

Qi 系统的 Hopf 分叉分析与幅值控制*

刘素华^{1,2} 赵成刚² 唐驾时¹ 杨先林^{1,3}

(1. 湖南大学力学与航空航天学院,长沙 410082)(2. 安阳工学院机械工程系,安阳 455000)

(3. 湖南广播电视大学,长沙 410004)

摘要 通过非线性状态反馈,不改变 Hopf 分叉点,实现对四维 Qi 系统极限环的幅值控制.推导出 Qi 系统在第一类非零平衡点上产生 Hopf 分叉的条件,绘制第一类平衡点的分叉图.采用 washout filter 非线性控制律,利用中心流形定理对受控系统降维,得到极限环的幅值与控制增益之间的近似解析式.通过数值模拟以及幅值解析解与数值解的比较,验证幅值预测的正确性与控制的有效性.

关键词 Qi 系统, Hopf 分叉, 极限环, 幅值控制

引言

非线性动力系统分叉控制具有重要的理论研究和实际应用价值,其理论、方法及应用在文献[1]已有系统的阐述.分叉控制的主要任务是设计控制律改变非线性系统的分叉特性,获得所需要的动力学行为,例如,创建 Hopf 分叉^[2],倍周期分叉控制^[3],分叉稳定性控制^[4],极限环幅值控制^[5]等;其控制方法主要有谐波平衡法^[6],多尺度法^[7],状态反馈控制法^[8]以及时滞反馈控制^[9]等.四维 Qi 系统的每个方程都具有三次交叉乘积的强非线性项,数值计算表明它具有极其复杂的非线性动力学现象^[10],如 Hopf 分叉,倍周期分叉,混沌以及暂态混沌^[11]等.本文分析 Qi 系统的 Hopf 分叉行为,研究其极限环幅值的非线性控制问题.通过推导该系统在第一类平衡点和第二类平衡点上产生 Hopf 分叉的条件,得到确定 Hopf 分叉点的各参数之间的关系式.采用 washout filter 非线性控制律,利用中心流形定理对受控系统降维,得到极限环的幅值与控制增益之间的近似解析式.

1 Hopf 分叉分析

考虑如下 Qi 系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 \\ \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1x_3x_4 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_2x_4 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = -dx_4 + x_1x_2x_3 \quad (1)$$

其中参数 a, b, c, d 均为正实数.

1.1 平衡点

系统(1)具有一个零平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$ 和两类非零平衡点^[12].令

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}, q = \sqrt{cd}, g = p + a + b, \\ h &= p - a + b, m = p - a - b, n = p + a - b \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} x_{11}^* &= \sqrt{gq/(2a)}, x_{21}^* = \sqrt{2aq/g}, \\ x_{31}^* &= \sqrt{hd/(2a)}, x_{41}^* = \sqrt{hq/(2d)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_{12}^* &= \sqrt{mq/(2a)}, x_{22}^* = \sqrt{2aq/m}, \\ x_{32}^* &= \sqrt{nd/(2a)}, x_{42}^* = \sqrt{nq/(2d)} \end{aligned} \quad (3)$$

则第一类非零平衡点为

$$\begin{aligned} S_{1+}^* &= (x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*), S_{1-}^* = (x_{11}^*, x_{21}^*, -x_{31}^*, -x_{41}^*), \\ S_{1+}^- &= (-x_{11}^*, -x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*), \\ S_{1-}^- &= (-x_{11}^*, -x_{21}^*, -x_{31}^*, -x_{41}^*) \end{aligned} \quad (4)$$

第二类非零平衡点为

$$\begin{aligned} S_{2+}^* &= (x_{12}^*, x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*), S_{2-}^* = (x_{12}^*, x_{22}^*, -x_{32}^*, -x_{42}^*), \\ S_{2+}^- &= (-x_{12}^*, -x_{22}^*, x_{32}^*, x_{42}^*), \\ S_{2-}^- &= (-x_{12}^*, -x_{22}^*, -x_{32}^*, -x_{42}^*) \end{aligned} \quad (5)$$

1.2 Hopf 分叉点

系统(1)在零平衡点 S_0 的线性化矩阵总存在一个特征根 $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + b + \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}) > 0$, 则平衡点 S_0 是鞍点,且在平衡点 S_0 不会产生分叉.

2007-11-06 收到第 1 稿,2008-03-06 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10672053)

由于第一类非零平衡点具有良好的对称性,理论上我们只分析平衡点 S_{1+}^+ 的稳定性问题. 令 $e = 2ab \times (a + 3b - p)$, $f = 2ab(3a + b + p)$, $r = a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - b^3$, 则在平衡点 S_{1+}^+ 上, 系统(1)的线性化矩阵为

$$\begin{pmatrix} -a & \frac{g}{2} & \frac{\sqrt{ce}}{2b} & \frac{\sqrt{de}}{2b} \\ -\frac{m}{2} & b & -\frac{\sqrt{cf}}{2a} & -\frac{\sqrt{df}}{2a} \\ \frac{\sqrt{ce}}{2b} & \frac{\sqrt{cf}}{2a} & -c & q \\ \frac{\sqrt{de}}{2b} & \frac{\sqrt{df}}{2a} & q & -d \end{pmatrix} \quad (6)$$

矩阵(6)所对应的特征方程为

$$f(\lambda) = \lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0 \quad (7)$$

其中

$$A_1 = a - b + c + d,$$

$$A_2 = (c + d)(a - b + \frac{1}{2ab}((a^2 + b^2)p - r)),$$

$$A_3 = ph(c + d) + \frac{2cd}{ab}((a^2 + b^2)p - r),$$

$$A_4 = 4cdph$$

注:上述各式中 g, m, p, q 含义与 1.1 节所设相同.

根据 Routh Hurwitz 判据, 平衡点 S_{1+}^+ 稳定的条件是:

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_4 > 0,$$

$$A_3(A_1A_2 - A_3) - A_4A_1^2 > 0 \quad (8)$$

由于 a, b, c, d 均大于零, 条件(8)简化为

$$a - b + c + d > 0 \quad (9)$$

$$2t^2 + st(c + d)(a - b + c + d) + 4cdph(a - b + c + d)^2 < 0 \quad (10)$$

其中

$$s = 2ab(a - b) + (a^2 + b^2)p - r,$$

$$t = -ab(c + d)ph - 2cd(a^2 + b^2)p + 2cdr.$$

由条件式(10)可确定系统(1)在平衡点 S_{1+}^+ 产生 Hopf 分叉的分叉参数临界值. 在不同的分叉参数与系统参数下^[10], 系统(1)在平衡点产生 Hopf 分叉的分叉值见表 1. 对于表中前两组数据的 Hopf 分叉理论值分别与文献[10]中的分叉图 14(a)和图 12(b)的数值结果相吻合; $a_0 = 8.3782$ 和 $b_0 = 4.2363$ 均为超临界 Hopf 分叉值. 表中后两组数据对于文献[10]的数值模拟作了有益的补充, $c_0 = 506.82$ 和 $d_0 = 36.6626$ 均为亚临界 Hopf 分叉值.

表 1 不同参数下系统(1)在平衡点 S_{1+}^+ 的 Hopf 分叉值
Table 1 The Hopf bifurcation values at the equilibrium point S_{1+}^+ of system(1) with different parameters

| bifurcation parameter | a | b | c | d |
|------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| parameter value | b = 10 | a = 30 | a = 30 | a = 35 |
| | c = 110 | c = 1 | b = 10 | b = 10 |
| | d = 10 | d = 10 | d = 10 | c = 1 |
| Hopf Bifurcation value | $a_0 = 8.3782$ | $b_0 = 4.2363$ | $c_0 = 506.82$ | $d_0 = 36.6626$ |

1.3 Hopf 分叉数值模拟

当系统参数 $b = 10, c = 110, d = 10, a$ 为分叉参数时, 系统(1)的局域分叉图如图 1(a)、(b)所示, 其中图 1(a)中初值 $x_{40} > 0$, 图 1(b)中初值 $x_{40} < 0$. $a_0 = 8.3782$ 为超临界 Hopf 分叉值. 在不同区域选取初值, 分别得到在第一类四个平衡点邻域的 4 个极限环, 如图 2 所示; 其中, 图 2(a)对应于平衡点 S_{1-}^- (初值 $x_{20} < 0, x_{40} > 0$), 图 2(b)对应于平衡点 S_{1+}^+ (初值 $x_{20} > 0, x_{40} > 0$), 图 2(c)对应于平衡点 S_{1-}^- (初值 $x_{20} < 0, x_{40} < 0$), 图 2(d)对应于平衡点 S_{1+}^+ (初值 $x_{20} > 0, x_{40} < 0$).

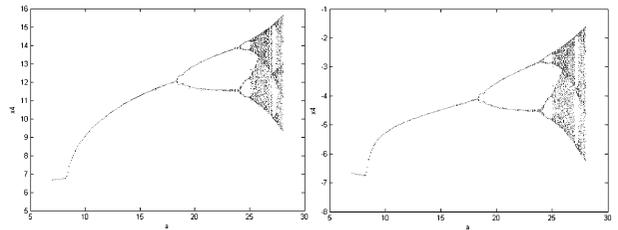


图 1 系统(1)的局域分叉图($b = 10, c = 110, d = 10$);
初值(a) $x_{40} > 0$, (b) $x_{40} < 0$

Fig. 1 Local bifurcation diagrams of system (1) with $b = 10, c = 110, d = 10$ and different initial values (a) $x_{40} > 0$, (b) $x_{40} < 0$

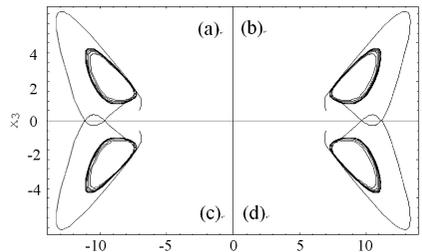


图 2 系统(1)的极限环轨迹($b = 10, c = 110, d = 10, a = 10$)

Fig. 2 Trajectories of limit cycles in system (1) with $b = 10, c = 110, d = 10$ and $a = 10$

2 Hopf 分叉的幅值控制

2.1 非线性控制

不改变系统的 Hopf 分叉点,采用 Washout filter 非线性控制律,对系统(1)作如下控制:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_2x_3x_4 \\
 \dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1x_3x_4 \\
 \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1x_2x_4 + u \\
 \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1x_2x_3 \\
 \dot{v} &= x_1 - \xi v
 \end{aligned} \tag{11}$$

其中控制律 $u = k_n(x_1 - \xi v)^3$, k_n 为待定非线性控制增益, ξ 为一个大于零的时间常数. 受控系统(11)没有改变原系统(1)的平衡点.

与前述对原系统的分析一致,设系统参数 $b = 10, c = 110, d = 10, a$ 为分叉参数. 取控制器时间常数 $\xi = 0.5$, 考虑受控系统(11)的第一类平衡点 $S_{k_1+}^* = (x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*, v_1^*)^T$, 其中 $v_1^* = x_{11}^*/\xi$. 作线性变换 $x = x_{s1}^* + Py$, 其中 $x_{s1}^* = (x_{11}^*, x_{21}^*, x_{31}^*, x_{41}^*, v_1^*)^T$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1.3661 & -0.4866 & -0.2037 & -1.4294 & 0 \\ 0.5728 & 0.4820 & -0.0238 & -2.978 & 0 \\ -0.0773 & 1.0558 & -0.4002 & 1.2914 & 0 \\ -0.0230 & 0.0003 & -0.0631 & -0.0098 & -0.5 \end{pmatrix}$$

得到受控系统(11)的 Jordan 标准型

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -43.4263y_2 + g_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, k_n), \\ \dot{y}_2 = 43.4263y_1 + g_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, k_n), \\ \dot{y}_3 = -16.3495y_3 + g_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, k_n), \\ \dot{y}_4 = -102.029y_4 + g_4(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, k_n), \\ \dot{y}_5 = -0.5y_5 + g_5(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, k_n). \end{cases} \tag{12}$$

上式中 $g_i(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, k_n)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 为非线性项,其具体表达式决定着极限环的大小,限于篇幅,此处省略.

2.2 极限环幅值表达式

通过特征方程(7)对分叉参数 a 的求导 $f'_a(\lambda) \times$

$\lambda'_a + f'_a(\lambda) = 0$ 可以得到,在 $a = a_0$ 处虚数特征根对 a 的导数 $\lambda'(a_0)$ 的实部和虚部分别为

$$\alpha'(0) = 1.0596, \omega'(0) = 0.5051 \tag{13}$$

将系统(12)右端的非线性项以及式(13)代入文献[13]中计算稳定性指数的各特征量,得到稳定性指数:

$$\beta_2 = -0.9531 + 0.2669k_n \tag{14}$$

为保证极限环稳定应有 $k_n < 3.571$. 由式(14),当 $k_n = 0$ 时,对应于原系统的稳定性指数 $\beta_2 < 0$,又由式(13)知 $\alpha'(0) > 0$,故系统(1)在 $a = a_0 = 8.3782$ 点 Hopf 分叉为超临界,极限环稳定,与数值结果分叉图(1)吻合.

在 $a = a_0$ 邻域受控系统(11)的极限环幅值近似解为 $\rho \doteq \sqrt{-2\alpha'(0)(a - a_0)/\beta_2}$,代入式(13)和式(14),得到在 $a = a_0 = 8.3782$ 邻域极限环幅值的近似解析式:

$$\rho \doteq 1.4911 \sqrt{\frac{1}{1 - 0.28k_n}(a - 8.3782)} \tag{15}$$

可见,调节 k_n 值可以改变极限环幅值 ρ 的大小^[14-17].

2.3 幅值控制数值模拟

受控系统(11)的极限环幅值与控制增益关系曲线如图 3 所示. 图中离散点为 $k_n \sim \rho$ 关系的数值

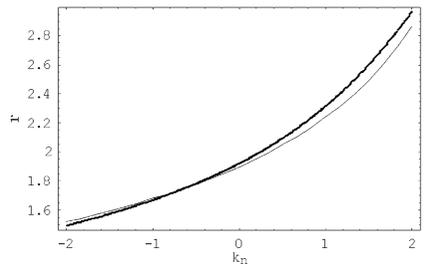


图 3 受控系统(11)的极限环幅值与控制增益($k_n \sim \rho$)关系曲线($a = 10$)

Fig. 3 Gain amplitude ($k_n \sim \rho$)

curves for the controlled system (11) (with $a = 10$)

模拟结果,由式(15)绘制 $k_n \sim \rho$ 解析关系曲线如图 3 中的实线所示. 随着 k_n 远离右极限值(3.571),解析近似结果的误差值逐渐减小;当 $k_n < 2.0$ 时,

幅值近似解相对于数值解的误差均小于3.5%. 当 $k_n > 0$ 时, 受控系统极限环幅值增大.

图4为受控系统(11) ($b=10, c=110, d=10, a=10$) 在不同区域的初值条件下得到的四个极限环, 它们分别产生于四个第一类平衡点. 根据式(15), 取控制增益 $k_n = -1$ 时, 极限环幅值从1.8989减小到1.6784, 数值解(相应于在 x_1 轴上的投影)为1.6674, 相对误差为0.66%.

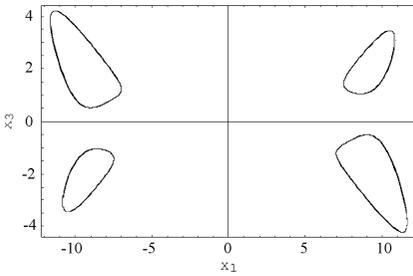


图4 受控系统(11)的极限环

($b=10, c=110, d=10, a=10, k_n=-1$)

Fig. 4 Limit cycles in the controlled system (11)

with $b=10, c=110, d=10, a=10$ and $k_n=-1$

3 结论

推导四维 Qi 系统在第一类非零平衡点上产生 Hopf 分叉的条件, 得到了确定 Hopf 分叉点的参数关系式. 采用 washout filter 非线性控制律, 利用中心流形定理对受控系统降维的方法, 得到了极限环的幅值与控制增益之间的近似解析式, 调节控制增益可以改变极限环幅值的大小, 从而实现了不改变 Hopf 分叉点对极限环的幅值控制. 数值模拟以及幅值解析解与数值解的比较, 验证了幅值预测的正确性与控制的有效性. 对于第二类非零平衡点 Hopf 分叉的产生问题有待进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Chen G, Moiola J L, Wang H O. Bifurcation control: Theories, methods, and applications. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(3): 511 ~ 548
- 2 Wen G, Xu D. Control algorithm for creation of Hopf bifurcations in continuous-time systems of arbitrary dimension. *Phys. Letts. A*, 2005, 337(1-2): 93 ~ 100
- 3 唐驾时, 欧阳克俭. logistic 模型的倍周期分岔控制. *物理学报*, 2006, 55(9): 4437 ~ 4441 (Tang Jiashi, Ouyang Kejian. Controlling the period-doubling bifurcation of logistic model. *Acta Phys. Sin.*, 2006, 55(9): 4437 ~ 4441 (in Chinese))
- 4 Yu P, Chen G. Hopf bifurcations control using nonlinear feedback with polynomial functions. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(5): 1683 ~ 1704
- 5 Nayfeh A H, Harb A M, Chin C M. Bifurcations in a power system model. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1996, 6: 497 ~ 512
- 6 Moiola J L, Berns D W, Chen G R. Feedback control of limit cycle amplitudes. *Proc. 36th IEEE Conf. Decis. and Contr.*, 1997: 1479 ~ 1485
- 7 Tang J S, Chen Z L. Amplitude control of limit cycle in van der pol system. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(2): 487 ~ 495
- 8 Oueini S S, Nayfeh, A H. Single-mode control of a cantilever beam under principal parametric excitation. *J. Sound Vib.*, 1999, 224(1): 33 ~ 47
- 9 钱长照, 唐驾时. 一类非自治时滞反馈系统的分叉控制. *物理学报*, 2006, 55(2): 617 ~ 621 (Qian Changzhao, Tang Jiashi. Bifurcation control for a non-autonomous system with two time delays. *Acta Phys. Sin.*, 2006, 55(2): 617 ~ 621 (in Chinese))
- 10 Qi G Y, Du S Z, Chen G R, Chen Z Q, Yuan Z Z. On a four-dimensional chaotic system. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 23: 1671 ~ 1682
- 11 王琳, 倪樵, 黄玉盈. Qi 四维系统的暂态混沌现象. *动力学与控制学报*, 2007, 5(1): 18 ~ 22 (Wang Lin, Ni Qiao, Huang Yuying. Chaotic transients in Qi's 4D system. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 18 ~ 22 (in Chinese))
- 12 Qi G Y, Chen G R. Analysis and circuit implementation of a new 4D chaotic system. *Physics Lett. A*, 2006, 352: 386 ~ 397

- 13 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge Univ. Press, London, 1981
- 14 萧寒,尹小波. 多自由度 Van der Pol 型系统振幅增大控制. 动力学与控制学报, 2008, 6(1): 32 ~ 34 (Xiao Han, Yin Xiaobo. Enlarging amplitude control of van der Pol type with multi degree of freedom system. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 32 ~ 34 (in Chinese))
- 15 吴志强,张建伟,王喆. 极限环高阶分岔控制. 动力学与控制学报, 2007, 5(1): 23 ~ 26 (Wu Zhiqiang, Zhang Jianwei, Wang Zhe. Higher order limit-cycle bifurcation control. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 23 ~ 26 (in Chinese))
- 16 王兴元,王勇. 基于主动控制的三维自治混沌系统的异结构反同步. 动力学与控制学报, 2007, 5(1): 13 ~ 17 (Wang Xingyuan, Wang Yong. Anti-synchronization of three-dimensional autonomous different-structural chaotic system via active control. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 13 ~ 17 (in Chinese))
- 17 钱长照,符文彬. 一类自治系统 Hopf 分岔及极限环幅值的时滞反馈控制. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 7 ~ 11 (Qian Changzhao, Fu Wenbin. Control of a kind of autonomous system to Hopf bifurcation and amplitude of limit cycle based on time delays feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 7 ~ 11 (in Chinese))

HOPF BIFURCATION ANALYSIS AND AMPLITUDE CONTROL OF LIMIT CYCLE IN THE QI SYSTEM *

Liu Suhua^{1,2} Zhao Chenggang² Tang Jiashi¹ Yang Xianlin^{1,3}

(1. College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China)

(2. Mechanical Engineering Department, Anyang Institute of Technology, Anyang 455000, China)

(3. Hunan Radio and Television University, Changsha 410001, China)

Abstract The amplitude control of limit cycle in the Qi System was implemented via a nonlinear state feedback without changing the original Hopf bifurcation point. The conditions of system parameters were obtained, which implied a Hopf bifurcation from the first classes of non-trivial equilibrium points, while a bifurcation diagram corresponding to the first class of equilibrium was drawn. By means of the center manifold theory and normal form reduction, an analytical relationship between the amplitude of limit cycle and the control gain was derived for the controlled system under a nonlinear washout filter. The comparison between the analytical solutions of amplitudes and the numerical ones were presented to confirm good predictions and valid control for amplitudes of limit cycles.

Key words Qi system, Hopf bifurcation, limit cycle, amplitude control