

# 飞轮调速器反馈控制系统的混沌及控制

王靖岳<sup>1</sup> 王浩天<sup>2</sup>

(1. 沈阳理工大学, 沈阳 110168) (2. 沈阳航空工业学院, 沈阳 110136)

**摘要** 建立了飞轮调速器反馈控制系统的动力学方程, 利用系统的相图和 Poincaré 映射图分析了系统的混沌形成过程. 通过对飞轮调速器反馈控制系统增加一个比例微分反馈控制器, 利用它控制系统从混沌运动转化为周期运动. 数值仿真表明了该控制方法在飞轮调速器反馈控制系统的混沌控制中的有效性与可行性, 可利用适当的控制强度镇定系统中不稳定的周期轨道.

**关键词** 混沌, Poincaré 映射, 混沌控制, 数值仿真

## 引言

近几年, 混沌科学的研究涉及到各个领域, 从对混沌现象的观察及范例的研究转向寻找各学科之间混沌行为的相互制约及内在联系, 由于混沌控制在工程技术上的重大研究价值和十分诱人的应用前景, 混沌控制问题引起了国际上非线性动力系统和工程控制专家的极大关注, 成为了非线性科学研究的热点之一. Ott, Grebogi 和 Yorke<sup>[1]</sup> 提出控制混沌的方法之后, 国内外提出了许多不同的混沌控制方法<sup>[2-5]</sup>, 典型的方法主要有自适应控制法<sup>[6]</sup>、参数周期扰动法<sup>[7]</sup>、周期激励法<sup>[8]</sup>、连续反馈控制法<sup>[9]</sup>等. 总的说来, 适用于各种情形下的混沌控制, 从控制原理上可分为无反馈控制法和反馈控制法. 无反馈控制方法, 可以使系统的运动有较大改变, 从而脱离混沌响应区域; 而反馈控制法, 可以保留系统原有的动力学性质, 并且只需要较小的控制信号. 文献[10]利用线性反馈方法控制混沌运动, 实现 Liu 系统的混沌同步. 文献[11]采用了五种方法设计了混沌系统的反馈控制器, 实现了系统混沌的控制, 利用适当的控制强度控制到稳定的周期轨道.

本文讨论了飞轮调速器反馈控制系统的分岔和混沌的形成过程, 并利用比例微分反馈控制方法实现了对混沌的控制. 利用该方法可将系统的混沌运动控制到稳定的周期 1 轨道上, 从而验证了该方法的有效性和可行性.

## 1 调速器系统的力学模型

图 1 为飞轮调速器反馈控制系统<sup>[12]</sup>. 发动机带动飞轮以角速度  $\omega$  转动, 飞轮通过齿轮箱与轴联结, 轴旋转角速度为  $n\omega$ , 轴端铰接两个长度为  $l$  的杆: 杆 1 和杆 2, 杆 1 和杆 2 的另外一端再连接两个质量为  $m$  的刚性球, 然后通过另外两个杆: 杆 3 和杆 4 与一套筒相连. 轴上套有一倔强系数为  $k$  的弹簧, 弹簧一端顶在套筒的端面上. 离心调速器可调节蒸汽机的蒸汽流量  $Q$  (或内燃机的燃油流量), 使飞轮以恒定转速  $\omega_0$  转动. 当  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \approx 0$  时, 杆将上下移动,  $\theta$  为控制变量.

便于对系统进行分析, 先做以下基本假设:

- 1) 忽略杆和弹簧的质量.
- 2) 假设轴头的粘性摩擦系数为  $c$ .

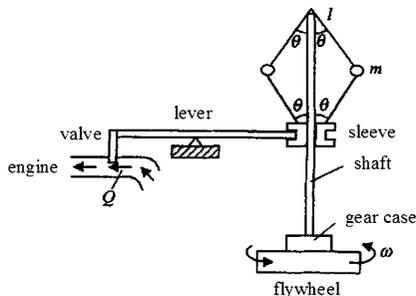


图 1 系统的结构模型

Fig. 1 Physical model of the system

对小球进行受力分析, 根据拉格朗日方程可以得到系统的动力学方程:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = (n\omega)^2 \sin\theta \cos\theta + \frac{2k}{m} \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta - \\ \frac{2kl + mg}{ml} \sin\theta - \frac{c}{2ml^2} \dot{\theta} \\ J\dot{\omega} = \lambda \cos\theta - F \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $J$  为飞轮转动惯量,  $\lambda$  为比例系数,  $F$  为外部作用力,  $g$  为重力加速度.

令  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = \omega$ . 将方程组(1) 可写成三维自治系统的标准形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (a + n^2 x_3^2) \sin x_1 \cos x_1 - (a + g/l) \sin x_1 - b x_2 \\ \dot{x}_3 = (\lambda \cos x_1 - F) / J \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $a = 2k/m, b = c/2ml^2$ . 令方程(2) 右端等于零, 则可求得系统的平衡点为  $(\arccos(F/\lambda), 0, \pm\sqrt{\gamma/n})$ . 其中:  $\gamma = g\lambda + al(\lambda - F)/Fl$ .

## 2 系统的混沌形成过程

在讨论系统的平衡点及其稳定性时, 为了有利于系统初始状态的研究, 即施加一个非周期力  $F = (P + \lambda \cos\theta_0) - P_1'$ , 将该作用力施加在系统动力学方程(1) 中后, 但一般的调速器中所施加的外部作用力常用的形式为  $F = (P + \lambda \cos\theta_0) - P_1' + J\lambda \sin\omega t$ , 其中  $P_1'$  为由于蒸汽或燃油作用产生的力矩,  $P$  为载荷改变而产生的力矩, 在给定转速  $\omega_0$  下, 设  $P_1$  为  $P_1'$ , 对应的角度为  $\theta_0$ . 系统的状态方程可化为标准的三维非自治方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (a + n^2 x_3^2) \sin x_1 \cos x_1 - (a + g/l) \sin x_1 - b x_2 \\ \dot{x}_3 = (\lambda \cos x_1 - F) / J - c \sin\omega t \end{cases} \quad (3)$$

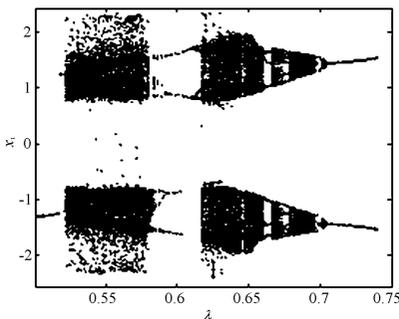


图 2 分岔图( $\lambda - x_1$ )

Fig. 2 Bifurcation diagram( $\lambda - x_1$ )

选取系统参数:  $n = 4.0, l = 1.8, a = 0.3, \omega = 1$ .

$2, b = 0.4, F = 0.3, J = 1.5, c = 0.8$ , 以系统参数  $\lambda$  为分岔参数, 利用四阶龙格库塔法对系统进行数值仿真, 可得到系统的局部分岔图, 如图 2 所示.

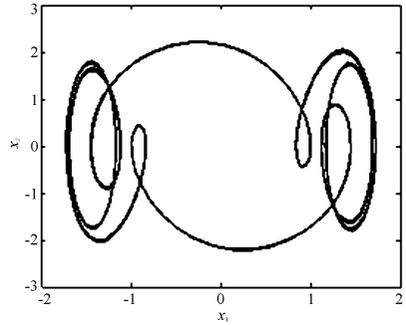


图 3 相平面图( $\lambda = 0.7346$ )

Fig. 3 Phase portrait of the system( $\lambda = 0.7346$ )

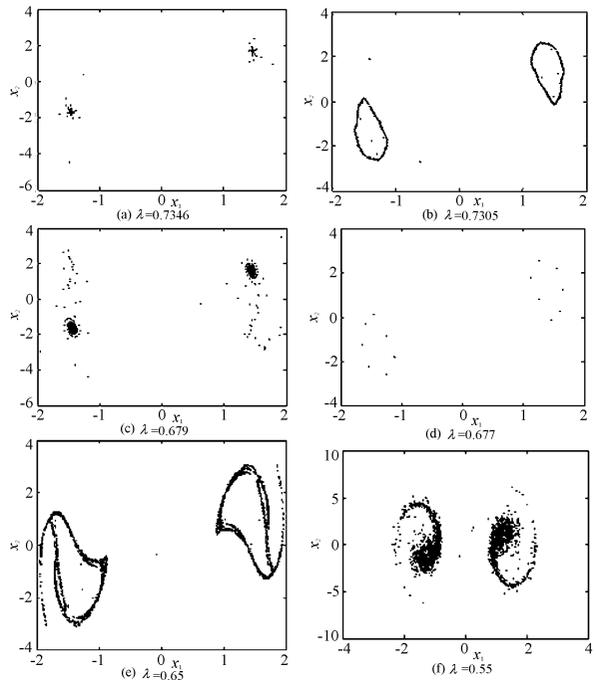


图 4 系统 Poincaré 映射图( $x_1 - x_2$ )

Fig. 4 Poincaré map of the system( $x_1 - x_2$ )

由图 2 可以看出, 系统的运动先为稳定的周期二运动(图 3 和图 4(a)), 该周期运动在分岔参数减小至时失去其稳定性, 出现二个不稳定的焦点(图 4(b)). 不稳定焦点在系统分岔参数进一步减小时出现 *hopf* 分岔, 即系统的运动状态出现二个吸引不变圈(图 4(c)). 如果改变系统的分岔参数, 这三个吸引不变圈失去稳定性, 出现锁相(图 4(d)). 进一步减小分岔参数, 系统的运动以倍周期序列进入混沌运动状态. 然后系统以逆倍周期序列迅速进入稳定的周期运动, 接着再次以倍周期序

列进入混沌运动. 图 4(e) 和图 4(f) 示出不同参数下系统的混沌吸引子的形态. 虽然系统都进入混沌运动状态,但是在不同的系统参数下,其混沌吸引子的形态却不尽相同.

### 3 混沌的控制

考虑如下定义的  $n$  维非线性动力学系统

$$\dot{x} = F(x, \mu, t) \tag{4}$$

这里,  $x \in R^n$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n)$  是  $n$  维光滑的向量场,  $\mu$  为系统的参数. 当  $\mu$  取一定范围的值时, 系统(1)处于混沌运动. 现对式(4)所示系统的状态变量  $x_i$  取比例微分得:

$$x_i' = k_1 x_i + k_2 \dot{x}_i \tag{5}$$

式中:  $k_1, k_2$  是本控制方法中两个可调参数. 调整  $k_1, k_2$  的值可实现不同的控制目标. 将  $x_i$  按如下方程进行反馈

$$\begin{cases} \dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_i', \dots, x_n, \mu, t), j \neq i \\ \dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, \mu, t), j = i \\ (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_i' = k_1 x_i + k_2 \dot{x}_i \end{cases} \tag{6}$$

由式(6)所示的反馈方式可知: 其中  $F$  的子系统  $f_i$  不受反馈控制作用而自由演化. 若子系统  $f_j (j = 1, 2, \dots, n, j \neq i)$  中无状态变量  $x_i$ , 也不受控制作用而自由演化. 即本控制方法只需对系统的一部分子系统进行控制. 这就大大减少了控制的代价和实现控制的难度.

用上述比例微分控制器进行控制, 控制后的方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (a + n^2 x_3^2) \sin(k_1 x_1 + k_2 x_2) \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2) - (a + g/l) \sin(k_1 x_1 + k_2 x_2) - b x_2 \\ \dot{x}_3 = (\lambda \cos x_1 - F)/J - c \sin \omega t \end{cases} \tag{7}$$

当  $\lambda = 0.55$  时, 系统出现混沌, 引入比例微分控制器控制后, 当  $k_1 = 1.2, k_2 = 0.04; k_1 = 1.2, k_2 = 0.2; k_1 = 0.8, k_2 = 0.02$  和  $k_1 = 0.7, k_2 = 0.08$  时, 采用四阶龙格-库塔算法对系统进行数值仿真, 控制结果的系统相图如图 5 所示. 从图 5(a) - 5(d) 中可以看出系统被控制到周期 1 运动轨道下.

当  $k_1 = 0.8, k_2 = 0.2$  和  $k_1 = 1.0, k_2 = 0.04$  时, 系统被控制到周期 2 运动轨道下. 如图 5(e) 和 5

(f). 当  $k_1 = 0.8, k_2 = 1.4$  和  $k_1 = 0.8, k_2 = 1.0$  时, 系统被控制到周期 4 和周期 5 运动轨道下, 如图 5(g) 和 5(h).

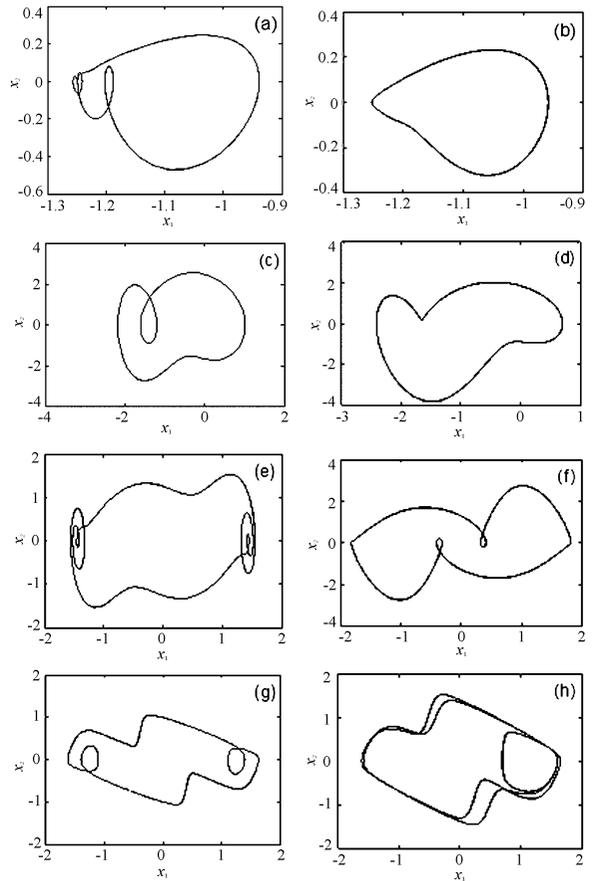


图 5 受控系统相图 ( $x_1 - x_2$ )

Fig. 5 Phase portrait of the controlled system ( $x_1 - x_2$ )

### 4 总结

根据拉格朗日方程建立了飞轮调速器反馈控制系统的动力学方程, 求出了系统的平衡点, 利用系统的相平面图和 Poincaré 映射图分析了系统的混沌形成过程. 利用比例微分控制器实现了系统混沌的控制, 利用适当的控制系数镇定不稳定的周期轨道. 还可以将混沌系统控制到高周期轨道. 这种反馈控制器参数可调范围大, 因而在工程上易于实现, 有着巨大的优越性和良好的应用前景.

### 参 考 文 献

- 1 Ott E, Grebogi C, York J A. Controlling chaos. *Phys Rev Lett*, 1990, 64(11): 1196 ~ 1199
- 2 Chen Liqun, Liu Yanzhu. Chaotic attitude motion of a mag-

- netic rigid spacecraft and its control. *International Journal of Non - Linear Mechanics*, 2002, 37(3) :493 ~ 504
- 3 Chen Liqun, Liu Yanzhu. An open - plus - closed - loop approach to synchronization of chaotic and hyperchaotic maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(5) :1219 ~ 1225
  - 4 Peng B, Petrov V, Showalter K. Controlling chemical chaos. *J Chem Phys*, 1991, (95) :4957 ~ 4963
  - 5 Chen Liqun, Liu Yanzhu. Controlling chaotic attitude motion of spacecraft by the input - output linearization. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2000, 80(10) :701 ~ 704
  - 6 Sinhna S, Ramaswamy R, Subba Rao J. Adaptive control in nonlinear dynamic. *Physica D*, 1990, (43) :118 ~ 128
  - 7 Lima R, Pettini M. Suppression of Chaos by Resonant parametric perturbations. *Phys Rev A*, 1990, (41) :726 ~ 728
  - 8 Braiman Y, Goldhirsch I. Taming chaotic dynamic with weak perturbation. *Phys Rev Lett*, 1991, 66(20) :2545 ~ 2548
  - 9 Pyragas K. Continuous control of chaos by self - controlling feedback. *Phys Lett A*, 1992, (170) :421 ~ 428
  - 10 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. 动力学与控制学报, 2006, 4(1) :1 ~ 4 (Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1) :1 ~ 4 (in Chinese))
  - 11 Ge ZM, Lee CI. Anticontrol and synchronization of chaos for an autonomous rotational machine system with a hexagonal centrifugal governor. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 282:635 ~ 648
  - 12 丁旺才. 调速器反馈控制系统的 Hopf 分叉. 西南交通大学学报, 2001, 36(6) :624 ~ 628 (Ding Wangcai. Hopf bifurcation of flywheel governor with feedback control device. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2001, 36(6) :624 ~ 628 (in Chinese))

## CHAOS AND CONTROL IN FLYWHEEL GOVERNOR WITH FEEDBACK CONTROL DEVICE

Wang Jingyue<sup>1</sup> Wang Haotian<sup>2</sup>

(1. Shenyang Ligong University, Shenyang 110168, China)

(2. Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, Shenyang 110136, China)

**Abstract** The complex dynamics characters of flywheel governor with feedback control device were studied. The dynamical equation and the state equation of flywheel governor with feedback control device were established according to Lagrangian equations. The chaos forming process of the system was studied by the phase portrait and Poincaré map. A method of controlling chaos by proportional and differential controller was developed to guide chaotic motions towards regular motions. Numerical simulation shows the effectiveness and applicability of this method. The allowable range controlling variable and the steady orbit of the system under controlling were obtained.

**Key words** chaos, poincaré map, chaos control, numerical simulation