第 6 卷第 2 期 2008 年 6 月
1672-6553/2008/06(2)/097-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 2
Jun. 2008

一类自治脉冲微分方程的动力学研究 *

钱临宁　陆启韶

(北京航空航天大学理学院数学系,北京　100083)

摘要　对一类自治脉冲微分方程的动力学性质进行了研究,给出了半平凡周期解的存在与稳定的充分条件,建立 Poincaré 映射将周期解问题转化为不动点问题. 理论分析及数值模拟表明,半平凡周期解通过跨临界分岔获得稳定的正周期 -1 解. 数值模拟显示,随着控制参数的变化,正周期 -1 解通过倍周期分岔出正周期 -2 解,再通过一系列倍周期分岔通向混沌.

关键词　脉冲动力系统,　自治脉冲微分方程,　跨临界分岔,　周期解

引 言

脉冲微分方程主要分为三类:脉冲出现在固定时刻的脉冲微分方程,脉冲出现在变时刻的脉冲微分方程,和脉冲自治微分方程[1,2]. 近年来,关于脉冲微分方程理论的研究多集中于考虑脉冲控制施行于固定时刻的情形[3,4],而对于状态依赖的脉冲控制系统的研究相对较少. 然而,在很多实际的控制问题中,脉冲不是发生在固定时刻,而是根据状态进行反馈,此时用自治脉冲方程来描述实际问题应该更加合理.

众所周知,连续动力系统的分岔理论已经较为完善[5~7],而对于脉冲动力系统的研究较多的集中在解的性质,很少讨论分岔情况. 文[3]将周期解问题转化为不动点问题,讨论了从边界周期解到正周期 -1 解的分岔情况;文[4]利用频闪映射得到了正周期 -1 的具体表达式,但只是在数值上讨论了正周期解的分岔情况. 在文[3, 4]中都用到了离散映射. 由于所考虑的脉冲发生在固定的周期时刻,这些离散映射容易求得. 而对于状态依赖的脉冲系统,由于脉冲时刻无法事先确定,不能用类似的方法获得相应的映射,因此,到目前为止并没有太多的方法可以用来讨论其动力学性质. 文[8]讨论的是状态依赖的脉冲控制,利用周期解的扰动解求得 Poincaré 映射,研究了系统周期解的分岔情况,对上述问题做出了有意义的尝试. 受文[8]的启发,本文考虑一类脉冲自治微分方程,利用边界周期解的性质及定性理论,将边界周期解的分岔问题转化为一个一维的离散动力系统,从而得出正周期解的存在与稳定性条件,并用数值结果加以验证. 与文[8]不同的是,详细的理论研究表明,从边界周期解到正周期解的分岔是通过跨临界分岔获得,而不是通常的切分岔. 最后数值模拟表明,随着控制参数的变化,正周期 -1 解通过倍周期分岔出正周期 -2 解,再通过一系列倍周期分岔通向混沌.

1　模型的建立

考虑如下捕食与被捕食系统

$$\begin{cases}\dot{x} = rx(1-x) - axy \\ \dot{y} = \dfrac{bxy}{1+x} - cy\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)$,$y(t)$ 分别表示食饵与捕食者的数量,而常数 $r,a,b,c>0$,其中 r 是食饵的内禀增长率,c 是捕食者的死亡率,a 和 b 分别描述食饵的消耗和捕食者的受益.

在生态问题中,系统(1)可以用来描述害虫(食饵)与天敌(捕食者)之间的相互作用关系,(1)的动力学性质相对比较简单:当 $b>2c$ 时,系统存在一个正的全局渐近稳定的平衡点 $(x^*,y^*) = \left(\dfrac{c}{b-c},\dfrac{r(b-2c)}{a(b-c)}\right)$;当 $b\le 2c$ 时 $y(t)$ 灭绝,同时 $x(t)$ 趋向于食饵的环境容纳量. 显然第二种情形是我们不愿意看到的,因为不利于保护物种的多样性,因此有必要对系统(1)引入生态控制.

过去在模拟种群的控制问题时,常常假设害虫

2007-06-03 收到第 1 稿,2007-08-25 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10572011)

的捕杀和天敌的释放是连续的. 这样的假设不太合理. 因为在实际中,控制措施只是在某种需要控制的种群达到一定的阈值时才进行的,这样的控制策略称为状态脉冲控制策略,其过程可以描述为:

$$\begin{cases}\dot{x}=rx(1-x)-axy,\dot{y}=\dfrac{bxy}{1+x}-cy, x\neq h\\ \Delta x=-px,\Delta y=qy, x=h\end{cases}\tag{2}$$

这里参数 $h,q>0,p\in(0,1)$ 而 $\Delta x(t)=x(t^+)-x(t)$, $\Delta y(t)=y(t^+)-y(t)$. 当害虫数量 $x(t)$ 在时刻 $t(h)$ 增大到某个阈值 h 时,我们对系统进行控制,使得害虫数量 $x(t)$ 减少为 $(1-p)h$,同时天敌的数量 $y(t)$ 由于释放变化为 $(1+q)y(t(h))$.

式(2)的解定义在 R^+,并在 $R^+-\{t_i(h)\}$ 连续可微. 由于 $x(t)$ 的最大容纳量为1,本文假设 $h<1$,同时假定 p 与 h 为给定的值,而将 q 作为控制参数. 详细的研究表明,系统(2)较之系统(1)有更为丰富的动力学性质,特别需要指出的是,无论原连续系统是否出现物种的灭绝,控制系统都会出现渐近稳定的正周期解,这说明此时两物种是共存的,因此控制系统的引入对于保护物种的多样性具有一定的生物学意义.

2 动力学性质

2.1 半平凡周期解的存在与稳定性

令 $y(t)=0,t\in(0,+\infty)$ 则由(2)得

$$\begin{cases}\dot{x}=rx(1-x), x\neq h\\ \Delta x=-px, x=h\end{cases}\tag{3}$$

取 $x_0=(1-p)h$,得方程 $\dot{x}=rx(1-x)$ 的特解

$$x(t)=\frac{A\exp(rt)}{1+A\exp(rt)},A=\frac{(1-p)h}{1-(1-p)h}$$

设 $T=\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{1-(1-p)h}{(1-p)(1-h)}$,则 $x(T)=h,x(T^+)=x_0$,这说明系统(2)存在如下半平凡周期解:

$$\begin{cases}\xi(t)=\dfrac{A\exp(r(t-(k-1)T))}{1+A\exp(r(t-(k-1)T))}\\ \eta(t)=0,(k-1)T<t\leq kT,k\in N\end{cases}\tag{4}$$

下面利用文[9]中相似的 Poincaré 准则来判断半平凡周期解(4)的稳定性.

引理 1[9] (Analogue of Poincaré criterion) 设系统

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y),\dot{y}=Q(x,y),\phi(x,y)\neq h\\ \Delta x=\alpha(x,y),\Delta y=\beta(x,y),\phi(x,y)=0\end{cases}\tag{5}$$

则(5)的一个 T 周期解 $x=\xi(t),y=\eta(t)$ 是轨道渐近稳定和具有渐近相图性质的,如果乘子 μ_2 满足条件 $|\mu_2|<1$. 其中

$$\mu_2=\prod_{k=1}^{n}\Delta_k\exp\Big(\int_0^T\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))+\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\Big)dt\Big)$$

$$\Delta_k=\frac{P_+\Big(\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big)+Q_+\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big)}{P\frac{\partial\phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\phi}{\partial y}}$$

这里 P, Q, $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\beta}{\partial x}$, $\frac{\partial\beta}{\partial y}$, $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, 及 $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ 为函数在点 $(\xi(\tau_k),\eta(\tau_k))$ 处的值,且 $P_+=P(\xi(\tau_k^+),\eta(\tau_k^+))$, $Q_+=Q(\xi(\tau_k^+),\eta(\tau_k^+))$.

将此引理应用于系统(2),有:

$$P(x,y)=rx(1-x)-axy,Q(x,y)=\frac{bxy}{1+x}-cy,$$

$$\alpha(x,y)=-px,\beta(x,y)=qy$$

$$\phi(x,y)=x-h,(\xi(T),\eta(T))=(h,0),$$

$$(\xi(T^+),\eta(T^+))=((1-p)h,0)$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial x}=r(1-2x)-ay,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{bx}{1+x}-c,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-p,\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,\frac{\partial\beta}{\partial x}=0,\frac{\partial\beta}{\partial y}=q,\frac{\partial\phi}{\partial x}=1,\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

于是

$$\Delta_1=\frac{P_+\Big(\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big)+Q_+\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big)}{P\frac{\partial\phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\phi}{\partial y}}=$$

$$\frac{P(\xi(T^+),\eta(T^+))(1+q)}{P(\xi(T),\eta(T))}=$$

$$\frac{(1-p)(1-(1-p)h)}{1-h}(1+q)$$

另一方面

$$\exp\Big(\int_0^T\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))+\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\Big)dt\Big)=$$

$$\exp\Big(\int_0^T\Big(r(1-2\xi(t))+\frac{b\xi(t)}{1+\xi(t)}-c\Big)dt\Big)=$$

$$\frac{1-h}{(1-p)(1-(1-p)h)}\Big(\frac{(1+h)(1-(1-p)h)}{(1-h)(1+(1-p)h)}\Big)^{\frac{b}{2r}}\times$$

$$\Big(\frac{(1-h)(1-p)}{1-(1-p)h}\Big)^{\frac{c}{r}}$$

因此,下面可以计算 Floquet 乘子 μ 的值:

$$\mu_2=\Delta_2\exp\Big(\int_0^T\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t),\eta(t))+$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t),\eta(t))\Big)dt\Big)=(1+$$

$$q)\left(\frac{(1+h)(1-(1-p)h)}{(1-h)(1+(1-p)h)}\right)^{\frac{b}{2r}}\left(\frac{(1-h)(1-p)}{1-(1-p)h}\right)^{\frac{c}{r}}$$

所以 $|\mu_2|<1$ 当且仅当

$$0<q<\left(\frac{(1+h)(1-(1-p)h)}{(1-h)(1+(1-p)h)}\right)^{-\frac{b}{2r}}\left(\frac{(1-h)(1-p)}{1-(1-p)h}\right)^{-\frac{c}{r}}-1 \quad (6)$$

综合上面的讨论,得出如下结论:

定理 1　设 $q>0$, $h<1$,且条件(6)成立,则系统(2)存在一个稳定的半平凡周期解.

注记 设

$$q^*=\left(\frac{(1+h)(1-(1-p)h)}{(1-h)(1+(1-p)h)}\right)^{-\frac{b}{2r}}\left(\frac{(1-h)(1-p)}{1-(1-p)h}\right)^{-\frac{c}{r}}-1 \quad (7)$$

则当 $q=q^*$ 时 $|\mu_2|=1$,故此时系统可能会出现分岔现象.

2.2　跨临界分岔

本段落,讨论半平凡周期解(4)的分岔,即当(4)失稳后是否产生正的周期解. 为此,需要建立关于这个周期解的 Poincaré 映射. 如图 1 所示,线段 AB 是半平凡周期解,考虑三角形区域 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\ 0<y<\frac{r}{a}(1-x)\}$ 内的轨线,选取 $S_0=\{(x,y)\,|\,x=(1-p)h,\ y\geq0\}$,作为 Poincaré 截面,$u$ 为充分小正数,则由解对初值的依赖关系,以 $A_0((1-h)h,u)\in S_0$ 为初始点的轨线必交 $S_1=\{(x,y)\,|\,x=h,\ y\geq0\}$ 于 $B_0(h,y_1)$,这里 y_1 由 u 确定,记为 $y_1=g(u)$. 由于脉冲作用,轨线从点 B_0 跳到点 $A_1((1-p)h,(1+q)y_1)\in S_0$. 于是得到如下 Poincaré 映射.

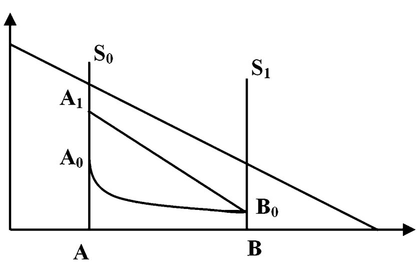

图 1　Poincaré 映射示意图

Fig. 1　The sketch of the Poincaré map

$$u\longmapsto(1+q)g(u)\quad F(u,q) \qquad (8)$$

显然(8)的不动点对应于系统(2)的周期解,反之亦然. 特别的,由解的唯一性得 $g(0)=0$,因此半平凡周期解对应于(8)的零不动点. 为考察该不动点的分岔行为,需要引入如下引理.

引理 2 [10] 设 $F:R\times R\to R$ 是一个单参数族映射,且满足如下条件:

(i) $F(0,\mu)=0$;　(ii) $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=1$;

(iii) $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial\mu}(0,0)>0$; (iv) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)<0$.

则映射 F 在 $\mu=0$ 处发生跨临界分岔,且当参数 μ 由负变正时,F 的零不动点由稳定变为不稳定,同时出现一个稳定的正的不动点.

为了应用引理 2,需要计算 $g'(0)$, $g''(0)$ 的值.

由前面的讨论可以知道,当 u 充分小时,由方向场的性质,轨线 A_0B_0 必包含在 Ω 的内部,另一方面若仅考虑轨线 AB 及 Ω 内的轨线,则 $\dot{x}>0$ 成立,此时可将系统(1)化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad (9)$$

记系统(9)的轨线为 $(x,y(x;x_0,y_0))$,于是,取 $x_0=(1-p)h$, $y_0=u$,得二元函数

$$y(x,u)\quad y(x;(1-p)h,u)$$

于是我们可以进行如下计算

$$\frac{\partial y(x,u)}{\partial u}=\exp\left(\int_{(1-p)h}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q(s,y(s,u))}{P(s,y(s,u))}\right)\mathrm{d}s\right)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,u)}{\partial u^2}=\frac{\partial y(x,u)}{\partial u}\times\left(\int_{(1-p)h}^{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{Q(s,y(s,u))}{P(s,y(s,u))}\right)\frac{\partial y(s,u)}{\partial u}\mathrm{d}s\right)$$

显然 $\frac{\partial y(x,u)}{\partial u}>0$. 并且

$$g'(0)=\frac{\partial y(h,0)}{\partial u}=\exp\left(\int_{(1-p)h}^{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q(s,y(s,0))}{P(s,y(s,0))}\right)\mathrm{d}s\right)=\exp\left(\int_{(1-p)h}^{h}\frac{1}{rs(1-s)}\left(\frac{bs}{1+s}-c\right)\mathrm{d}s\right)=\left(\frac{(1+h)(1-(1-p)h)}{(1-h)(1+(1-p)h)}\right)^{\frac{b}{2r}}\left(\frac{(1-h)(1-p)}{1-(1-p)h}\right)^{\frac{c}{r}} \quad (10)$$

$$g''(0)=g'(0)\int_{(1-p)h}^{h}m(s)\frac{\partial y(s,0)}{\partial u}\mathrm{d}s$$

$$m(s)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{Q(s,y(s,0))}{P(s,y(s,0))}\right)=2\left(\frac{bs}{1+s}-c\right)\times\frac{as}{(rs(1-s))^2}\qquad s\in[(1-p)h,h]$$

因此,若 $b>2c$,则当 $h\leq x^*=\frac{c}{b-c}$ 时,必有 $m(s)<0$,另一方面,若 $b\leq2c$,由于 $s\leq h<1$,得 $\frac{bs}{1+s}-c=\frac{(b-c)s-c}{1+s}\leq\frac{c(s-1)}{1+s}<0$,此时也有 $m(s)<0$. 考虑到 $g'(0)>0$ 及 $\frac{\partial y(s,0)}{\partial u}>0$ 这两个不等式立即导出如下结论

$$g''(0)<0 \tag{11}$$

定理2 设q^*的值由(7)式确定,则下列两个条件之一成立时,系统(2)在参数$q=q^*$处发生跨临界分岔,当q从q^*左侧变到右侧时,系统将出现稳定的正周期解.

$$(\mathrm{H1})\, b\le 2c,\quad (\mathrm{H2})\, b>2c, h\le x^*=\frac{c}{b-c}.$$

3 数值模拟

为了说明脉冲动力系统(2)的动力学性质,考虑下列系统

$$\begin{cases}\dot{x}=0.8x(1-x)-0.6xy, \dot{y}=\dfrac{xy}{1+x}-0.4y, x\neq 0.6\\ \Delta x=-0.4x, \Delta y=qy, x=0.6\end{cases} \tag{12}$$

这里$a=0.6$, $b=1$, $c=0.4$, $r=0.8$, $p=0.4$, $h=0.6$. 代入(7)式得

$$q^*=0.099756$$

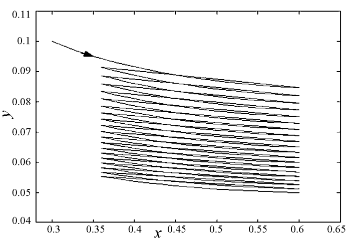

图2 系统(12)在$q=0.08$时的相图

Fig. 2 The phase portrait of system (12) with $q=0.08$

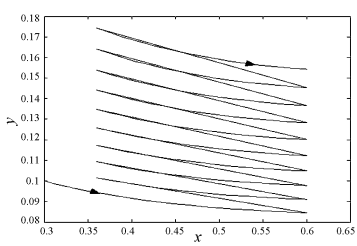

图3 系统(12)在$q=0.2$时的相图

Fig. 3 The phase portrait of system (12) with $q=0.2$

根据定理2的结论,系统(12)在参数$q=q^*$处发生跨临界分岔,当q从q^*左侧变到右侧时,系统将出现稳定的正周期解,而此时半平凡周期解不稳定. 图2与图3表示参数q在q^*两侧变化时系统的拓扑性质的改变情况. 如图2所示,当$q=0.08<q^*$时,系统(12)的过初值(0.3,0.1)的解随着时间t的增加而趋于半平凡周期解,这意味着系统的半平凡周期解在$q=0.08$时是稳定的,而图3表明$q=0.2>q^*$时系统的半平凡周期解不稳定,此时系统出现稳定的正周期-1解.

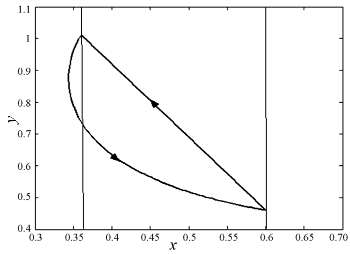

图4 系统(12)在$q=1.24$时的正周期-1解

Fig. 4 The positive period-1 solution of system (12) with $q=1.24$

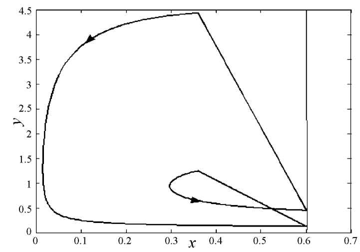

图5 系统(12)在$q=8.9$时的正周期-2解

Fig. 5 The positive period-2 solution of system (12) with $q=8.9$

数值模拟表明,当$q^*<q<7.45$时系统存在渐近稳定的正周期-1解,而当$q=7.45$时,系统发生倍周期分岔,图4表示$q=1.24$时系统的过初值(0.3,0.1)的解随着时间t的增加而趋于正周期-1解,这意味着系统的正周期-1解在$q=1.24$时是渐近稳定的. 取$q=8.9>7.45$,如图5所示,此时系统出现渐近稳定的正周期-2解.

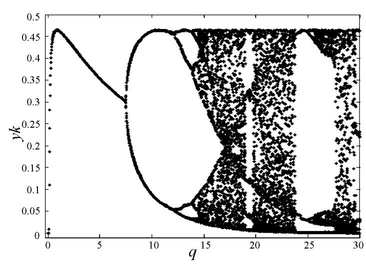

图6 当$q\in[0,30]$时,系统(12)周期解分岔

Fig. 6 The bifurcation diagram of positive periodic solutions of system (12) for $q\in[0,30]$

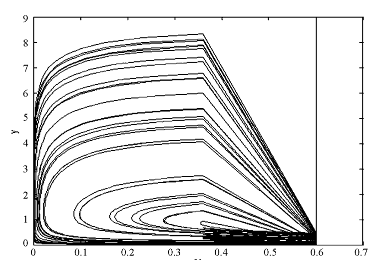

图7 当$q=18$时,系统(12)的混沌解

Fig. 7 The chaotic solution of system (12) for $q=18$

以q为参数,系统(12)的周期解的分岔图如图

6 所示. 当时系统出现跨临界分岔,半平凡周期解分岔出正周期-1 解,当时,出现倍周期分岔,正周期-1 解分岔出正周期-2 解. 系统还存在混沌解,它是通过倍周期分岔得到的,图 7 给出了一个这样的解.

4　结束语

对于脉冲自治系统的稳定性,现有的文献只能解决当周期解已经求出时其轨道稳定性,而对于大量的无法求出周期解的系统尚无有效的方法,目前已有的结论大都是数值结果. 本文讨论了一类不能求出显式解的脉冲自治方程,利用降维处理的方法从理论上得到了系统正周期解存在与稳定的条件. 本文的结论说明状态依赖的脉冲系统具有丰富的动力学行为,而本文所建立和采用的数学方法可以用来研究类似的脉冲系统的周期轨道的存在性及其稳定性. 得到的生物结论说明了我们了我们可以通过脉冲控制某个变量使之不超过阈值,以保证另一个物种不会灭绝,保护了物种的多样性,同时为估计更加精确的阈值提供了一定的理论依据.

参　考　文　献

1　Laksmikantham V, Bainov DD and Simeonov PS. Theory of Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989

2　Bainov DD and Simeonov PS. Impulsive differential equations: Periodic Solutions and Applications. New York: Longman Scientific and Technical, 1993

3　Lakmeche A, Arino O. Bifurcation of nontrivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive System*, 2000, 7: 265 ~ 287

4　Tang SY and Chen LS. Density – dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences. *Journal of Mathematical Biology*, 2002, 44: 185 ~ 99

5　Guckenheimer J and Holmes P. Nonlinear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer – Verlag, 1983

6　Kuznetsov YA. Elements of Applied bifurcation theory. New York: Springer – Verlag, 1995

7　陆启韶. 分岔与奇异性. 上海:上海科技教育出版社, 1995 (Lu Qishao. Bifurcation and singularity. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press, 1995 (in Chinese))

8　Jiang GR, Lu QS and Qian LN. Complex dynamics of a Holling type II prey – predator system with state feedback control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31: 448 ~ 461

9　Simeonov PS and Bainov DD. Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect. *International Journal of Systems Science*, 1988, 19: 2562 ~ 2585

10　Rasband SN. Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems. New York: John Wiley and Sons, 1990

DYNAMICS OF A CLASS OF AUTONOMOUS IMPULSIVE EQUATIONS*

Qian Linning　Lu Qishao

(*Depatment of Mathematics, School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing*　100083, *China*)

Abstract　The dynamics of a class of autonomous impulsive differential equation was studied, and the sufficient conditions for the existence and stability of a semi – trivial periodic solution were obtained. The problem of periodic solution was transformed into a fixed – point problem by constructing the Poncaré map. Theoretical analysis and numerical results show that a steady positive period – 1 solution bifurcates from the semi – trivial periodic solution through a transcritical bifurcation. And the numerical results also show that, when the control parameter varies, a positive period – 2 solution bifurcates from the positive periodic solution through a flip bifurcation, and the chaotic solution is generated via a cascade of flip bifurcations.

Key words　impulsive dynamic system,　autonomous impulsive equation,　transcritical bifurcation,　periodic solution

Received 3 June 2007, revised 25 August 2007.

* This project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572011)