第 6 卷第 2 期 2008 年 6 月
1672-6553/2008/06(2)/107-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 2
Jun. 2008

结构动力方程精细直接积分法的简化计算*

张继锋[1]　邓子辰[1,2]　胡伟鹏[1]

(1. 西北工业大学力学与土木建筑学院,西安 710072)(2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

摘要　考虑了结构动力方程转化为状态空间方程后非齐次项的特点,提出了新的简化精细直接积分法. 通过分块计算矩阵,能够减小矩阵乘法的计算量,同时分别给出了利用梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式、高斯公式计算 Duhamel 积分时的不同简化格式. 与原有的精细直接积分法进行了对比,简化方法在保持高精度的同时提高了计算效率. 数值算例表明本文的简化方法的有效性,在处理大型问题和长时间仿真时将有着很大的优势.

关键词　精细积分，　直接积分，　分块计算，　简化计算

引 言

由钟万勰提出的精细积分法[1],在应用于求解线性定常结构动力方程时,能够在数值上得到精确解,但是这种方法需要对矩阵求逆,矩阵求逆不仅计算量大,数值稳定性也不好,有时逆矩阵还可能不存在,使得无法求解. 为了避免矩阵求逆,人们对非齐次项的 Duhamel 积分进行数值积分求解. 张森文等[3]提出了状态方程直接积分法,利用辛普生积分公式求解了 Duhamel 积分. 储德文等[4]讨论了精细直接积分法中积分方法的选择问题,指出 Cotes 积分和高斯积分是保持精细算法高精度的较好积分方法. 汪梦甫等[5,6]运用高斯积分计算结构动力方程一般解中的积分项,将高斯积分与指数矩阵的精细计算结合起来,随着插值点的增多,该方法在理论上可以达到任意高的精度. 由于插值方法都是插值点越多精度越高,为了达到相应的精度必然会加大插值点的数量,因而以上算法存在插值点过多后计算量增大的问题. 还有一些学者做了有益的工作[7,8].

本文考虑了结构动力方程转化为状态空间方程后非齐次项的特点,提出了精细直接积分法的简化计算方法. 对矩阵分块计算,在保持原有算法高精度的情况下提高了计算效率. 同时分别给出了利用梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式、高斯公式计算 Duhamel 积分时的简化格式,计算了每种简化格式所提高的计算效率.

1　结构动力方程的精细积分法

1.1　结构动力方程向状态空间方程的转化

对于 n 维线性定常结构的动力方程可表示如下:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \tag{1}$$

其中初始值 $x(0)$, $\dot{x}(0)$ 给定, M、C、$K \in R^{n\times n}$ ($x \in R^n$), $f(t)$ 为外部激励列向量.

对方程(1)的两边同时左乘 M^{-1} 可得:

$$\ddot{x} + M^{-1}C\dot{x} + M^{-1}Kx = M^{-1}f(t) \tag{2}$$

引入状态变量 $X_1 = x$, $X_2 = \dot{x}$,则状态向量为 $X = \{X_1, X_2\}^T$,可以把方程(1)转化为状态空间方程:

$$\dot{X} = AX + F(t) \tag{3}$$

其中 A 和 $F(t)$ 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{bmatrix}_{2n\times 1}$$

1.2　指数矩阵的精细积分法[1]

按常微分方程理论,对于一个非齐次方程

$$\dot{X} = AX + F(t) \tag{4}$$

其解可以表示为:

$$X(t) = \exp[A(t-t_0)]X_0 + \int_{t_0}^{t}\exp[A(t-t_1)]F(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \tag{5}$$

2008-01-17 收到第 1 稿,2008-05-07 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10772147,10572119,10632030)、高校博士点基金(20070699028)、陕西省自然科学基金(2006A07)、西北工业大学研究生创业种子基金资助、大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金(GZ0701)及西北工业大学基础研究基金资助项目

数值计算时,不需要每次都从头的 t_0 算起,而是由 t_k 算到 t_{k+1},令 $t=t_{k+1}$,$t_0=t_k$,$\Delta t=t_{k+1}-t_k$,这样式子可以变为如下格式:

$$X_{k+1}=\exp(A\Delta t)X_k+\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi \tag{6}$$

现在问题就归结于求解指数矩阵上,指数矩阵函数的加法定理给出下式:

$$T=\exp(A\Delta t)=[\exp(A\Delta t/m)]^m \tag{7}$$

其中 m 为任意正整数,选用 $m=2^N$. 由于 Δt 本来就是不大的时间区间,则 $\tau=\Delta t/m$ 将是非常小的区间. 这样对于 τ 区间内,取幂级数展开前5项就可以达到精度,有

$$T=\exp(A\Delta t)=[\exp(A\tau)]^m\approx(I_n+T_a)^{2N} \tag{8}$$

其中:$T_a=A\tau+(A\tau)^2[I_n+(A\tau)/3+(A\tau)^2/12]/2$,并且 T_a 是一个小量的矩阵.

上式有如下特点:

$$(I+T_a)\times(I+T_a)=I+2T_a+T_a\times T_a \tag{9}$$

因此式(8)相当于如下循环语句:

$$for(iter=0;iter<N;iter++)\quad T_a=2T_a+T_a\times T_a \tag{10}$$

以上语句循环结束后,再执行:

$$T=I+T_a \tag{11}$$

2 精细直接积分法的简化计算

2.1 简化计算的核心思想

当对式(6)的 Duhamel 项采用数值积分时,将会出现如下矩阵运算:

$$D=T_{2n\times2n}\times F(t)_{2n\times1} \tag{12}$$

对 T 和 $F(t)$ 进行如下分块:

$$T_{2n\times2n}=[T^{(1)}_{2n\times2n}\quad T^{(2)}_{2n\times2n}]$$

$$F(t)_{2n\times1}=\begin{bmatrix}F^{(1)}_{n\times1}\\F^{(2)}_{n\times1}\end{bmatrix} \tag{13}$$

由于状态空间方程中的 $F(t)$ 是一个 $2n\times1$ 的列向量,并且前 n 行均为零,分块以后得到的 $F^{(1)}_{n\times1}$ 是0,这样可以得到:

$$D=T_{2n\times2n}\times F(t)_{2n\times1}=T^{(2)}_{2n\times2n}\times F^{(2)}_{n\times1} \tag{14}$$

也就是相当于把下式:

$$\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{12n}\\\vdots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{2n1}&\cdots&\cdots&a_{2n2n}\end{bmatrix}_{2n\times2n}\times\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\\vdots\\b_{2n}\end{bmatrix}_{2n\times1} \tag{15}$$

转化为:

$$\begin{bmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{12n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{2nn}&\cdots&a_{2n2n}\end{bmatrix}_{2n\times n}\times\begin{bmatrix}b_n\\\vdots\\b_{2n}\end{bmatrix}_{n\times1} \tag{16}$$

通过以上变换可以使得在每一个时间步内当出现式(12)运算时,都用式(14)来计算,降低矩阵的阶数,实现简化计算. 只统计乘法的计算时间,从计算量上来说,式(16)需要做 $2n\times2n$ 次乘法,而式(15)需要做 $2n\times n$ 次乘法,可以将计算量减半. 当计算过程中出现式(12)的运算比较多时,简化计算可以大大提高计算效率.

2.2 采用不同数值积分公式计算 Duhamel 项的简化

在式(6)中,$\exp(A\Delta t)$ 可以通过指数函数的精细积分法算出,避免矩阵求逆,Duhamel 项可以采用数值积分的方法算出. 下面分别给出梯形公式、Simpson 公式、cotes 公式、高斯公式[2]格式的简化,这些简化格式均是以式(12)和式(13)为基础进行矩阵分块计算,可以简化计算,提高计算效率.

(1)当用梯形公式对 Duhamel 项进行计算时,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Delta t}{2}(T\times F(t_k)+F(t_{k+1})) \tag{17}$$

在式(17)中的 $T\times F(t_k)$ 可以利用上节所述的方法进行分块计算,这样把式(17)转化为:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Delta t}{2}(T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+F(t_{k+1})) \tag{18}$$

(2)当用 Simpson 公式对 Duhamel 项进行计算时可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Delta t}{6}(T\times F(t_k)+4T_{\frac{\Delta t}{2}}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2})+F(t_{k+1})) \tag{19}$$

在式(19)中的 $T\times F(t_k)$ 和 $T_{\frac{\Delta t}{2}}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2})$ 可以利用上节所述的方法进行分块计算,这样把式(19)转化为:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Delta t}{6}(T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+4T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{2}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{2})+F(t_{k+1})) \tag{20}$$

(3)当用 Cotes 公式对 Duhamel 项进行计算时

可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Delta t}{90}(7T\times F(t_k)+32T_{\frac{3\Delta t}{4}}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{4})+12T_{\frac{\Delta t}{2}}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2})+32T_{\frac{\Delta t}{4}}\times F(t_k+\frac{3\Delta t}{4})+7F(t_{k+1}))\quad(21)$$

在式(21)中的 $T\times F(t_k)$、$T_{\frac{3\Delta t}{4}}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{4})$、$T_{\frac{\Delta t}{2}}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2})$ 和 $T_{\frac{\Delta t}{4}}\times F(t_k+\frac{3\Delta t}{4})$ 可以利用上节所述的方法进行分块计算,这样把式(21)转化为:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Delta t}{90}(7T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+32T^{(2)}_{\frac{3\Delta t}{4}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{4})+12T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{2}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{2})+32T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{4}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{3\Delta t}{4})+7F(t_{k+1}))\quad(22)$$

(4)当用高斯积分公式对 Duhamel 项进行计算时可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^{\Delta t}T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y)}F(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y))\times\frac{\Delta t}{2}\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}w_i\times T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y_i)}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y_i))\times\frac{\Delta t}{2}\quad(23)$$

当 $n=3$ 时上式中的参数为:

$w_1=8/9,y_1=0;w_2=5/9,y_2=-\sqrt{0.6};$

$w_3=5/9,y_3=\sqrt{0.6};$

在式(23)中的 $T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y_i)}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y_i))$ 均可以进行分块计算,可以利用上节所述的方法进行分块计算,这样把式(23)转化为:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^{\Delta t}T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y)}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y))\times\frac{\Delta t}{2}\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}w_i\times T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{2}(1-y_i)}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y_i))\times\frac{\Delta t}{2}\quad(24)$$

3 算例分析

算例取自文献 4,方程为

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sin t\\0.5\sin t\end{Bmatrix}$$

初始条件为:

$x_{(}0)=2.5,x_2(0)=0,$

$\dot{x}_1(0)=1.0,\dot{x}_2(0)=1.0$

该算例的解析解为:

$$x_1=2\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t)+0.5\cos(\sqrt{3}t)+\sin t$$

$$x_2=\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t)-\cos(\sqrt{3}t)+\sin t$$

表 1　数值计算结果的比较

Table 1　The comparison of numerical calculation results

	t	analytic solution	Trapezium formula	simplified Simpson formula	Cotes formula[4]	simplified Cotes formula	Gauss formula[5]	simplified Gauss formula
x_1	1	2.281682	2.287101	2.281678	2.281682	2.281682	2.281682	2.281682
	3	−0.672591	−0.670390	−0.672591	−0.672591	−0.672591	−0.672591	−0.672591
	5	−3.166587	−3.170344	−3.166585	−3.166587	−3.166587	−3.166587	−3.166587
	7	1.579204	1.578316	1.579204	1.579204	1.579204	1.579204	1.579204
	9	1.909163	1.910862	1.909162	1.909163	1.909163	1.909163	1.909163
	11	−0.358789	−0.359151	−0.358787	−0.358789	−0.358789	−0.358789	−0.358789
	13	−1.958604	−1.956936	−1.958605	−1.958604	−1.958604	−1.958604	−1.958604
	15	0.222546	0.222680	0.222545	0.222546	0.222546	0.222546	0.222546
x_2	1	1.762272	1.760253	1.762276	1.762272	1.762272	1.762272	1.762272
	3	−0.847128	−0.844785	−0.847130	−0.847128	−0.847128	−0.847128	−0.847128
	5	−1.160616	−1.160626	−1.160616	−1.160616	−1.160616	−1.160616	−1.160616
	7	−0.011769	−0.013583	−0.011768	−0.011769	−0.011769	−0.011769	−0.011769
	9	2.401726	2.400965	2.401727	2.401726	2.401726	2.401726	2.401726
	11	−1.903721	−1.900946	−1.903723	−1.903721	−1.903721	−1.903721	−1.903721
	13	0.312115	0.312515	0.312115	0.312115	0.312115	0.312115	0.312115
	15	−0.390419	−0.393981	−0.390415	−0.390419	−0.390419	−0.390419	−0.390419

取步长 $\Delta t=0.2$，$N=20$，利用本文简化计算方法分别对梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式、高斯公式格式进行计算，计算结果列于表 1，所需时间列于表 2.

由于式(6)直接积分时 T 矩阵只需要计算一次，计算量主要集中在 $T\times X_k$ 和 Duhamel 项数值积分上，因此本文统计的是迭代计算式(6)的时间，每一步要计算一次 $T\times X_k$ 和 Duhamel 项数值积分.

文献 4 指出 Cotes 积分和高斯积分是保持精细算法高精度的较好积分方法，因此本文选择了 Cotes 积分和高斯积分作计算结果的对比.

从表 1 可得本文方法简化后的 Cotes 公式和高斯积分公式计算后结果仍然保持了原有的高精度. 本文提出的简化方法分块计算矩阵，简化了计算步骤，并不会改变方法的精度.

表 2　数值计算效率的比较(单位:秒)

Table 2　The comparison of numerical calculation efficiency

	the time of iterating 5000 steps	the time of iterating 10000 steps	the time of iterating 50000 steps
Trapezium formula	0.34	0.69	3.40
simplified Trapezium formula	0.28	0.56	2.78
Simpson formula[3]	0.51	1.01	5.02
simplified Simpson formula	0.38	0.77	3.78
Cotes formula [4]	0.88	1.75	8.71
simplified Cotes formula	0.62	1.23	6.12
Gauss formula [5]	0.76	1.53	7.61
simplified Gauss formula	0.44	0.87	4.37

从表 2 得本文简化计算方法可以将梯形公式的计算效率提高约 20%，将 Simpson 公式的计算效率提高约 25%，将 Cotes 公式的计算效率提高约 30%，将高斯公式的计算效率提高约 43%. 本文方法的显著优势在于插值点越多，提高的效率越多，这对于计算大型结构以及长时间仿真可以显著节约计算时间，有重要意义.

4　结论

本文分别给出了利用梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式、高斯公式计算 Duhamel 积分时的简化格式，简化计算方法可以将梯形公式的计算效率提高约 20%，将 Simpson 公式的计算效率提高约 25%，将 Cotes 公式的计算效率提高约 30%，将三点高斯公式的计算效率提高约 43%. 本文方法对矩阵进行分块计算，考虑状态空间方程非齐次项的特点，对矩阵进行分块计算，减小了矩阵的维数，实现简化计算，提高了计算效率. 同时本文的方法还可以进一步推广，在利用别的积分公式计算时注意考虑非齐次项的特点，对矩阵进行分块计算，可以提高计算效率，节约计算时间. 数值算例表明本文的简化方法在保持精度的同时提高了计算效率，在处理大型问题和长时间仿真时将有着很大的优势.

参 考 文 献

1　钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京：高等教育出版社，2006 (Zhong Wanxie. Symplectic solution methodology in applied mechanics. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese))

2　封建湖，车刚明，聂玉峰. 数值分析原理. 北京：科学出版社，2001 (Feng Jianhu, Che Gangming, Nie Yufeng. Numerical analysis principle. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))

3　张森文，曹开彬. 计算结构动力响应的状态方程直接积分法. 计算力学学报，2000，17(1)：94 ~ 97 (Zhang Senwen, Cao Kaibin. Direct integration of state equation method for dynamic response of structure. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, 17(1): 94 ~ 97 (in Chinese))

4　储德文，王元丰. 精细直接积分法的积分方法选择. 工程力学，2002，19(6)：115 ~ 119 (Chu Dewen, Wang Yuanfeng. Integration formula selection for precise direct integration method. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(6): 115 ~ 119 (in Chinese))

5　汪梦甫，周锡元. 结构动力方程的高斯精细时程积分法. 工程力学，2004，21(4)：13 ~ 16 (Wang Mengfu, Zhou Xiyuan. Gauss precise time – integration of structure dynamic analysis. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(4): 13 ~ 16 (in Chinese))

6　汪梦甫，周锡元. 结构动力方程的更新精细积分法. 力学

学报, 2004, 36 (2): 191 ~ 195 (Wang Mengfu, Zhou Xiyuan. Renewal precise time step integration method of structure dynamic analysis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004, 36(2): 191 ~ 195 (in Chinese))

7 张素英,邓子辰. 非线性动力学方程的李级数解法及其应用. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 13 ~ 20 (Zhang Suying, Deng Zichen. Lie series solution of nonlinear dynamic equations and it's application. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 13 ~ 20 (in Chinese))

8 张素英,邓子辰. 非线性动力学方程的四阶近似几何积分的特性与计算. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 21 ~ 27 (Zhang Suying, Deng Zichen. Property and computation of a fourth - order geometric integration for nonlinear dynamic equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 21 ~ 27 (in Chinese))

SIMPLIFIED COMPUTATION OF PRECISE IMMEDIATE INTEGRATION METHOD FOR STRUCTURE DYNAMIC EQUATION *

Zhang Jifeng[1] Deng Zichen[1,2] Hu Weipeng[1]

(1. *School of Mechanics, Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

(2. *State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract After considering the characteristics of non - homogeneous items of state space equation which is conversed by structure dynamic equation, simplified precise immediate integration method is presented. Though blocking computing matrix, it can decrease the calculation amount of matrix multiplication. Meanwhile, the different simplified formats are presented when computing Duhamel integration with Trapezium formula、Simpson formula、Cotes formula and Gauss formula. Compared with the precise immediate integration method, simplified method can maintain the calculation accuracy and improve the calculation efficiency at the same time. The results of examples show the validity of simplified method in this paper and it will have large advantage in dealing with large - scale and long time simulations.

Key words precise integration, immediate integration, partitioning calculation, simplified calculation

Received 17 January 2008, revised 7 May 2008.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10772147, 10572119, 10632030), the Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China (20070699028), Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China (2006A07), Supported By graduate starting seed fund of Northwestern Polytechnical University, Open Foundation of State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment of Dalian University of Technology (GZ0701) and the Fundamental Research Foundation of Northwestern Polytechnincal University