

强非线性 Duffing 系统分岔响应分析的 MLP 方法*

钱长照

(长沙理工大学桥梁与结构工程学院,长沙 410076)

摘要 同时考虑阻尼对响应频率和相位的影响,引入简单的变换,将有阻尼 Duffing 系统进行重写,得到的新系统在使用 MLP 方法的参数变换中,待定参数不受初始条件的影响,直接应用 MLP 方法有效的推导出受简谐激励作用下的含有阻尼的强非线性 Duffing 系统主共振和 1/3 亚谐共振的分岔响应方程.首次将 MLP 方法直接应用于含有阻尼的 Duffing 系统,极大的推广了 MLP 方法的应用范围,并对退化为无阻尼系统的结果与现有文献结果相比较,得到满意的结论.

关键词 强非线性, Duffing 系统, MLP 方法

引言

强非线性问题一直是非线性科学中一个重要而热门的课题,相对于弱非线性问题,由于有着更强的非线性特点,求解起来比较困难,目前还没有形成通用的求解方法.近年来,针对不同的动力系统,力学和数学工作者提出了一些求解强非线性问题的方法,典型的有频率增量法^[1],频闪法^[2],改进 LP 法(MLP 方法)^[3]等,其中改进 LP 法由于其计算推导简便,理论清晰,被广泛应用和推广,研究了不少的强非线性问题^[4-7].

改进 LP 方法的主要思路是采用参数变换,将非线性项的非小参数系数转化为小参数形式,进一步利用 LP 方法求解.由于参数变换公式中隐含条件是要求振动频率是不随时间变化的,因此对于很多含有阻尼项的系统进行求解待定参数的过程中,都遇到难以消除长期项的问题,在求解复杂问题时,文[8]的做法是用假设同时存在初始位移和初始速度的方法消除长期项.也就是说先求得依赖于初始条件的待定参数,随后用参数变换将强非线性动力系统转化为弱非线性系统,然后再用多尺度方法进行分析.这种方法在求解一些强非线性问题中取得了很好的效果,但整个计算过程是相当复杂的.事实上,对于受迫振动的系统,响应频率是满足频率不随时间变化条件的,无法消除长期项的主要原因是因为以往对改进 LP 方法的研究中没有考虑

到阻尼对相位的影响^[9-12].本文研究受简谐激励作用的含有阻尼项的强非线性 Duffing 系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon(\mu \dot{x} + \beta x^3) = F \cos \omega \quad (1)$$

其中 ε 为非小量参数.首先对系统进行变换,同时考虑共振响应的频率和相位变化,令 $\tau = \omega t - \theta, H = F \cos \theta, K = F \sin \theta$,则系统可重写为

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \varepsilon(\mu \omega x' + \beta x^3) = H \cos \tau + K \sin \tau \quad (2)$$

应用 MLP 方法可获得主共振和 1/3 亚谐共振的分岔响应方程.

1 主共振响应

对于主共振情况,首先引入代换 $H \rightarrow \varepsilon H, K \rightarrow \varepsilon K$,并令

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^3 \omega_2 + \dots \quad (3)$$

引入变换参数

$$\alpha = \frac{\varepsilon \omega_1}{\omega_0^2 + \varepsilon \omega_1} \quad (4)$$

显然,上式可写为

$$\varepsilon = \frac{\alpha \omega_0^2}{(1 - \alpha) \omega_1} \quad (5)$$

代入(5)式,则(5)式可重写为

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha} (1 + \delta_2 \alpha^2 + \delta^3 \alpha^3 + \dots) \quad (6)$$

或

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2} \alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right] \quad (7)$$

假设 x 可展开为关于 α 的级数形式

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots \quad (8)$$

将(5)~(8)式代入到方程(2)比较方程两边 α 的系数可得

$$x_0'' + x_0 = 0 \quad (9)$$

$$x_1'' + x_1 = x_0 - \frac{1}{\omega_1}(\mu\omega_0 x_0' + \beta x_0^3) + \frac{1}{\omega_1}(H \cos \tau + K \sin \tau) \quad (10)$$

.....

方程(9)的解形式可以表示为

$$x_0 = A \cos \tau + B \sin \tau \quad (11)$$

代入到方程(10)可得

$$x_1'' + x_1 = \left(A - \frac{\mu\omega_0}{\omega_1} B - \frac{3\beta}{4\omega_1} A(A^2 + B^2) + \frac{1}{\omega_1} H \right) \cos \tau + \left(B + \frac{\mu\omega_0}{\omega_1} A - \frac{3\beta}{4\omega_1} B(A^2 + B^2) + \frac{1}{\omega_1} K \right) \sin \tau + NST \quad (12)$$

其中 NST 为不产生长期项的项, 消除长期项可得

$$\begin{aligned} A - \frac{\mu\omega_0}{\omega_1} B - \frac{3\beta}{4\omega_1} A(A^2 + B^2) + \frac{1}{\omega_1} H &= 0 \\ B + \frac{\mu\omega_0}{\omega_1} A - \frac{3\beta}{4\omega_1} B(A^2 + B^2) + \frac{1}{\omega_1} K &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

由已知 $H^2 + K^2 = F^2$, 再令 $\alpha^2 = A^2 + B^2$ 代入上式可得

$$\left(a - \frac{3\beta}{4\omega_1} a^3 \right)^2 + \left(\frac{\mu\omega_0}{\omega_1} a \right)^2 = \left(\frac{F}{\omega_1} \right)^2 \quad (14)$$

或

$$\left[\left(\omega_1 - \frac{3\beta}{4} a^2 \right)^2 + (\mu\omega_0)^2 \right] a^2 = F^2 \quad (15)$$

方程(14)(15)即为强非线性 Duffing 系统主共振分岔响应方程。

方程(15)两边同时对 a^2 隐函数求导, 可得

$$\omega_1^2 - 4 \times \frac{3}{4} \beta a^2 \omega_1 + 3 \times \left(\frac{3}{4} \beta a^2 \right)^2 + (\mu\omega_0 a)^2 = 0 \quad (16)$$

求解上式可得

$$\omega_1^\pm = \frac{3\beta a^2}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{3}{2} \beta a^2 \right)^2 - (2\mu\omega_0 a)^2} \quad (17)$$

当 $\left(\frac{3}{2} \beta a^2 \right)^2 - (2\mu\omega_0 a)^2 > 0$ 时, 存在区间 $\omega_1^- < \omega_1 < \omega_1^+$, 在该区间内方程(15)中 a 有三个实数解; 在该区间之外, 有一个实数解, 即在 ω_1^\pm 点处发生鞍结分岔. 由图 1 可以看出, 当 $\omega_1 = \omega_1^+ = 3\beta a^2/4$

时, 振动幅值达到最大峰值 $a_p = \frac{F}{\mu\omega_0}$, 即在该处发生共振.

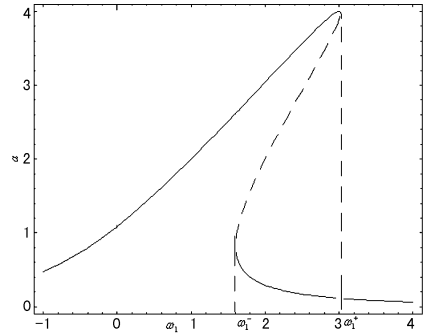


图 1 $\mu \neq 0$ 时主共振分岔响应曲线

Fig. 1 Primary resonance curves for $\mu \neq 0$

当 $\mu = 0$ 时, 系统对应无阻尼 Duffing 系统, 振动幅值 $a_p = \frac{F}{\mu\omega_0}$ 为无穷大, 由图 2 可以清楚的看出.

此时该点的稳态解为自由振动部分确定, 令初始位移 $x(0) = a_0$, 则由 $\omega_1 = 3\beta a_0^2/4$ 确定出响应频率近似表达为 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 3\epsilon\beta a_0^2/4}$, 从而确定主共振响应条件下的稳态解. 解得频率结果与文献[2]所得结果相同. 说明该方法退化后结果有效.

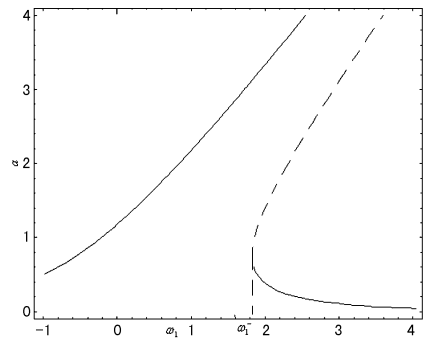


图 2 $\mu = 0$ 主共振分岔响应曲线

Fig. 2 Primary resonance curves for $\mu = 0$

2 1/3 亚谐共振

考虑 1/3 亚谐共振情况, 令

$$\omega^2 = 9\omega_0^2 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^3\omega_2 + \dots \quad (18)$$

引入变换参数

$$\alpha = \frac{\epsilon\omega_1}{9\omega_0^2 + \epsilon\omega_1} \quad \text{即} \quad \epsilon = \frac{9\alpha\omega_0^2}{(1-\alpha)\omega_1} \quad (19)$$

则(18)式可改写为

$$\omega^2 = \frac{9\omega_0^2}{1-\alpha} (1 + \delta_2 \alpha^2 + \delta^3 \alpha^3 + \dots) \quad (20)$$

或

$$\omega = 3\omega_0 \left[1 + \frac{1}{2}\alpha + \left(\frac{3}{8} + \frac{\delta_2}{2} \right) \alpha^2 + \dots \right] \quad (21)$$

代入方程(2)可得摄动方程

$$x_0'' + \frac{1}{9}x_0 = \frac{1}{9\omega_0^2}(H\cos\tau + K\sin\tau) \quad (22)$$

$$x_1'' + \frac{1}{9}x_1 = \frac{1}{9}x_0 - \frac{1}{\omega_1}(3\mu\omega_0x_0' + \beta x_0^3) + \frac{1}{9\omega_0^2}(H\cos\tau + K\sin\tau) \quad (23)$$

.....

方程(20)的解可表示为

$$x_0 = A\cos\frac{\tau}{3} + B\sin\frac{\tau}{3} + \Gamma_1\cos\tau + \Gamma_2\sin\tau \quad (24)$$

其中 $\Gamma_1 = -\frac{1}{8\omega_0^2}H, \Gamma_2 = -\frac{1}{8\omega_0^2}K$.

代入到方程(23)可得

$$x_1'' + \frac{1}{9}x_1 = \frac{1}{9}(A\cos\frac{\tau}{3} + B\sin\frac{\tau}{3}) - \frac{1}{\omega_1}\{3\mu\omega_0B + \frac{\beta}{4}[3A(A^2 + B^2) + 3\Gamma_1(A^2 - B^2) + 6AB\Gamma_2 + 6A(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)]\}\cos\frac{\tau}{3} - \frac{1}{\omega_1}\{-3\mu\omega_0A + \frac{\beta}{4}[3B(A^2 + B^2) + 3\Gamma_2(A^2 - B^2) - 6AB\Gamma_1 + 6B(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)]\}\sin\frac{\tau}{3} + NST \quad (25)$$

其中 NST 为不产生长期项的项,消除长期项可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}A - \frac{1}{\omega_1}\{3\mu\omega_0B + \frac{\beta}{4}[3A(A^2 + B^2) + 3\Gamma_1(A^2 - B^2) + 6AB\Gamma_2 + 6A(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)]\} &= 0 \\ \frac{1}{9}B - \frac{1}{\omega_1}\{-3\mu\omega_0A + \frac{\beta}{4}[3B(A^2 + B^2) + 3\Gamma_2(A^2 - B^2) - 6AB\Gamma_1 + 6B(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)]\} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

令 $a^2 = A^2 + B^2$,化简上式可得

$$\left[\left(\omega_1 - \frac{27\beta}{2}A^2 - \frac{27\beta}{4}a^2 \right)^2 + (27\mu\omega_0)^2 \right] a^2 = \left(\frac{27\beta\Lambda a^2}{4} \right)^2 \quad (27)$$

即为 1/3 亚谐共振分岔响应方程. 其中 $\Lambda^2 = \Gamma_1^2 +$

$$\Gamma_2^2 = \frac{1}{64\omega_0^2}F^2.$$

显然,方程(27)除了存在零解外,还存在由下面方程决定的非零解:

$$\left(\omega_1 - \frac{27\beta}{2}A^2 - \frac{27\beta}{4}a^2 \right)^2 + (27\mu\omega_0)^2 = \left(\frac{27\beta\Lambda a^2}{4} \right)^2 \quad (28)$$

为了确定共振频率,即找出 1/3 亚谐共振分岔位置,用(28)式对 a^2 隐含数求得

$$\omega_1^* = \frac{27}{4}\beta a^2 + \frac{81}{8}\beta\Lambda^2 \quad (29)$$

当 $\omega_1 > \omega_1^*$ 时,方程(27)中 a 存在一个零解和两个非零解,而当 $\omega_1 < \omega_1^*$,方程(27)中 a 只存在零解,因此 $\omega_1 = \omega_1^*$ 为 1/3 亚谐共振分岔点. ω_1^* 的求解结果与文献[5]所得高阶结果相一致.

3 结论

本文研究了受简谐激励作用下含有阻尼项的强非线性 Duffing 系统,同时考虑了阻尼对响应频率和相位的影响,利用适当的变换,使系统变成可以直接应用 MLP 方法且不受消除长期项困扰的系统,从而有效的利用 MLP 方法推导出主共振和 1/3 亚谐共振的分岔响应方程,随后进行分析,并退化成无阻尼系统与现有研究文献相比较,得到满意的结果. 本文通过简单的变换,极大的推广了 MLP 方法的应用范围.

参 考 文 献

- 1 黄赧彪,宗国威,陈兆莹,胡敏. 强非线性动力系统的频率增量法. 力学学报,2001,33(2):242~249 (Huang CB, Zong GW, Chen ZY, Hu M. Frequency-incremental method for strongly nonlinear systems. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(2):242~249 (in Chinese))
- 2 李骊. 强非线性系统的频闪法. 力学学报,1990,22(4):402~412 (Li L. The stroboscopic method for strongly nonlinear systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22(4):402~412 (in Chinese))
- 3 Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. A modified Lindstedt-Poincare method for certain strongly nonlinear oscillators. *Int J Non-Linear Mechanics*, 1991, 26(3,4) 367~378
- 4 J S Tang, C Z Qian. The asymptotic solution of the non-linear Klein-Gordon equation. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 268:1036~1040
- 5 唐驾时. 求强非线性系统次谐共振解的 MLP 方法. 应用数学与力学,2000,10:1039~1045 (Tang Jiashi. The MLP method for subharmonic and ultraharmonic resonance solutions of strongly nonlinear systems. *Applied Mathematic and*

- Mechanics*, 2000, 10: 1039 ~ 1045 (in Chinese))
- 6 袁镒吾, 刘又文. 强非线性问题的改进的 L-P 解法. 应用数学与力学, 2000, 21(7): 741 ~ 745 (Yuan YW, Liu YW, Improved L-P method for solving strongly nonlinear problems. *Applied Mathematic and Mechanics*, 2000, 21(7): 741 ~ 745 (in Chinese))
 - 7 彭献, 盛国刚, 钱长照. 用 MLP 方法求强非线性保守系统的次谐共振周期解. 振动与冲击, 2004, 23(3): 21 ~ 22 (Peng X, Sheng GG, Qian CZ. Solving subharmonic and ultraharmonic resonance periodic solutions of strongly nonlinear conservative systems with the mlp method. *Journal of Vibration and Shock*. 2004, 23(3): 21 ~ 22 (in Chinese))
 - 8 Tang Jiashi, Fu Wenbin, Li Kean. Bifurcations of parametrically excited oscillator with strong nonlinearity. *Chinese Physics*, 2002, 11(10): 1004 ~ 1007
 - 9 A. H. Nayfeh, D T Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979
 - 10 彭献, 陈自力. 一类强非线性系统共振周期解的渐近分析. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 47 ~ 50 (Peng X, Chen ZL. Asymptotic analysis for resonance cycle solution of a type of strongly nonlinear systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 47 ~ 50 (in Chinese))
 - 11 钱长照, 符文彬. 一类自治系统 Hopf 分叉及极限环幅值的时滞反馈控制. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 7 ~ 11 (Qian Changzhao, Fu Wenbin. Control of a kind of autonomous system to Hopf bifurcation and amplitude of limit cycle based on time delays feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 7 ~ 11 (in Chinese))
 - 12 孙中奎, 徐伟, 杨晓丽. 求解强非线性动力系统响应的一种新方法. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 29 ~ 35 (Sun Zhongkui, Xu Wei, Yang Xiaoli. A new analytic approximate technoque for strongly nonlinear dynamic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 29 ~ 35 (in Chinese))

APPLICATION OF MLP METHOD IN ANALYZING BIFURCATION FOR STRONGLY NONLINEAR DUFFING SYSTEM*

Qian Changzhao

(College of Bridge and Structure Engineering, Changsha University Of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract The effects of damp on frequency and phase were considered at the same time. A simple transfer formulation was denoted. The original system can be transferred as a new system which can be studied using MLP method directly. Using the MLP method, the bifurcation equations of primary resonance and 1/3 subharmonic resonance for strongly nonlinear Duffing system were obtained. For the first time, the MLP method has been used in studying the Duffing system with damp items and the application scope for MLP method is extended.

Key words strongly nonlinear, Duffing system, MLP method