robust H_2 control of norm-bounded uncertain continuous-time system-an LMI approach. 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, 2004; 243 ~ 248
- 20 CT Qin,GR Duan. Optimal robust guaranteed cost control of uncertain linear continuous time systems via dynamical output feedback. Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, China, 2006; 2441 ~ 2445
- 21 余志生. 汽车理论. 北京:机械工业出版社,2000(Yu Zhisheng. Automotive Engineering. Beijing:China Machine Press,2000(in Chinese))

ROBUST H_2/H_∞ CONTROL OF ACTIVE VEHICLE SUSPENSION SUBJECTED TO PARAMETER UNCERTAINTIES*

Song Gang Lin Jiahao Wu Zhigang

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,

Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract Based on the linear matrix inequality method, a new approach to the design of robust H_2/H_∞ controllers for linear systems with parameter uncertainties was proposed. The parameter uncertainties considered were assumed to be norm-bounded. By introducing a Lyapunov matrix to meet the H_2 and H_∞ performance constraints simultaneously for the resulting closed-loop system, the robust H_2/H_∞ controller design was transformed into a convex optimal problem with constraints of linear matrix inequalities, to which the existing convex optimization techniques such as the interior-point algorithm can be applied. To show the effect of the proposed robust H_2/H_∞ controller, the dynamic responses of a quarter car model with an active suspension subjected to road surface irregular excitations, either as a stationary random process or as a discrete time-history, were investigated. Numerical results show that whether the variation of the vehicle mass exists or not, the proposed robust H_2/H_∞ controller behaves very satisfactorily.

Key words active suspension, robust H_2/H_∞ control, linear matrix inequalities, parameter uncertainties