第 6 卷第 2 期 2008 年 6 月
1672-6553/2008/06(2)/138-3
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 6 No. 2
Jun. 2008

一类含阶跃干扰的切换系统最优控制*

向峥嵘　王春芳
（南京理工大学自动化学院，南京　210094）

摘要　研究了一类含阶跃干扰的切换系统的二次最优控制问题，其中切换系统的切换序列、切换次数固定. 采用动态规划方法，利用多级决策和改进的遗传算法来得到最优切换时刻和最优控制输入. 最后通过一个数值例子说明了本文方法的有效性.

关键词　干扰，　切换系统，　动态规划，　遗传算法

引 言

近年来，切换系统已经成为目前控制界研究的热点之一，其在化工过程、制造过程、交通控制等领域都得到了广泛的应用. 有关切换系统的最优控制问题也取得了一些成果. Borrellia[1] 等针对分段仿射系统用动态规划法解决了有限时间有约束的离散时间线性混杂系统的优化控制. Xu [2] 等针对切换次序固定、切换时刻可变情形，提出两阶段法研究最优控制问题，两阶段法为切换系统的最优问题研究构建了基本框架. Riedinger[3] 等运用极大值原理和动态规划结合的方法研究了混杂系统的线性二次优化问题. Egerstedt[4] 等采用梯度下降算法研究了切换次序部分可变下的最优控制问题. Seatzu 等[5] 针对分段仿射连续切换系统，研究了切换总次数固定、切换次序、切换时刻均可变时的最优控制. Bengea [6] 等针对两个子系统构成的切换系统，研究了切换次序、切换时刻均可变时的最优控制问题. Sun[7] 讨论了切换系统无穷时间（即）优化问题的最优解与切换系统可镇定之间的联系. 对于含有阶跃干扰的切换系统最优控制问题，目前还没有见到研究结果.

本文针对一类含有阶跃干扰的切换系统，研究了在切换序列、切换次数固定，切换时刻可变时情况下的最优控制问题，利用动态规划方法，将多级决策问题转化为多个单级决策过程，然后利用改进的遗传算法，寻求最优切换时刻和系统性能指标的最优值.

1　问题的描述

考虑含有外界阶跃干扰 $\xi(t)$ 的切换系统方程

$$\dot{x} = A_i x(t) + B_i[\xi(t) - u(t)],\quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

式中 $x \in R^n$，$u \in R^r$，A_i，B_i 分别表示第 i 个子系统对应的相应维数的常值矩阵，$\xi(t)$ 是等效作用在系统输入端的 r 维外界干扰变量，并假设它的每个分量都是阶跃函数，i 为子系统标识，$i = 1, 2, \cdots, K$.

考虑如下形式的性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T Q x + (\xi - u)^T S(\xi - u) + \dot{u}^T R \dot{u}]\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

式中：常数加权矩阵 $Q \in R^{n\times n}$，$S \in R^{r\times r}$，$R \in R^{r\times r}$ 均为正定矩阵，第二项 $(\xi - u)^T S(\xi - u)$ 表示一部分控制用于抵消干扰，另一部分控制用来调节系统状态，积分函数中增加了对控制量变化率的限制，即 $\dot{u}^T R \dot{u}$，以便于工程实现.

切换子系统的个数 $K \in (0, \infty)$；子系统切换时刻 $t_k \in [t_0, t_f]$，$t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le t_f$；切换序列 δ 从 t_0 到 t_f 定义为：$\delta = \{(t_0, e_0), (t_1, e_1), \cdots, (t_k, e_k)\}$，其中：$0 \le K \le \infty$，$t_0 \le t_1 \cdots \le t_k \le t_f$.

本文研究在切换序列、切换次数都固定，切换时刻可变时情况下系统的最优控制，即寻找最优切换时刻 $t_k(k = 1, 2, \cdots, K)$，最优控制输入 u，使切换系统的性能指标(2)达到极小值.

2　切换系统的二次最优控制

基于动态规划思想，将切换系统的二次最优控

2007-8-10 收到第 1 稿，2007-11-27 收到修改稿.
* 江苏省自然科学基金项目（BK2007210）和南京理工大学科研发展基金项目（AB96248）

制问题转变为多级决策问题. 所谓多级决策过程是指把一个过程分成若干阶段,每个阶段都作出决策,以使整个过程取得最优效果. 根据最优性原理,多级决策过程的最优策略具有这样的性质,不论初始状态和初始决策如何,当把其中任何一级和状态再作为初始级和初始状态时,其余的决策对此必定也是一个最优策略.

第一步,求解时间$[t_K,t_f]$上线性二次最优控制.

此时系统切换到第 K 个子系统 $\dot{x}=A_Kx(t)+B_K[\xi(t)-u(t)]$,性能指标为 $J_K=\frac{1}{2}\int_{t_K}^{t_f}[x^TQx+(\xi-u)^TS(\xi-u)+\dot{u}^TR\dot{u}]\mathrm{d}t$,计算此时的最优控制律为

$$u_K^*(t)=-K_{3(K)}x(t)-\int_{t_K}^{t}K_{4(K)}x(\tau)\mathrm{d}\tau+u^*(t_K)+K_{3(K)}x(t_K),$$

其中

$$K_{1(K)}=R^{-1}P_{12(K)}^T,K_{2(K)}=R^{-1}P_{22(K)},$$
$$K_{3(K)}=K_{2(K)}(B_K^TB_K)^{-1}B_K^T,$$
$$K_{4(K)}=K_{1(K)}-K_{2(K)}(B_K^TB_K)^{-1}B_K^TA_K,$$

其中

$$P_K=\begin{bmatrix}P_{11(K)} & P_{12(K)}\\ P_{12(K)}^T & P_{22(K)}\end{bmatrix}.$$

最优性能指标为 $J_K^*=\frac{1}{2}\bar{x}^T(t_K)P_K\bar{x}(t_K)$,它是 t_K 的函数.

第二步,求解区间$[t_{K-1},t_K]$上的二次最优控制.

系统切换到第 $K-1$ 个子系统 $\dot{x}=A_{K-1}x(t)+B_{K-1}[\xi(t)-u(t)]$上,性能指标为 $J_{K-1}=\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[x^TQx+(\xi-u)^TS(\xi-u)+\dot{u}^TR\dot{u}]\mathrm{d}t$,此时的最优控制输入为

$$u_{K-1}^*(t)=-K_{3(K-1)}x(t)-\int_{t_{k-1}}^{t_k}K_{4(K-1)}x(\tau)\mathrm{d}\tau+u^*(t_{K-1})+K_{3(K-1)}x(t_{K-1})$$

其中

$$K_{1(K-1)}=R^{-1}P_{12(K-1)}^T,K_{2(K-1)}=R^{-1}P_{22(K-1)},$$
$$K_{3(K-1)}=K_{2(K-1)}(B_{K-1}^TB_{K-1})^{-1}B_{K-1}^T,$$
$$K_{4(K-1)}=K_{1(K-1)}-K_{2(K-1)}(B_{K-1}^TB_{K-1})^{-1}B_{K-1}^TA_{K-1}.$$

最优性能指标为 $J_{K-1}^*=\frac{1}{2}\bar{x}^T(t_{K-1})P_{K-1}\bar{x}(t_{K-1})$,它是 t_{K-1},t_K 的函数.

依此下去,最后得到切换系统的最优控制为

$$u_{K-i}^*(t)=-K_{3(K-i)}x(t)-\int_{t_{i-1}}^{t}K_{4(K-i)}x(\tau)\mathrm{d}\tau+u^*(t_{i-1})+K_{3(k-i)}x(t_{i-1}),t\in[t_{i-1},t_i]\quad(i=1,2,\cdots,K)$$

最优性能指标为 $J^*=\frac{1}{2}x^T(t_0)Px(t_0)$,它实际上是 $t_1,t_2\cdots,t_K$ 的函数.

最后可用改进的遗传算法[8]来求得最优切换时刻 $t_1,t_2\cdots,t_K$ 和最优性能指标的值.

3　数值算例

考虑系统(1),其中:$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,$A_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,$B_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$,$B_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$,$x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$,性能指标为(2)式,其中:$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,$R=1,S=1$. 系统由子系统 1 切换至子系统 2 并最终停留在系统 2. 求切换时刻 t,使性能指标 J 最小.

由上节可得切换系统切换到子系统 2 时,

$$P_2=\begin{bmatrix}5.6494 & 2.6494 & 2.5098\\ 2.6494 & 2.5098 & 1.0000\\ 2.5098 & 1.0000 & 2.6494\end{bmatrix};$$

$K_1=[2.5098\quad 1.0000]$;$K_2=2.6494$;

$K_3=[2.5098\quad 0]$;$K_4=[5.5098\quad 1.0000]$.

切换到子系统 1 时,

$$P_1=\begin{bmatrix}2.4142 & 2.4142 & 1.0000\\ 2.4142 & 4.8284 & 2.4142\\ 1.0000 & 2.4142 & 2.4142\end{bmatrix};$$

$K_1=[1.0000\quad 2.4142]$;$K_2=2.4142$;

$K_3=[0\quad 2.4142]$;$K_4=[1.0000\quad 2.4142]$.

利用改进的遗传算法,进化代数设为 200 代,种群设为 50,染色体长度为 22,交叉概率 0.8,变异概率 0.001,精英保留个数 2,最终得到最小值为 $J=1.3732$.

4　结论

研究了一类含阶跃干扰的切换系统的二次最优控制问题,已知切换序列和切换次数,求解最优切换时刻和最优性能指标,采用改进的遗传算法搜

索最优解,最后通过一个例子说明了此算法的有效性.

参 考 文 献

1 Borrellia F, et. al. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete – time linear hybrid systems. *Automatic*, 2005, 41(10): 1709 ~ 1721

2 Xu X, et. al. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(1): 2 ~ 16

3 Riedinger P, et. al. Linear Quadratic Optimization for Hybrid Systems. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, 1999, 3059 ~ 3064

4 Egerstedt M, et. al. Transition time optimization for switched mode dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 110 ~ 115

5 Seatzu C, et. al. Optimal control of continuous time switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 726 ~ 741

6 Bengea S C, Decarlo R A. Optimal control of switching systems. *Automatica*, 2005, 41(1): 11 ~ 27

7 Z. Sun. Stabilization and optimization of switched linear systems. *Automatica*, 2006, 42(5): 783 ~ 788

8 王小平,曹立明. 遗传算法—理论、应用与软件实现. 西安: 西安交通大学出版社, 2002, 69 ~ 71 (Wang Xiaoping, Cao Liming. Genetic algorithm – theory, application and realization of software. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002, 69 ~ 71 (in Chinese))

OPTIMAL CONTROL FOR A CLASS OF SWITCHED SYSTEMS WITH STEP PERTURBATIONS*

Xiang Zhengrong Wang Chunfang

(*School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*)

Abstract The quadratic optimal control for a class of switched systems with step perturbations was studied, in which the switched sequence and switched number of the system was fixed. By means of dynamic programming principle, a kind of multistage decision processes was proposed, which could obtain the optimal switched time and the optimal control input. The improved genetic algorithm (GA) was utilized to search the optimal time and the optimal control input. A numerical example was given to illustrate the effectiveness of the design approach.

Key words perturbation, switched systems, dynamic programming, genetic algorithm

Received 10 August 2007, revised 27 November 2007.

* The project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (BK2007210) and the Research and Development Foundation from Nanjing University of Science and Technology (AB96248)