第 6 卷第 2 期 2008 年 6 月
1672-6553/2008/06(2)/130-4
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 6 No. 2
Jun. 2008

一类参数不确定混沌系统的广义同步

刘福才　宋佳秋
（燕山大学工业计算机控制工程河北省重点实验室，秦皇岛　066004）

摘要　针对一类混沌系统，研究了参数未知的混沌系统的广义同步. 基于 lyapunov 稳定性定理和自适应控制方法，给出了自适应控制器和参数自适应律的解析表达式. 将该方法应用于参数未知的新混沌系统，理论证明了该方法可以使新混沌系统达到渐近的广义同步，并且可以辨识出系统的未知参数. 数值模拟进一步证明了该方法的有效性.

关键词　广义混沌同步，　Lyapunov 稳定性定理，　参数估计

引言

由于混沌系统对初值极端敏感，初值十分接近的任意两条轨道会很快分离并变得毫不相关，混沌同步被认为是几乎不可能的，自从 Pecora 和 Carroll 于 1990 年首次提出混沌的驱动－响应同步方法[1]，混沌同步及其在保密通信、信息科学、生物等领域的应用引起了人们的广泛兴趣[2,3]. 至今，人们已提出了各种不同的混沌控制与混沌同步的方法[4-10]，但已有文献大多考虑两个完全相同混沌系统的完全同步，而关于混沌系统的广义同步研究得很少，由于在实际的物理、化学、生物等复杂系统中存在着大量的广义同步现象，广义同步化可能更容易应用于保密通讯[11]，所以研究混沌系统的广义同步是有实际意义的.

本文提出了一种基于系统参数辨识的混沌广义同步方法. 针对混沌动力学系统参数未知的情况，根据 lyapunov 稳定性理论，给出了广义同步控制器和参数自适应律的解析表达式. 将该方法应用于新混沌系统，实现了混沌系统的广义同步.

1　问题描述

定义 1 考虑两个动力学系统如下：

$$\dot{x} = G(x) \tag{1}$$

$$\dot{y} = G(y) \tag{2}$$

其中 $x \in R^n$，$y \in R^n$ 为系统的状态向量，$G: R^n \to R^n$ 为非线性向量函数，如果

$$\lim_{t \to \infty} y(t) - \alpha x(t) = 0 \tag{3}$$

则称系统(1)和(2)广义同步，其中 α 为比例因子.

在本文中，讨论参数不确定的混沌系统的广义同步，动力学系统(1)和(2)可以写为

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\Theta \tag{4}$$

$$\dot{y} = f(y) + F(y)\hat{\Theta} + u \tag{5}$$

其中 $x \in R^n$，$y \in R^n$ 为系统的状态向量，$f \in R^n$，$F \in R^{n \times n}$，$\Theta \in R^n$ 为未知的参数向量，$\hat{\Theta} \in R^n$ 为未知参数向量 Θ 的估计值，$u \in R^n$ 为广义同步控制器. 称(4)式和(5)式分别为驱动系统和响应系统.

将(4)式和(5)式代入(3)式，则有

$$\dot{e} = \dot{y} - \alpha\dot{x} = f(x) + F(y)\hat{\Theta} - \alpha f(x) - \alpha F(x)\Theta + u \tag{6}$$

根据定义 1，可以将参数不确定混沌系统的广义同步问题转化为广义同步误差系统在原点的渐近稳定性问题. 因此，我们的目的是选择适当的广义同步控制器 u 和参数自适应律 $\dot{\hat{\Theta}}$，使(6)式在原点渐近稳定，即响应系统(5)和驱动系统(4)广义同步.

定理 1　对于驱动系统(4)式和响应系统(5)式，若选择广义同步控制器

$$u = -f(y) + \alpha f(x) - [F(y) - \alpha F(x)]\Theta - \lambda e \tag{7}$$

参数自适应律

$$\dot{\hat{\Theta}} = -(F(y))^T e \tag{8}$$

则系统(4)和(5)广义同步，$\lambda > 0$ 为常数.

证明　选取 Lyapunov 函数为

2007-12-06 收到第 1 稿，2007-12-20 收到修改稿.

$$V=\frac{1}{2}e^{T}e+\frac{1}{2}\tilde{\Theta}^{T}\tilde{\Theta}$$

其中 $\tilde{\Theta}=\hat{\Theta}-\Theta$.

对 Lyapunov 函数 V 求导,则有

$$\dot{V}=\frac{1}{2}(\dot{e}^{T}e+e^{T}\dot{e})+\frac{1}{2}(\dot{\tilde{\Theta}}^{T}\tilde{\Theta}+\tilde{\Theta}^{T}\dot{\tilde{\Theta}}) \tag{9}$$

将(6),(7),(8)式代入(9)式,可以得到

$$\dot{V}=\frac{1}{2}(\tilde{\Theta}^{T}(F(y))^{T}-\lambda e^{T})e+\frac{1}{2}e^{T}(F(y)\tilde{\Theta}-\lambda e)+\frac{1}{2}(-e^{T}F(y)\tilde{\Theta}-\tilde{\Theta}^{T}(F(y))^{T}e)=-\lambda e^{T}e<0$$

由于 V 是正定的,$\dot{V}$ 是负定的,根据 Lyapynov 稳定性定理,广义同步误差(6)式是在原点渐近稳定,即驱动系统(4)和响应系统(5)广义同步,证毕.

2　参数不确定新混沌系统的广义同步

最近,在研究混沌反控制的时候,Chen 和 Lee 介绍了一个新混沌系统,该混沌系统的模型可写为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=ax_1-x_2x_3\\ \dot{x}_2&=bx_2+x_1x_3\\ \dot{x}_3&=cx_3+(1/3)x_1x_2\end{aligned} \tag{10}$$

其中 x_1,x_2,x_3 是系统的状态变量,a,b,c 是系统的三个参数,当参数取值为 $a=5.0,b=-10.0,c=-3.8$,初值 $[x_1,x_2,x_3]^T=[0.5,-1.0,1.5]^T$ 时,系统(10)存在如图 1 所示的奇怪吸引子.

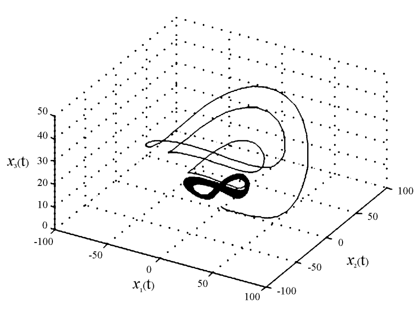


图 1　新系统混沌吸引子

Fig. 1　The new system chaotic attractor

可将(10)式化为(4)式的形式,

$$\dot{x}=f(x)+F(x)\Theta \tag{11}$$

其中 $x=[x_1,x_2,x_3]^T$ 是系统的状态向量,$f(x)=\begin{pmatrix}-x_2x_3\\ x_1x_3\\ (1/3)x_1x_2\end{pmatrix}$,$F(x)=\begin{pmatrix}x_1&0&0\\0&x_2&0\\0&0&x_3\end{pmatrix}$,$\Theta=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,$\Theta$ 为未知参数向量. 称(11)式为驱动系统.

响应系统可以表示如下

$$\dot{y}=f(x)+F(y)\hat{\Theta}+u \tag{12}$$

其中 $y=[y_1,y_2,y_3]^T$ 是系统的状态向量,$f(y)=\begin{pmatrix}-y_2y_3\\ y_1y_3\\ (1/3)y_1y_2\end{pmatrix}$,$F(y)=\begin{pmatrix}y_1&0&0\\0&y_2&0\\0&0&y_3\end{pmatrix}$,$\hat{\Theta}=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$,参数 a_1,b_1,c_1 分别是参数 a,b,c 的估计值,$u=[u_1,u_2,u_3]^T$ 为广义控制器.

根据定理 1,选择控制器

$$u=-f(y)+\alpha f(x)-[F(y)-\alpha F(x)]\Theta-\lambda e=\begin{pmatrix}-ae_1+e_2e_3+\alpha x_2e_3+\alpha x_3e_2+\alpha^2x_2x_3-\alpha x_2x_3-\lambda e_1\\ -be_2-e_1e_3-\alpha x_1e_3-\alpha x_3e_1-\alpha^2x_1x_3+\alpha x_1x_3-\lambda e_2\\ -ce_3-(1/3)(e_1e_2+\alpha x_1e_2+\alpha x_2e_1+\alpha^2x_1x_2)+(1/3)\alpha x_1x_2-\lambda e_3\end{pmatrix} \tag{13}$$

参数自适应律

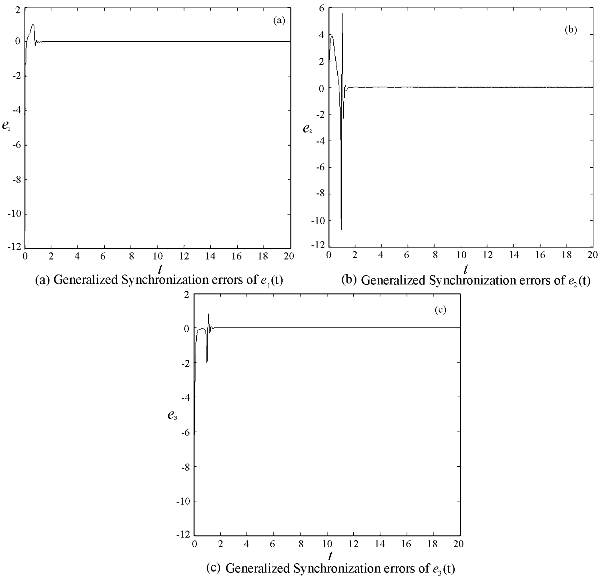
$$\dot{\hat{\Theta}}=-(F(y))^{T}e=\begin{pmatrix}-y_1e_1\\-y_2e_2\\-y_3e_3\end{pmatrix} \tag{14}$$

因而,在广义控制器(13)和参数自适应律(14)的作用下,驱动系统(11)和响应系统(12)广义同步.

3　数值模拟结果

数值仿真中采用步长为 $h=0.0001$ 的四阶-龙格库塔方法,设驱动系统(11)式和响应系统(12)式的初始值分别为 $x_0=[0.5,-1.0,1.5]^T$,$y_0=[-11.5,2.0,-12.5]^T$.

参数估计的初始值取为 $\dot{\hat{\Theta}}_0=[4.8,12.7,5.1]$,常数 $\lambda=20$. 当 $\alpha=-1$ 时,为两个系统的反同步,是广义同步的特例,其仿真图见图 2,当 $\alpha=2$ 时的仿真图见图 3,从图 2 和图 3 可以看出,新混沌系统(11)式和(12)式实现了广义同步,广义同步误差 $e=[e_1,e_2,e_3]^T$ 快速收敛于零. 图 4 和图 5 给出了参数鉴定结果,表明了参数估计值 a_1,b_1,c_1 随着时间的增大分别趋于它们的真实值 a,b,c.

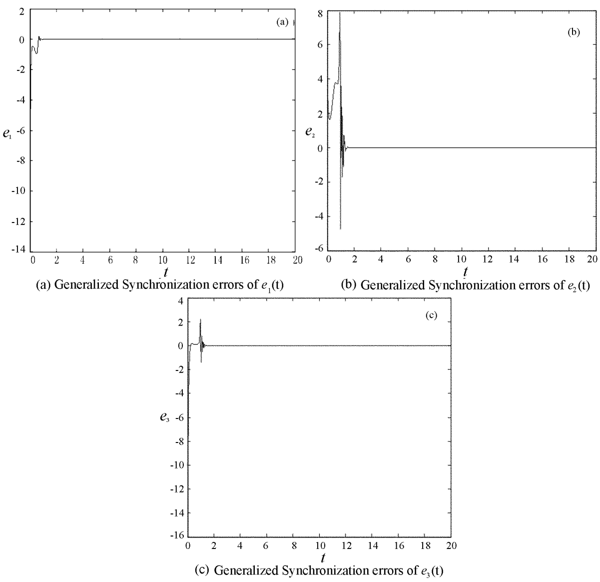


(a) Generalized Synchronization errors of $e_1(t)$　(b) Generalized Synchronization errors of $e_2(t)$

(c) Generalized Synchronization errors of $e_3(t)$

图 2　当时广义同步误差曲线

Fig. 2　Generalized Synchronization errors with scaling factor



(a) Generalized Synchronization errors of $e_1(t)$　(b) Generalized Synchronization errors of $e_2(t)$

(c) Generalized Synchronization errors of $e_3(t)$

图 3　当时广义同步误差曲线

Fig. 3　Generalized Synchronization errors with scaling factor

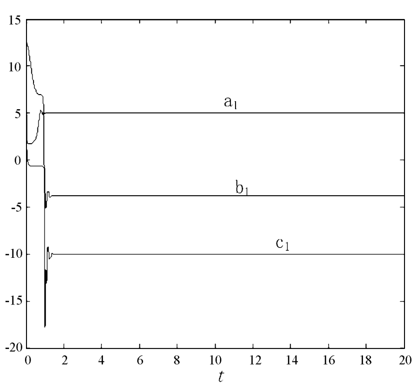


图 4　当时的参数估计值图

Fig. 4　Estimated parameter with scaling factor

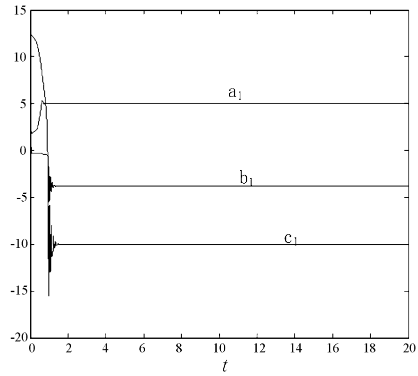


图 5　当时的参数估计值

Fig. 5　Estimated parameter with scaling factor

4　结论

本文研究了一类参数不确定混沌系统的广义同步. 基于 Lyapunov 稳定性理论,给出了广义同步控制器和参数自适应律的解析表达式. 该方法简单、适应范围广. 其中系统(3)描述了许多典型的混沌系统,例如 Lorenz 系统、Chen 系统、Rössler 系统、统一混沌系统等等,以新混沌系统为例,数值仿真说明了该方法的有效性和实用性.

参　考　文　献

1　Carrol T L, Pecora L M. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1991, 38(4): 453 ~ 456

2　蔡国梁,黄娟娟. 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rossler 系统的异结构同步. 物理学报 2006, 55(8): 3997 ~ 4004 (Cai G L, Huang J J. Synchronization for hyperchaotic Chen system and hyperchaotic Rossler system with different structure. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 3997 ~ 4004 (in Chinese))

3　Zhang Q, Chen S H, Hu Y M, Wang C P. Synchrinizing the noise-perturbed unified system by sliding mode control. *Physica*, 2006, 371: 317 ~ 324

4　Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, et al. Using small perturhations to control chaos. *Nature*, 1993, 363(6): 411 ~ 417

5　Michael G R, Arkady S P, Jurgen K. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letter*, 1997, 78(22): 4198 ~ 4196

6　Yu X, Song Y. Chaos synchronization via controlling partial state of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 2001, 11(6): 1737 ~ 1741

7　Yang X S. On the existence of generalized synchronizor in unidirectionally coupled systems. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 122(1):71 ~ 79

8　Ho M C, Hung Y C, Chon C H. Phase and anti-phase synchronization of two chaotic system by using active control. *phys. lett. A*, 2002, 296(1):43 ~ 48

9　Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A. Lag synchronization in time-delayed system. *Phys. Lett. A*, 2002, 292(6):320 ~ 324

10　王兴元,王勇. 基于主动控制的三维自治混沌系统的异结构反同步. 动力学与控制学报, 2007, 5(1):13 ~ 17. (Wang X Y, Wang Y. Anti-synchronization of three-structural autonomous different-structural chaotic systems via active control. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1), 13 ~ 17(in Chinese))

11　王兴元,古丽孜拉,王明军. 单向耦合混沌同步及其在保密通信中的应用. 动力学与控制学报, 2008, 6(1):40 ~ 44(Wang Xingyuan, Gulzila, Wang Mingjun. Chaos synchronization via unidirectional coupling and its application to secure communication. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1):40 ~ 44(in Chinese))

GENERALIZED SYNCHRONIZATION FOR A CLASS OF CHAOTIC SYSTEMS WITH UNKNOWN PARAMETERS

Liu Fucai　Song Jiaqiu

(*Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao*　066004, *China*)

Abstract　The generalized synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters was proposed. Based on Lyapunov stability theory and adaptive control method, the expressions of the adaptive controller and the updating rule of parameters were given. A new chaotic system was taken as an example to illustrate the effectiveness of this method. It is proved theoretically that this method is feasible. Numerical simulations show the effectiveness of the adaptive control technique.

Key words　generalized synchronization,　Lyapunov stability theory,　parameters identification

Received 6 December 2007, revised 20 December 2007.