第 6 卷第 2 期 2008 年 6 月
1672-6553/2008/06(2)/102-5

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 2
Jun. 2008

非线性增益下半导体激光方程的动力学行为分析*

王作雷 毕勤胜

（江苏大学理学院，镇江 212013）

摘要 分析了在非线性增益下各种因素对 Lang – Kobayashi 模型动力学行为的影响. 由于时滞反馈的作用，系统中存在着不同的 ECM 解，Hopf 分岔是这些 ECM 解失稳的主要原因，进而演化为各种形式的混沌解，不同吸引子之间的相互作用会引发混沌结构的突变，表现为混沌吸引子在空间尺寸上的明显变化，随着时滞量的变化，这些演化模式会重复出现. 值得指出的是，在一定条件下，不同频率的两个 ECM 共存，其中之一会由 Hopf 分岔失稳，并由倍周期分岔进入混沌，最终通过混沌危机回到另一个稳定的 ECM 上. 另外，随着非线性增益系数的变化，在极坐标下系统的概周期运动的两个频率相差很大，激光器呈现出明显的快慢效应.

关键词 Lang – Kobayashi 方程， 时滞， 分岔， 混沌， 快慢效应

引言

由于激光在外腔中来回引起激光的时滞反馈现象[1]，这种时滞反馈会对激光器的行为产生非常明显的影响[2]，在最近的几十年中，国内外许多学者对时滞反馈下的激光器的复杂性进行了大量的研究[3-5]，得到了许多基于各种数学模型的理论结果，并与实验结果作了详细的比较[6-7]，其中一类较为典型的数学模型，即 Lang – Kobayashi 方程[8]，表示为

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{ds} = \dfrac{1}{2}(1+i\alpha)(G-\dfrac{1}{\tau_p})E + \dfrac{\kappa}{\tau_{in}}e^{(-i\tilde{\omega}_0\tau)}E(s-\tau) \\ \dfrac{dN}{ds} = J - \dfrac{N}{\tau} - G|E|^2 \end{cases} \tag{1}$$

引起了广泛的研究兴趣，其中 $E(s)$ 为复电场，$N(s)$ 是载流子密度，τ 为时滞量（$\tau = 2L/c$，其中 L 为光腔长度，c 是光速），τ_s 是载流子寿命，τ_p 是光子寿命，τ_{in} 为激光腔内往返时间，κ 是反馈强度，α 表示线宽增强因子，$\tilde{\omega}_0\tau$ 为反馈相位，J 是电抽运项，G 为增益函数.

在增益函数 G 为线性函数，即 $G = G_N(N - N_0)$ 下，人们发现了 Hopf 分岔以及 Hopf – saddle – node 分岔[9]，并讨论了这两种分岔形式对激光器全局行为的影响[10]. 然而，由于在精确描述激光器行为起着非常重要的作用，同时，增益函数又明显地与复电场相关，这种线性函数的描述多少具有一定的近似程度[11]. 本文考虑激光器在非线性增益 $G = G_N(N - N_0)(1 - \varepsilon|E|^2)$ 下的动力学行为[12]，其中 G_N 是模增益系数，ε 是非线性增益系数，N_0 是无反馈时载流子密度，探讨系统随反馈强度、时滞量以及非线性增益系数变化下激光器行为的演化过程.

1 非线性增益下的平衡态解

引入变换 $s = t\tau_p$，$E = \sqrt{2/(\tau_s G_N)}\,Y$，$N = N_0 + (2Z+1)/(\tau_p G_N)$，则（1）可以表示为如下无量纲形式

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = (1+i\alpha)[Z-(1+2Z)\beta|Y|^2]Y + Be^{(-iC_p)}Y(t-\theta) \\ \dfrac{dZ}{dt} = C - DZ - D(1+2Z)(1-2\beta|Y|^2)|Y|^2 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\beta = \dfrac{\varepsilon}{\tau_s G_N}$，$B = \dfrac{\tau_p}{\tau_{in}}\kappa$，$C_p = \tilde{\omega}_0\tau$，$\theta = \tau/\tau_p$，$D = \dfrac{\tau_p}{\tau_s}$，$C = \dfrac{1}{2}\tau_p^2 G_N[J - \dfrac{1}{\tau_s}(N_0 + \dfrac{1}{\tau_p G_N})]$.

显然，$(Y, Z) = (0, C/D)$ 为（2）的一个平衡点，对应于激光器的关闭状态. 同时，还存在如下形式的平衡解

$$Y = Y_s e^{i\omega_s t}, Z = Z_s \tag{3}$$

称为连续波形解（Continue Wave Solution），也称为外腔模态解（External Cavity Mode），简记为 *ECM* 解.

2008-02-24 收到第 1 稿，2008-03-10 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目（20476041，10602020）

将 (3) 代入 (2)，可知 ECM 解满足

$$[2Y_s^2-\frac{2C+D}{D(1-2\beta\cos(C_p+\omega_s\theta))}](2\beta Y_s^2-1)-1=0 \tag{4}$$

$$Z_s=\frac{C-DY_s^2(1-2\beta Y_s^2)}{D+2DY_s^2(1-2\beta Y_s^2)} \tag{5}$$

该 ECM 的频率满足如下方程

$$\omega_s+\alpha B\cos(C_p+\omega_s\theta)+B\sin(C_p+\omega_s\theta)=0 \tag{6}$$

由于决定 ECM 解频率的方程(6)为超越方程,显然,对于不同的参数,存在多个 ω_s,因而也相应地存在多个 Y_s 和 Z_s,即存在多个 ECM 解,这些 ECM 解的稳定性由相应的特征方程来决定,由于时滞系统特征方程的复杂性,我们很难得到这些条件的解析形式,下面我们通过数值分析进一步讨论各种因素对激光器行为的影响.

2　不同反馈强度下时滞量的影响

取定参数 $N_0=1.1\times10^{24}\mathrm{m}^{-3}$, $G_N=1.1\times10^{-10}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, $\alpha=4.0$, $\tau_s=2.0\mathrm{ns}$, $\tau_p=2.0\mathrm{ps}$, $J=4.16\times10^{33}\mathrm{m}^{-3}/\mathrm{s}$, $\tau_m=8.0\mathrm{ps}$, $\tilde{\omega}_0\tau=\pi/2$,将时滞量 τ 作为分岔参数(τ 以 $2.0n$ 作为单位),图 1 给出了在 $\varepsilon=1$ (ε 以 $3.75\times10^{-24}\mathrm{m}^3$ 作为单位)时反馈强度 κ 分别在 0.1 和 0.65 时随时滞量变化的分岔图.

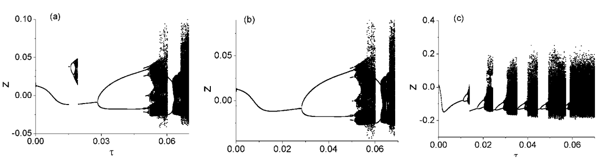

图 1　不同反馈系数下的分岔图:
(a)和(b)不同初值下 $\kappa=0.1$ 的分岔图,(c)$\kappa=0.65$

Fig. 1　Bifurcation diagrams with different feedback coefficients:
(a)and(b)$\kappa=0.1$ with different initial values,(c)$\kappa=0.65$

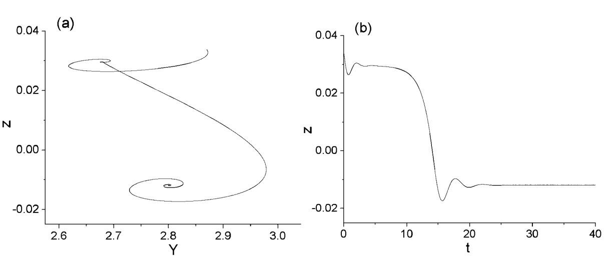

图 2　$\tau=0.01513$ 的相图(a)和时间历程图(b)

Fig. 2　(a) phase portrait and (b) time history for $\tau=0.01513$

在反馈强度较弱时,如 $\kappa=0.1$,激光器表现为稳定的 ECM_1 解,随着时滞量的增加,当 $\tau=0.01513$ 时,对应于不同的初值,除了随时滞量增加继续保持稳定的 ECM_1 解外,同时也存在另一个 ECM 解,记为 ECM_2(见图 2),其频率分别为 $\omega_{s1}=0.241191$, $\omega_{s2}=0.234292$. ECM_2 在 $\tau=0.01652$ 时产生 Hopf 分岔,呈现为概周期振荡(注 1),记为 QS_1,其中与 Hopf 分岔相关的新频率 $\Omega_1=0.3383965$. 该概周期解随时滞量的增加由周期倍化分岔进入混沌(见图 3),此时混沌吸引子的相轨迹集中于 QS_1 的邻域内. 随着时滞量的增加,混沌结构发生变化(见图 4b),混沌轨迹在 ECM_2 附近产生振荡,这也可以从时间历程得到证实,在 $\tau=0.0180$ 时,Y 的变化基本上是按照 QS_1 的步调(见图 4a),而在 $\tau=0.0191$ 时,Y 不仅按照 QS_1 的步调,同时在 $Y=2.8$ 附近产生了小幅振荡 (见图 4c).

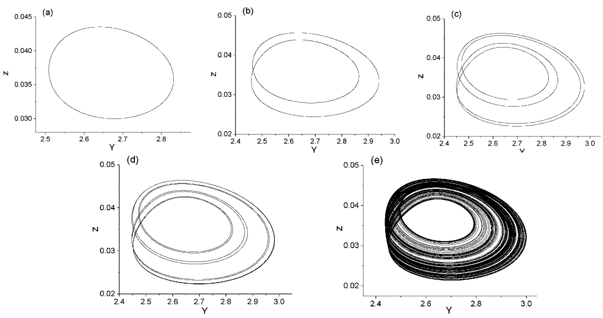

图 3　倍周期分岔导致混沌

Fig. 3　Period - doubling bifurcations to chaos

(a)$\tau=0.01655$,(b)$\tau=0.0175$,(c)$\tau=0.0178$,(d)$\tau=0.01785$,(e)$\tau=0.018$

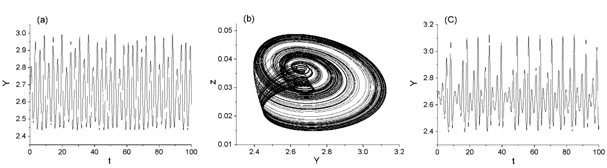

图 4　混沌结构的突变

Fig. 4　Catastrophe of chaotic structures:(a)Time history for $\tau=0.018$, (b) and (c) phase portrait and time history for $\tau=0.0191$

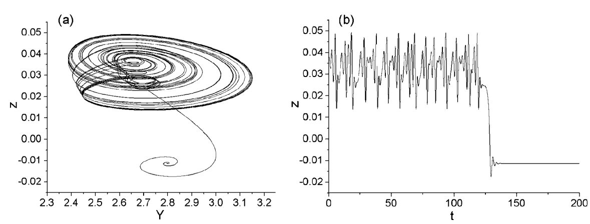

图 5　$\tau=0.0193$ 时的混沌危机(a)相图,(b)时间历程

Fig. 5　Chaotic crisis for $\tau=0.0193$ (a) Phase portrait,(b) time history

当 τ 增加到 0.0193 时,混沌结构失稳,产生混沌危机,激光器的行为长时间在混沌吸引子附近振荡之后,最终稳定到 ECM_1 解上(见图 5). ECM_1 解在 $\tau=0.02840$ 由 Hopf 分岔进入概周期运动

(QS_2)，其相应的 Hopf 分岔频率为 $\omega_{s1}=0.232793$（见图 6a）. 当 $\tau=0.052015$ 时系统轨迹经历了很长时间的类似混沌过程之后最终稳定到 QS_2 上（见图 6b,c），时滞量 τ 再稍作增加，则 QS_2 由环面破裂进入混沌，其结构在 $\tau=0.0589$ 时产生突变，表现为其吸引子尺寸在空间上的突然增大（见图 7a,b）. 随着时滞量 τ 的继续增加，这种现象还会重复出现（见图 1）.

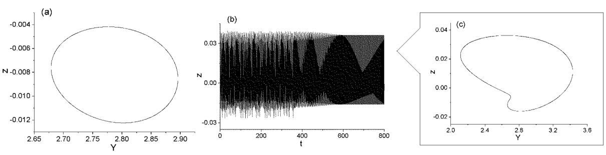

图 6 环面及环面破裂

Fig. 6 Torus and Torus breaking (a) $\tau=0.02840$, (b) and (c) $\tau=0.052015$

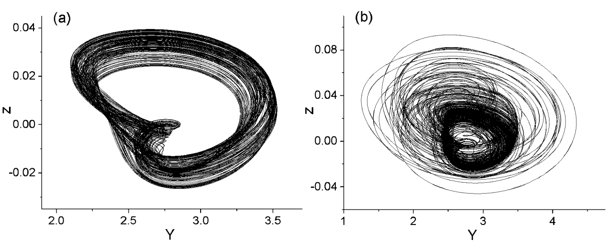

图 7 混沌结构的突变

Fig. 7 Catastrophe of chaotic structures (a) $\tau=0.05203$, (b) $\tau=0.059$

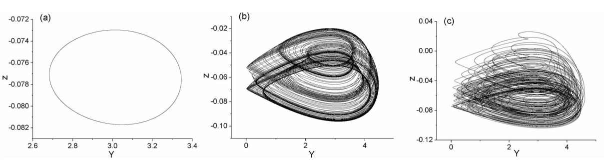

图 8 混沌演化过程及混沌结构的突变

Fig. 8 The evolution of chaos and catastrophe of chaotic structures: (a) $\tau=0.0111$, (b) $\tau=0.0133$, (c) $\tau=0.0138$

现在我们增大反馈强度，当 $\kappa=0.65$ 时，在时滞量较小时，激光器仍然表现为稳定的 ECM_1 解，随着时滞量的增加，同样地由 Hopf 分岔导致概周期运动，并进一步由环面破裂进入混沌（见图 8a,b）. 混沌吸引子在 $\tau=0.01379$ 时产生突变（见图 8c）.

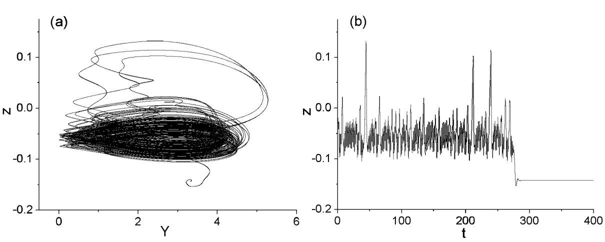

图 9 $\tau=0.013853$ 时的混沌危机(a)相图，(b)时间历程

Fig. 9 Chaotic crisis for $\tau=0.013853$ (a) phase portrait, (b) time history

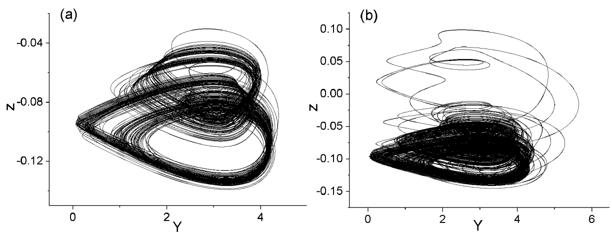

图 10 混沌结构的突变

Fig. 10 Catastrophe of chaotic structures: (a) $\tau=0.021556$, (b) $\tau=0.0216$

当 $\tau=0.013853$ 时，系统轨迹经过长时间在混沌吸引子附近振荡后，最终稳定在另一个 ECM 解（记为 ECM_2，见图 9），ECM_2 经历同样的过程进入混沌，并在 $\tau=0.0216$ 附近产生突变（见图 10）. 这些混沌结构突变的引起主要是因为在系统中存在其他不稳定的 ECM 解，这些 ECM 解也会产生相应的分岔行为，如 Hopf 分岔，这些分岔过程与混沌吸引子相互作用，引发了混沌吸引子尺寸在空间上的突然变化.

随着时滞量的继续增加，混沌危机又会使系统稳定到其他不同的 ECM，经过类似的分岔进入混沌，引发混沌突变，这一现象随着时滞量的增加循环往复地呈现出来（见图 1）.

3 不同反馈强度下非线性增益的影响

我们现在固定时滞量 $\tau=1.0$，图 11 分别给出了反馈强度 $\kappa=0.065$ 和 $\kappa=0.1$ 时系统随非线性参数 ε 变化的分岔过程. 当反馈强度较小时，即使在 ε 很小时，激光器表现为混沌振荡，随着 ε 的增加，激光器会出现各种形式的概周期运动（见图 12）（注 2），并在 $\varepsilon=1.7063$ 时由 Hopf 分岔导致 3-D 环面运动（见图 13a,b）. 除了原 ECM 频率 ω_s 外，还有与 Hopf 分岔相关的频率 $\Omega_1=0.98559$ 以及 $\Omega_2=0.04161$，注意到 Ω_1 和 Ω_2 相差非常大，同时，在极坐标下 ω_s 不体现，环面运动在极坐标下表现为概周期模式，此时极坐标下的概周期解的行为类似于快慢系统的 Bursting 现象[13]，即激光器围绕相空间圆管运动（快尺度），每隔一段时间由鞍结分岔跳出圆管，进入慢尺度的平缓运动，然后又回到圆管上运动. 频率 Ω_2 随着 ε 的增大逐渐变小，如 $\varepsilon=3.0$ 时 $\Omega_2=0.039572$，$\varepsilon=3.336$ 时 $\Omega_2=0.0389995$. 并在 $\varepsilon=3.337$ 时突然消失，系统逐渐稳定到 ECM 解（见图 13c）.

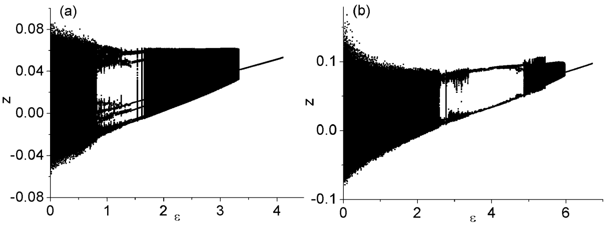

图 11　不同反馈系数下的分岔图

Fig. 11　Bifurcation diagrams with different feedback coefficients: (a) $\kappa = 0.065$, (b) $\kappa = 0.1$

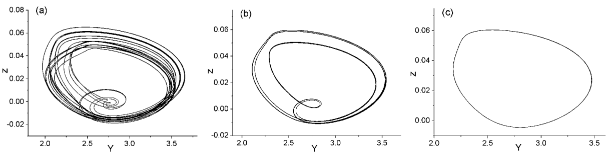

图 12　概周期窗口

Fig. 12　Torus windows (a) $\varepsilon = 1.0$, (b) $\varepsilon = 1.5$, (c) $\varepsilon = 1.6$

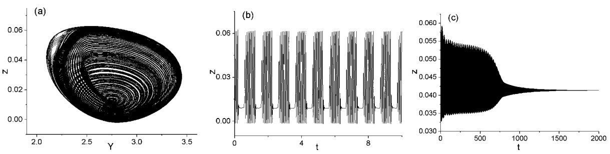

图 13　3 – *D* 环面及 *ECM*

Fig. 13　3 – D Torus and ECM :(a) Phase portrait for $\varepsilon = 1.8$, (b) time history for $\varepsilon = 1.8$, (c) time history for $\varepsilon = 3.337$

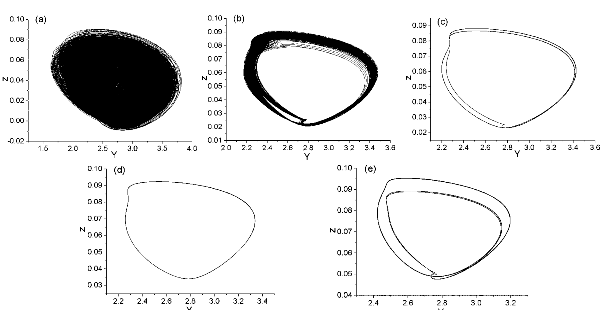

图 14　混沌结构收缩及概周期窗口

Fig. 14　Structure contraction of chaos and torus windows (a) $\varepsilon = 2.0$, (b) $\varepsilon = 3.35$, (c) $\varepsilon = 3.4$, (d) $\varepsilon = 4.0$, (e) $\varepsilon = 4.7$

增大反馈系数,当 $\kappa = 0.1$ 时,在时滞量较小时,系统依然表现为混沌振荡,其相轨迹充满了空间区域,随着 ε 的增加,混沌结构逐渐收缩到围绕极坐标下的周期轨道的某邻域内并最终稳定到极坐标下的周期轨道上(见图 14),在混沌区域内,出现极坐标下的各种周期窗口,并在 $\varepsilon = 4.85979$ 时由周期窗口的 Hopf 分岔进入极坐标下的概周期运动(见图 15a, b),此时相应的两个频率分别为 $\omega = 0.0041973$ 和 $\Omega = 0.981832$,呈现出快慢效应(见图 15 c). 同时,在 $\varepsilon = 5.979$ 时稳定到 *ECM* 解上(见图 15d).

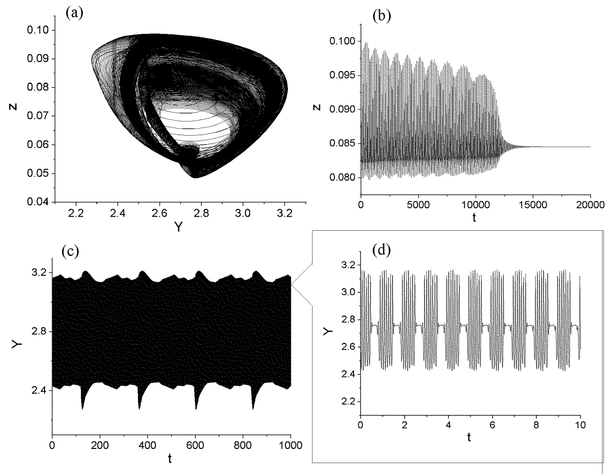

图 15　3 – D 环面及 ECM:(a) $\varepsilon = 4.86$ 的相图,(b) $\varepsilon = 5.797$ 的时间历程,(c)和(d) $\varepsilon = 4.86$ 的时间历程

Fig. 15　3 – D Torus and ECM:(a) Phase portrait for $\varepsilon = 4.86$, (b) time history for $\varepsilon = 5.797$, (c) and (d) time history for $\varepsilon = 4.86$

4　结论

与线性增益相比较,非线性增益下的激光器存在更为丰富的动力学现象. 不同的反馈强度、时滞量以及不同的非线性增益系数都会对系统的行为产生明显的影响. 在一定条件下,不同频率的两个稳定的 *ECM* 共存,其中之一会在另一个 *ECM* 失稳并进入混沌的过程中一直保持稳定,并由混沌危机连接这两种动力学行为,混沌结构在相空间上的尺寸会发生突然变化. 特别地,随着非线性增益系数的变化,激光器会呈现出明显的快慢效应.

参　考　文　献

1　Masoller C. Effect of the external cavity length in the dynamics of a semiconductor laser with optical feedback . *Optics Communications*, 1996, 128:363 ~ 376

2　Sieber J, Radziunas M, Schneider K. Dynamics of multi section semiconductor lasers. *Mathematical Modeling Analysis*, 2004, 9(1):51 ~ 66

3　Perioux D and Paul Mandel. Low-frequency fluctuations in the Lang-Kobayashi equations. *Physical Review E*, 2003, 68: 056213 1 ~ 7

4　Wünsche H J , Bauer S, Kreissl J, Ushakov O, Korneyev N, Henneberger F, Wille E, Erzgräber H, Peil M, Elsäβer W, Fischer I. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study on semiconductor lasers. *Physical Review Letter*, 2005, 94:163901

5 Erzgräber H, Krauskopf B and Lenstra D. Compound laser modes of mutually delay coupled lasers. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2006, 5(1): 30 ~ 65

6 Hohl A, Gavrielides A. Bifurcation cascade in a semiconductor laser subject to optical feedback. *Physical Review Letter*, 1999, 82: 1148 ~ 1151

7 Green K and Krauskopf B. Global bifurcations and bistability at the locking boundaries of a semiconductor laser with phase-conjugate feedback. *Physical Review E*, 2002, 66: 073207

8 Lang R and Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. Quantum Electron*, 1980, 16: 347 ~ 355

9 Zimmermann M G, Natiello M A, Solari H G. Sil'nikov-saddle-node interaction near a codimension-2 bifurcation: laser with injected signal. *Physica D*, 1997, 109: 293 ~ 314

10 Sciamanna M, Erneux T, Rogister F, Deparis O, Megret P, Blondel M. Bifurcation bridges between external-cavity modes lead to polarization self-modulation in vertical-cavity surface-emitting lasers. *Physical Review A*, 2002, 65: 041801

11 Braza P A, Erneux T. Constant phase, phase drift, and phase entrainment in lasers with an injected signal. *Physical Review A*, 1998, 41: 6470 ~ 6479

12 Bauer S, Brox O, Kreissl J, Sartorius B, Radziunas M, Sieber J, Wünsche H-J, Henneberger F. Nonlinear dynamics of semiconductor lasers with active optical feedback. *Physical Review E*, 2004, 69: 016206

13 郜志英,陆启韶. 神经元钙振荡的非线性动力学研究. 动力学与控制学报, 2007, 5(2): 97 ~ 104 (Gao Z Y, Lu Q S. Nonlinear dynamics of calcium oscillations in neurons. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2): 97 ~ 104 (in Chinese))

DYNAMICAL ANALYSIS ON THE SEMICONDUCTOR LASERS WITH NONLINEAR GAIN SATURATION COEFFICIENT *

Wang Zuolei Bi Qinsheng

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

Abstract The influence of various factors on the dynamics of the Lang-Kobayash equations with nonlinear gain saturation coefficient was investigated. Because of the existence of time delay feedback, there may exist different ECM solutions, which may lose the stabilities via Hopf bifurcation and further evolve to various forms of chaos. The interactions between different attractors may cause the catastrophe of chaotic structures, which results in sudden space scale change of chaos. With the change of time delay, these modes will appear again and again. It is worth to point out that, for certain parameter conditions, two ECM solutions with different frequencies may coexist, one of which may lose the stability via Hopf bifurcation and leads to chaos by cascading of period-doubling bifurcations, while it may finally settle down to the other ECM solution via chaos crisis. Furthermore, with the variation of nonlinear gain saturation coefficient, the two frequencies of the quasi-periodic movement in polar coordinate are quite separated, which results in the obvious fast-slow effect in the lasers.

Key words Lang-Kobayashi equations, time delay, bifurcation, chaos, fast-slow effect

Received 24 February 2008, revised 10 March 2008.

* This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (20476041, 10602020)