

分数阶 Duffing 振子的动力学研究

廖少锴 张卫

(暨南大学理工学院力学与土木工程系,暨南大学应用力学研究所,广州 510632)

摘要 在经典 Duffing 振子中引入分数微分型阻尼项,推导了高效率的数值计算格式,对其表现出来的特有的非线性现象进行讨论.研究表明:分数微分型阻尼的分数阶值较小时,振子将出现倍周期分岔并导致混沌.在不同的外激励频率下,分数微分型 Duffing 振子会呈现对称性破缺、分岔、混沌等强烈的非线性现象;在一定参数范围内,分数微分型 Duffing 振子较经典 Duffing 振子,在较小的激励下即可进入混沌.

关键词 分数微分, Duffing 振子, Newmark 法

引言

经典 Duffing 振子可看作是含粘性阻尼的单摆作大振幅振荡时非线性振动的描述,其阻尼项是基于整数阶微积分描述的牛顿粘性阻尼.近年来越来越多的研究表明:基于整数阶微积分算子描述的经典粘弹性本构关系对于相当一大类高分子阻尼材料并不能很好地描述其力学行为.越来越多的实验研究都表明:分数微积分型本构关系能在相当宽的频率域范围内仅用少量参数就可以对相当一大类高分子阻尼材料的力学行为进行很好地描述^[1-2].

考虑分数微分型阻尼作用的 Duffing 振子实际上是相当于是将高分子阻尼引入到经典的 Duffing 振子系统中,研究分数微分型 Duffing 振子有现实意义^[3-6].对于经典 Duffing 振子中引入分数微分型阻尼项后的非线性特性,本文将通过推导分数微分型 Duffing 振子的数值计算格式,讨论分数微分型 Duffing 振子非线性力学特性.

1 分数微分型 Duffing 振子的数值方法

为讨论方便,经典 Duffing 振子可写成:

$$D^2x + cDx - x + x^3 = F \cos(\omega t) \quad (1)$$

上式中, D 表示一阶微分算子, D_2 表示二阶微分算子,同理,在后面公式中 D_q 表示 q 阶微分算子 ($0 < q < 1$),在经典 Duffing 振子中引入分数微分型阻尼,则分数微分型 Duffing 振子写成:

$$\begin{cases} D^2x + cD^q x - x + x^3 = F \cos(\omega t) \\ 0 < q < 1 \end{cases} \quad (2)$$

上式分数微分为 Riemann - Liouville 定义的分

$$D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau, \quad 0 < q < 1 \quad (3)$$

考虑到分数微分型 Duffing 振子方程解析解很难得到,本文将采用无条件收敛的 Newmark 法构造其数值求解单步算法,由文献[2-5]可知,分数微分的 Newmark 型的 Zhang - Shimizu 数值算法为:

$$cD^q[x(t)] = \frac{c}{\Gamma(1-q)} \left\{ \frac{x_0}{t_n^q} + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\dot{x}_0}{t_n^q} + \frac{\dot{x}_{n-1}}{\Delta t^q} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\dot{x}(i\Delta t)}{(t_n - i\Delta t)^q} \right] + \frac{\dot{x}_{n-1} \Delta t^{1-q}}{1-q} + \frac{(1-\alpha)\ddot{x}_{n-1} \Delta t^{2-q}}{(1-q)(2-q)} + \frac{\alpha \Delta t^{2-q} \ddot{x}_n}{(1-q)(2-q)} \right\} \quad (4)$$

同时, Newmark 型数值积分公式为:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{x}_{n-1} + \alpha \Delta t \ddot{x}_n \end{cases} \quad (5)$$

将(4)式、(5)式代入到(2)式,整理得到:

$$x_n^3 + x_n(A + CE - 1) + B + CD - F \cos(\omega t) = 0 \quad (6)$$

其中 A, B, C, D, E 均为关于 $tn - 1$ 时刻的函数,其表达式为:

$$A = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tag{7}$$

$$B = -\frac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{x}_{n-1} \tag{8}$$

$$C = \frac{c}{\Gamma(1-q)} \tag{9}$$

$$D = \frac{x_0}{t_n^q} + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\dot{x}_0}{t_n^q} + \frac{\dot{x}_{n-1}}{\Delta t^q} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\dot{x}(i\Delta t)}{(t_n - i\Delta t)^q} \right] + \frac{\dot{x}_{n-1} \Delta t^{1-q}}{1-q} + \frac{(1-\alpha) \ddot{x}_{n-1} \Delta t^{2-q}}{(1-q)(2-q)} + \frac{\alpha \beta \Delta t^{2-q}}{(1-q)(2-q)} \tag{10}$$

$$E = \frac{\alpha A \Delta t^{2-q}}{(1-q)(2-q)} \tag{11}$$

式(6) 联立 Newmark 型数值积分公式(5). 即构成求解分数微分型 Duffing 方程的数值算法.

2 力学特性研究

2.1 分数阶值减小振子由倍周期分岔通向混沌

我们知道,混沌振动表现为在极其稠密集中的混沌吸引子中蕴含着无数的不稳定周期轨道与非周期轨道.混沌系统对初始非常敏感,学术界将之喻为“蝴蝶效应”.既然混沌系统对初始条件有如此高度的“敏感性”,因此只要对系统施加非常小的微扰,就有可能把系统从一个不稳定的周期运动转变到另一个不稳定周期运动上去,也可能转变到一个稳定流形上[7].因此,在探讨分数微分型 Duffing 振子非线性特性时,对初值及参数的选取都是基于数值试验中结果稳定且便于讨论.

取 $c=0.3$ 、 $\omega=1.2$ 、 $F=0.2$, 并取初值为 $x_0=0.4$ 、 $\dot{x}_0=0.2$ 、 $\ddot{x}_0=0$. 改变分数导数阶数 q , 分别得到不同分数阶值下分数微分型 Duffing 振子的时域曲线、相图及功率谱:

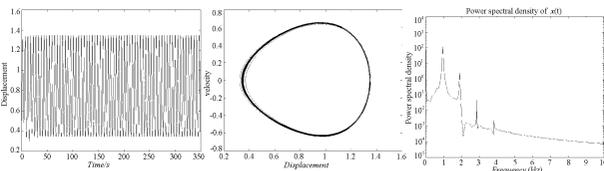


图 1 分数阶值为 0.8 时振子的时域图、相图及功率谱
Fig. 1 $t-x$ curve, phase & PSD fractional order $q=0.8$

由上图可见,分数阶值为 0.8 时振子作稳定的单周期的极限环振动,其功率谱上尖峰分别为振子的固有频率及激励频率处的响应.

由图 2 可见,当分数阶值为 0.6 时,振子已发生了分岔,相轨线呈旋转两圈的闭合曲线;其功率谱上可见半频于固有频率处出现强烈的响应,即振子发生倍周期分岔.

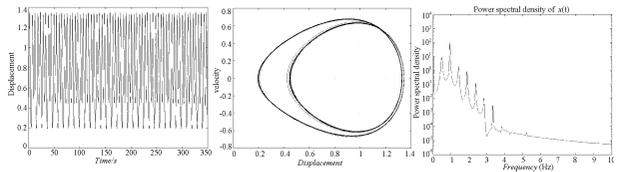


图 2 分数阶值为 0.6 时振子的时域图、相图及功率谱
Fig. 2 $t-x$ curve, phase & PSD fractional order $q=0.6$

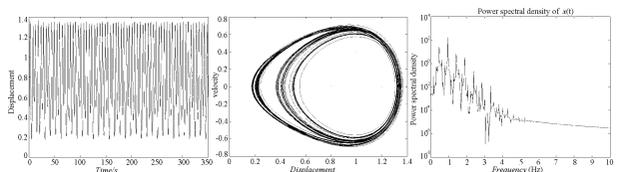


图 3 分数阶值为 0.579 时振子的时域图、相图及功率谱
Fig. 3 $t-x$ curve, phase & PSD fractional order $q=0.579$

由图 3 可见,当分数阶值减小到 0.579 时,振子继续出现分岔,相轨线呈旋转多圈的闭合曲线;其功率谱上显示在 1/4、1/2、3/4 倍于固有频率处及多倍速于激励频率处皆出现强烈的超谐波响应及次谐波响应.振子继续出现倍周期分岔.

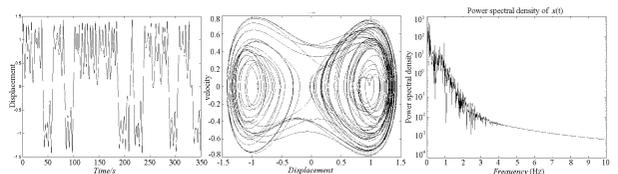


图 4 分数阶值为 0.571 时振子的时域图、相图及功率谱
Fig. 4 $t-x$ curve, phase & PSD fractional order $q=0.571$

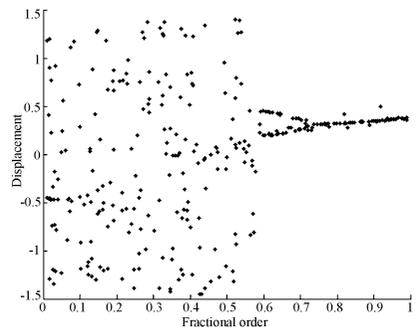


图 5 分数导数阶值 - 位移分岔图
Fig. 5 fork of fractional - displacement

由图 4 所示,当分数阶值减小到 0.571 时,相图上出现混沌吸引子,功率谱上出现噪音背景,振

子进入混沌.

实际上,通过分数阶值-位移分岔图,我们可以从全局上观察振子的倍周期分岔现象,如图5所示,分岔点与混沌态与前述结果吻合.从分岔图上可清晰看到振子在分数阶值减小时由倍周期分岔通向混沌的过程.

2.2 不同外激励频率下振子的响应

取 $c=2, F=15, q=0.5$, 同时取初位移和初速度为 $x_0=0, \dot{x}_0=0$ 改变激励频率得到不同的分数阶振子的相图如下:

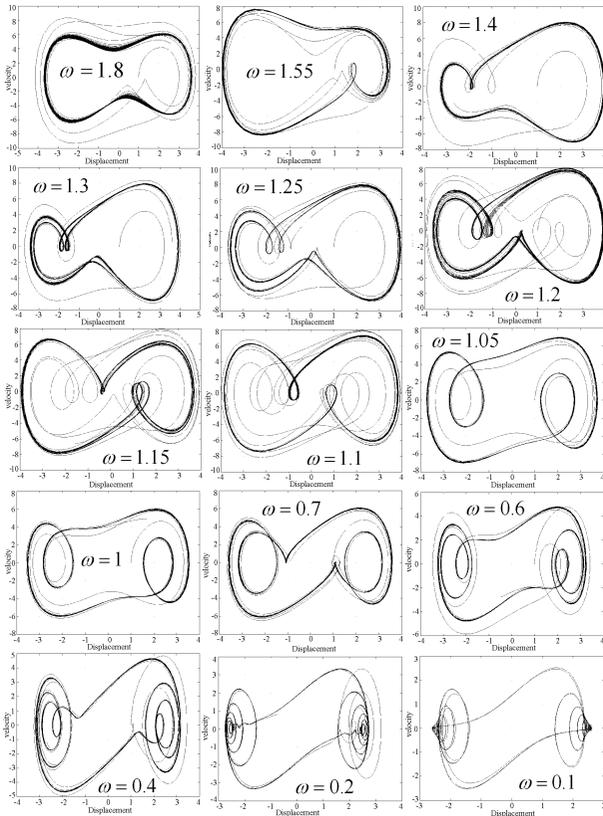


图6 不同激励频率时分数微分型 Duffing 振子的相图

Fig. 6 Phase diagram of fractional Duffing oscillator with varying excitation frequency

由图6可见,在不同激励频率下,分数微分型 Duffing 振子的相图出现复杂的变化,当激励频率较大时,振子作单极限环振动,此时相轨线旋转一圈形成封闭的环状;当激励频率为 1.55 及 1.4 时,相图上明显出现对称性破缺;当激励频率约为 1.15 - 1.3 时,相图上可见振子出现分岔,此时相轨线旋转两周后再形成封闭的曲线;继续减小激励频率可看到相图在约为 0.7 - 1.1 的频率区间变化不大;当激励频率减小到小于 0.6 时,随着激励频率的减小,在相图上出现混沌双吸引子,振子进入混沌.

2.3 分数阶值减小时振子进入混沌的临界力随之减小

取 $c=0.3, \omega=1.2, x_0=0.4, v_0=0.35$, 作出不同分数阶值下的激励力-位移分岔图如下:

由图7可见,随着分数阶值的减小,振子进入混沌的临界激励也随之减小;在分数阶值较大时如 $q=0.75$ 时分岔图上可明显看到分岔点,但当分数阶值较小时(如当小于 0.5 时),分岔图上的分岔点几乎消失,同时振子亦由倍周期分岔通向混沌演变成准周期振动直接进入混沌.

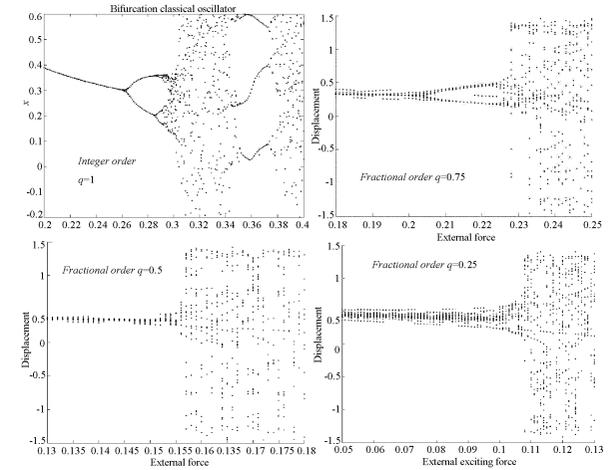


图7 不同分数阶值时激励力-位移分岔图

Fig. 7 Fork of excitation - displacement with varying fractional order

3 总结

本文推导了分数微分型 Duffing 振子的 Newmark 型单步数值计算格式,对分数微分型 Duffing 振子力学行为的研究表明:分数微分型 Duffing 振子具有独特的非线性动力特性,它与分数微分的阶数密切相关,随着分数微分型 Duffing 振子的分数阶值不断减小,振子将出现倍周期分岔并导致混沌;研究结果还表明分数微分型 Duffing 振子的非线性动力特性与外激励频率紧密相关,在不同的外激励频率下,分数微分型 Duffing 振子会呈现对称性破缺、分岔、混沌等强烈的非线性现象.研究分数微分型 Duffing 振子与经典 Duffing 振子的分岔结果表明:在一定参数范围内,分数微分型 Duffing 振子较经典 Duffing 振子,在较小的激励下即可进入混沌.

参 考 文 献

- 动工程学报, 2007, 20 (5): 459 ~ 467 (Liao Shaokai, Zhang wei. Dynamics of nonlinear fractional differential oscillator. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, 20 (5): 459 ~ 467 (in Chinese))
- 2 李根国. 具有分数导数型本构关系的粘弹性结构的静动力学行为分析. 上海大学博士学位论文, 2001: 2 ~ 3 (Li Genguo. Quasi - static and dynamical analysis for viscoelastic structures with fractional derivative constitutive relation. Shanghai university doctoral dissertation, 2001: 2 ~ 3 (in Chinese))
 - 3 Wei Zhang and Nobuyuki Shimizu. Numerical algorithm for dynamic problems involving fractional operators. *Int. J. of Japan Society of Mechanical Engineers, Ser. C*, 1998, 41 (3): 364 ~ 370
 - 4 Zhang W, Shimizu N. FE formulation for the viscoelastic body modeled by fractional constitution law. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 17(4): 354 ~ 365
 - 5 Wei Zhang, Nobuyuki SHIMIZU. Damping properties of the viscoelastic material described by fractional Kelvin—Voigt model. *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal. Series C*, 1999, 42(1): 9
 - 6 张卫等. 分数算子描述的粘弹性体力学问题数值方法. 力学学报, 2004, 36(5): 617 ~ 621 (Zhang Wei. The numerical analysis formulation of the visco - elastic solid modeled by fractional operator. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004, 36 (5): 617 ~ 621 (in Chinese))
 - 7 盛冬发. 几何非线性损伤粘弹性中厚板的动力学行为分析. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 50 ~ 59 (Shen Dongfa. Dynamical behaviors of nonlinear viscoelastic thick plates with damage. *Journal Of Dynamics Aand Control*, 2005, 3(4): 50 ~ 59 (in Chinese))

DYNAMICS OF FRACTIONAL DUFFING OSCILLATOR

Liao Shaokai Zhang wei

(Mechanics & Civil Engineering Dep. Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract After introducing fractional damping into classical Duffing oscillator, a high efficient numerical algorithm was deduced. The research on the fractional Duffing oscillator indicates that, decreasing the damping fractional order, the time period of oscillator changes and further goes to chaos. Under the external excitation forces of different frequencies, the strange attractor can be found at a lower frequency. The fractional Duffing oscillator comes into chaotic state earlier than the integral classical Duffing oscillator. The smaller the fractional order, the smaller the critical excitation needed to become chaos.

Key words fractional differentiation, Duffing oscillator, Newmark method