

飞机起降过程中机场道面的动力响应

钟阳 曹长勇

(大连理工大学土木水利学院,大连 116024)

摘要 利用改进的 Kantorovich 法分析了飞机起降过程中机场道面板的动力响应问题. 在分析中把机场道面板简化成 Winkler 地基上四边自由的矩形弹性薄板,通过引入两端自由的梁函数,采用改进的 Kantorovich 法将机场道面板的动力微分方程化简成为常微分方程,然后利用 Duhamel 积分求得问题的精确解. 文中还通过具体算例,分析了移动载荷的速度、加速度、道面板厚度和地基基床系数对板的动力响应的影响. 计算结果表明:移动载荷的速度和地基的基床系数对道面板的动力响应有较大影响;而飞机起降时的加速度、减速度及道面板厚度对机场道面动力响应的影响不大.

关键词 机场道面板, 动力响应, 加速度, 改进的 Kantorovich 法

引言

弹性地基上薄板的动力响应一直是受力学以及土木界所关注的问题之一. 国内外许多学者对此进行过大量的研究工作^[1-5]. 近年来,研究者们已逐渐认识到机场道面动力分析的重要性,并采用弹性地基上的薄板作为分析模型(包括动力或静力模型)来分析路面的挠度、应力和应变^[6-8]. 这当中大多数采用弹性地基或粘弹性地基上的无限大板模型来代表刚性路面^[9-10],用移动荷载来表示飞机或车辆荷载^[11]. 但是,分析和实验的研究表明,弹性地基上四边自由薄板模型更符合路面分析实际情况^{[8][12]}. 然而由于求得严格满足四边自由边界条件的解析解十分困难,至今对该种边界条件的板的精确解答研究不多. 目前绝大多数是采用变分法或数值法(有限元法)来求得该问题的近似解答^{[6]-[13]}.

本文采用 Winkler 地基上四边自由的矩形薄板模型来研究移动荷载作用下机场道面板的动力响应问题. 引入两端自由的梁函数,利用改进的 Kantorovich 法求解该问题. 通过数值计算研究了移动载荷的速度、加速度、道面板厚度和地基基床系数对板的动力响应的影响.

1 基本控制方程

如图 1. 所示,假设飞机荷载 P 沿道面板上 x

方向运动, $x-y$ 坐标系固定在矩形薄板的中性面上, x 轴方向为飞机行进方向. 飞机的初速度为 v , 加速度为 a ,板上任一点的动挠度为 $w(x, y, t)$,则矩形薄板的形变势能 U 、动能 T 及移动集中荷载做功 W 分别为:

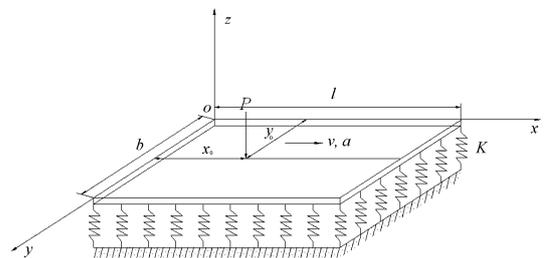


图1 移动荷载作用下 Winkler 地基上四边自由矩形薄板

Fig.1 Rectangular plate with four edges free on Winkler foundation under moving loads

$$U = \frac{D}{2} \iint_{00}^{lb} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint_{00}^{lb} K w^2 dx dy \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{00}^{lb} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

$$W = \iint_{00}^{lb} P \delta \left[x - \left(vt + \frac{1}{2} at^2 \right) \right] \delta(y - y_0) w dx dy \quad (3)$$

其中: $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ 为板的抗弯刚度; E, μ, h 分别为薄板的弹性模量、泊松比和厚度; K 为

地基的基床系数; ρ, l, b 分别为矩形薄板的密度、长和宽; $x_0 = vt + 1/2at^2, y_0$ 为荷载所处位置的坐标, $\delta(\cdot)$ 是 Dirac - delta 函数.

根据弹性力学中的哈密尔顿原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(U - T - W) dt = 0 \quad (4)$$

将式(1)、(2)、(3)代入式(4), 化简整理可得

$$\begin{aligned} & \iint_{\omega} (\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{Kw}{D} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{P}{D} \delta[x - (vt + \frac{1}{2}at^2)]) \times \\ & \delta(y - y_0) \delta w dx dy + \int_0^b [M_x \delta(\frac{\partial w}{\partial x})]_0^l dy + \\ & \int_0^l [M_y \delta(\frac{\partial w}{\partial y})]_0^b dx - \int_0^b [V_x \delta w]_0^l dy - \int_0^l [V_y \delta w]_0^b dx + \\ & 2(1 - \mu) [[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w]_0^b]_0^l = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为拉普拉斯算子, 薄板的弯矩 M_x, M_y 和剪力 V_x, V_y 分别为

$$M_x = \partial^2 w / \partial x^2 + \mu (\partial^2 w / \partial y^2) \quad (6)$$

$$V_x = \partial^3 w / \partial x^3 + (2 - \mu) (\partial^3 w / \partial x \partial y^2) \quad (7)$$

$$M_y = \partial^2 w / \partial y^2 + \mu (\partial^2 w / \partial x^2) \quad (8)$$

$$V_y = \partial^3 w / \partial y^3 + (2 - \mu) (\partial^3 w / \partial y \partial x^2) \quad (9)$$

2 振动方程求解

薄板上点 (x, y) 处在时刻 t 的动挠度 $w(x, y, t)$ 用下式表示

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [u(x, t) Y_n(y)] \quad (10)$$

式中 $Y_n(y)$ 为自由 - 自由梁函数, 满足板 y 方向两端自由的边界条件:

$$Y_1(y) = 1, Y_2(y) = \sqrt{3}(1 - 2y/b) \quad (11-a)$$

$$Y_n(y) = (\text{cha}_n y + \text{cosa}_n y) - C_n (\text{sha}_n y + \text{sina}_n y) \quad (n > 2) \quad (11-b)$$

$$C_n = (\text{cha}_n b - \text{cosa}_n b) / (\text{sha}_n b - \text{sina}_n b), \\ a_n b = (2n - 3) \pi / 2 \quad (11-c)$$

所以

$$\delta w_n(x, y, t) = Y_n(y) \delta u(x, t) \quad (12)$$

把式(11)和式(12)代入式(5)后, 对 y 在 $[0, b]$ 上积分并整理可得

$$(\rho h / D) \ddot{u} u'' - 2B_n u'' + C_n u = \\ P Y_n(y_0) / (D A_{1n}) \delta[x - (vt + 1/2at^2)] \quad (13)$$

式中

$$B_n = [A_{2n} + (\mu - 1) a_{1n}] / A_{1n},$$

$$C_n = [A_{3n} - a_{3n} + a_{2n}] / A_{1n} + K / D,$$

$$A_{1n} = \int_0^b Y_n^2 dy, A_{2n} = \int_0^b Y_n'' Y_n dy, A_{3n} = \int_0^b Y_n''' Y_n dy,$$

$$a_{1n} = [Y_n Y_n']_0^b, a_{2n} = [Y_n' Y_n']_0^b, a_{3n} = [Y_n'' Y_n]_0^b.$$

再令

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) \psi_{mn}(t) \quad (14)$$

其中

$$X_1(x) = 1, X_2(x) = \sqrt{3}(1 - 2x/l) \quad (15-a)$$

$$X_m(x) = (\text{cha}_m x + \text{cosa}_m x) - C_m (\text{sha}_m x + \text{sina}_m x) \quad (m > 2) \quad (15-b)$$

$$C_m = (\text{cha}_m l - \text{cosa}_m l) / (\text{sha}_m l - \text{sina}_m l), \\ a_m l = (2m - 3) \pi / 2 \quad (15-c)$$

将式(14)、(15)代入式(13), 两边同乘以 $X_j(x)$ 再对 x 在 $[0, a]$ 上积分, 考虑正交性可得

$$\ddot{\psi}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 \psi_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \quad (16)$$

式中

$$M_m = \rho h / D \int_0^l X_m^2(x) dx \quad (17)$$

$$k_{mn} = \int_0^l X_m'' X_n dx - 2B_n \int_0^l X_m' X_n dx + C_n \int_0^l X_m X_n dx \quad (18)$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{k_{mn} / M_m} \quad (19)$$

$$Q_{mn}(t) = \frac{P Y_n(y_0)}{M_m D A_{1n}} X_m(vt + \frac{1}{2}at^2) \quad (20)$$

由结构动力响应的 Duhamel 积分得

$$\psi_{mn}(t) = \frac{P Y_n(y_0)}{\omega_{mn} M_m D A_{1n}} \int_0^t \sin[\omega_{mn}(t - \tau)] \times \\ X_m(v\tau + \frac{1}{2}a\tau^2) d\tau \quad (21)$$

把式(11)、(15)代入式(21)进行积分, 所得结果与式(14)一起代入式(10)可得

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1n=1}^{\infty} \sum_{m=1n=1}^{\infty} X_m(x) Y_n(y) \psi_{mn}(t) \quad (0 < t < a/c) \quad (22)$$

其中

$$\psi_{1n}(t) = \frac{P Y_n(y_0)}{\omega_{mn} M_m D A_{1n}} (1 - \cos \omega_{mn} t) \quad (m = 1)$$

$$\psi_{2n}(t) = \frac{\sqrt{3} P Y_n(y_0)}{\omega_{mn}^4 M_m D A_{1n}} [(2a + l \omega_{mn}^2) (1 - \cos(\omega_{mn} t)) + \\ 2\omega_{mn} \sin(\omega_{mn} t) - \omega_{mn}^2 (2vt + at^2)] \quad (m = 2)$$

$$\psi_{mn}(t) = \frac{P Y_n(y_0)}{8\omega_{mn} M_m D A_{1n} r_6} \{ i\sqrt{2} \exp[-0.5(z_1 + z_4 + i2\omega_{mn} t)] \times \\ [\exp(z_1) [\text{erfi}(r_1 + r_5 t) - \text{erfi}(r_1)] + \exp(z_2) [\text{erf}(r_2 + \\ r_5 t) - \text{erf}(r_2)] - \exp(z_3 + i\omega_{mn} t) [\text{erfi}(r_2 + r_5 t) -$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{erfi}(r_2)] - \exp(z_4 + i2\omega_{mn}t)[\operatorname{erf}(r_1 + r_5t) - \operatorname{erf}(r_1)] + \\
 & 4[\cos(\omega_{mn}t - r_7)[S(r_4 + r_6t) - S(r_4)] - \cos(\omega_{mn}t + r_8) \times \\
 & [S(r_3 + r_6t) - S(r_3)] + \sin(\omega_{mn}t - r_7)[C(r_4 + r_6t) - \\
 & C(r_4)] + \sin(\omega_{mn}t + r_8)[C(r_3 + r_6t) - C(r_3)] - \\
 & i\sqrt{2}C_m \exp[-0.5(z_1 + z_4 + i2\omega_j t)][\exp(z_1)[\operatorname{erfi}(r_1 + r_5t) - \\
 & \operatorname{erfi}(r_1)] - \exp(z_2)[\operatorname{erf}(r_2 + r_5t) - \operatorname{erf}(r_2)] - \exp(z_3 + \\
 & i2\omega_{mn}t)[\operatorname{erfi}(r_2 + r_5t) - \operatorname{erfi}(r_2)] + \exp(z_4 + i2\omega_{mn}t) \times \\
 & [\operatorname{erf}(r_1 + r_5t) - \operatorname{erf}(r_1)] - 4C_m[\sin(\omega_{mn}t - r_7)[S(r_4 + \\
 & r_6t) - S(r_4)] + \sin(\omega_{mn}t + r_8)[S(r_3 + r_6t) - S(r_3)] - \\
 & \cos(\omega_{mn}t - r_7)[C(r_4 + r_6t) - C(r_4)] + \cos(\omega_{mn}t + \\
 & r_8)[C(r_3 + r_6t) - C(r_3)]] \} \quad (m \geq 3)
 \end{aligned}$$

其中

$$i = \sqrt{-1}, S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \operatorname{erfi}(z) = \operatorname{erf}(iz)/i, z_1 = \omega_{mn}^2/aa_m,$$

$$z_2 = v^2 a_m/a, z_3 = \omega_{mn}(\omega_{mn} + i2va_m)/aa_m,$$

$$z_4 = v(va_m + i2\omega_{mn})/a, r_1 = (va_m + i\omega_{mn})/\sqrt{2aa_m},$$

$$r_2 = (va_m - i\omega_{mn})/\sqrt{2aa_m}, r_3 = (va_m + \omega_{mn})/\sqrt{\pi aa_m},$$

$$r_4 = (va_m - \omega_{mn})/\sqrt{\pi aa_m}, r_5 = \sqrt{aa_m}/2, r_6 = \sqrt{aa_m}/\pi,$$

$$r_7 = (va_m + \omega_{mn})/\sqrt{2aa_m}, r_8 = (va_m - \omega_{mn})/\sqrt{2aa_m}.$$

根据式(6-9)和(22)结合弹性力学理论^[14]可以方便地求出四边自由边界条件下机场道面板在移动飞机荷载作用下板底的动应力。

3 数值算例和分析

机场道面、地基和飞机荷载的参数^[8]分别取: $E = 34,300\text{MPa}, \mu = 0.167, K = 42\text{MN/m}^3, h = 24\text{cm}, \rho = 2300\text{kg/m}^3, P = 450.8\text{kN}, l = 6\text{m}, b = 4\text{m}$. 道面板初始静止,集中荷载 P 从板的左端 ($x = 0, y = y_0$) 开始沿直线向右运动. 下面将主要研究不计飞机爬升力的最不利情况下,道面板在移动荷载做匀加速和匀减速运动时的动力响应情况. 将以上参数代入式(22)进行计算,计算结果表明当取 $m \geq 3, n \geq 3$ 时,结算结果已经很接近真实值,一般取 $m = 4, n = 4$ 就能达到工程上的精度要求. 另外,对飞机荷载通过道面板过程中的每一时刻而言,荷载作用点处的动挠度是最大的,并且荷载位于薄板边缘时产生的最大动挠度明显大于荷载位于薄板中心时产生的最大动挠度. 这与文献[8]中的理论计算和实测情况一致.

为便于进行比较,此处引入无量纲时间 $s = t/t_i$ 作为位移时程曲线图的横坐标 (t_i 为荷载通过薄板所用时间). 图 2 表示加速度为 $a = 1\text{m/s}^2$, 速度分别为 $10\text{m/s}, 20\text{m/s}, 30\text{m/s}, 50\text{m/s}, 100\text{m/s}$ 和 200m/s 时道面板上 ($x = 0, y = 2$) 点处的动挠度时程曲线. 从图 2 分析得出:随飞机速度增大机场道面板的动挠度有所减小,且动挠度变化速率有明显减小,说明荷载速度对挠度变化速率有较大影响. 此外,当荷载 P 位于板边缘时,该点的最大动挠度达到最大值;随着荷载远离该点,其正挠度(向下的挠度)值变小负挠度(向上的挠度)值增大,在 P 到达对边时负值达到最大. 这主要是由于薄板四边缺少必要的边界约束而导致的. 另外,可以看出在飞机速度较小时,道面的振动会更快,较易造成道面疲劳.

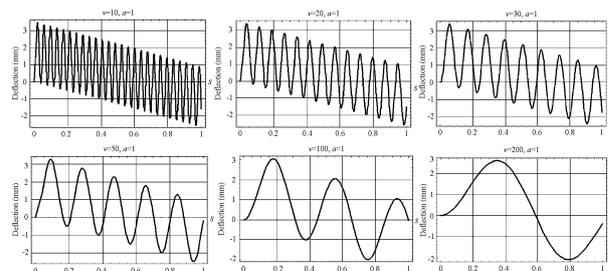


图 2 不同速度时道面板上 ($x = 0, y = 2$) 处的动挠度时程曲线

Fig. 2 Time history deflection responses for different velocity at point (0,2)

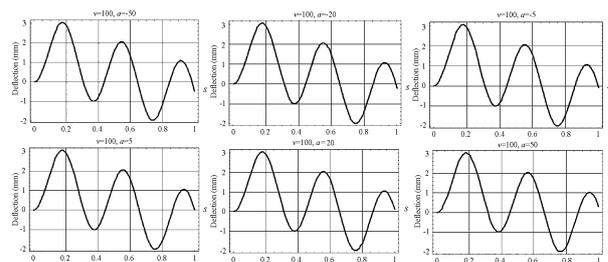


图 3 不同加速度、减速度时道面板上 ($x = 0, y = 2$) 处的动挠度时程曲线

Fig. 3 Time history deflection responses for different acceleration and deceleration at point (0,2)

图 3 描述的是速度 $v = 100\text{m/s}$ 加速度 a 分别为 $-50\text{m/s}^2, -20\text{m/s}^2, -5\text{m/s}^2, 5\text{m/s}^2, 20\text{m/s}^2, 50\text{m/s}^2$ 时边缘点 ($x = 0, y = 2$) 处的动挠度时程曲线. 对比图 3 中的各图可以看出:移动荷载的加速度对四边自由薄板的动挠度影响很小,因此在机场道面的动力位移分析中可以不考虑飞机加速度的影响.

图4表明薄板厚度变化对薄板上($x=0, y=2$)点处的动力响应的影响. 随着道面板厚度增大, 其振动频率减小, 振幅也有减小, 但刚性道面板厚度变化对道面板的动位移影响不大; 图5给出了($x=0, y=2$)点处地基基床系数变化对道面板动力位移响应的影响. 随着基床系数的增大, 最大动挠度明显减小, 但频率有所增加. 因此, 在修筑路基时保证路基压实质量就很重要, 密实度和刚度较高的路基能较大幅度降低动位移和动应力.

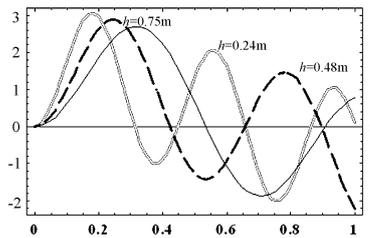


图4 不同板厚时道面板上(0,2)位置的动力响应曲线

Fig. 4 Time history deflection responses for different thickness at (1,2)

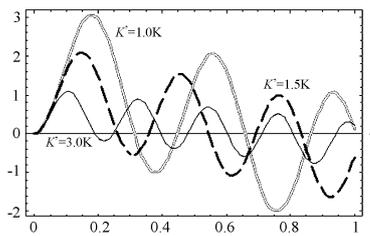


图5 不同基床系数K时道面板上(0,2)位置的动力响应曲线

Fig. 5 Time history deflection responses for different values of K at (1,2)

4 结论

本文利用改进的 Kantorovich 方法求得飞机起降过程中移动飞机荷载作用下 Winkler 地基上薄板的动力位移响应, 并通过具体算例分析了移动荷载的速度、加速度、道面板厚度和地基基床系数对机场道面动力位移响应的影响, 可以得到以下结论:

(1) 对于移动飞机荷载作用下 Winkler 地基上的四边自由矩形薄板, 最大动挠度出现在板的边角部位, 且板边角处的最大动挠度明显大于板中心点处的最大动挠度.

(2) 随飞机荷载移动速度增大, 混凝土路面最大动挠度略有减小, 并且动挠度变化速率明显变小. 在飞机跑过道面板的过程中, 飞机速度较小时道面的动挠度变化较飞机速度大时要快. 当移动

荷载的速度一定时, 荷载的加速度对板的动力位移响应的影响很小. 因此, 在进行机场道面动力分析时可以不考虑飞机起降时加速度的影响.

(3) 机场道面板的厚度和地基的刚度对移动荷载作用下四边自由矩形板的动挠度都有影响, 但地基刚度的影响更大. 因此, 在道路修筑时, 提高路基压实度并保证必要的刚度可以有效减小对路面的损坏.

参 考 文 献

- 1 D. J. Gorman. Free vibration analysis of rectangular plates. Elsevier North Holland, Inc., 1982
- 2 张福范. 弹性薄板. 第二版. 北京: 科学出版社, 1984 (Zhang Fufan. Elastic thin plate (Second Edition). Beijing: Science Press, 1984 (in Chinese))
- 3 曲庆璋, 梁兴复. 弹性地基上四边自由矩形板的非线性振动问题. 振动工程学报, 1996, 9(4): 411 ~ 414 (Qu Qingzhang, Liang Xingfu. Nonlinear problem of vibration for free edge rectangular plate on elastic foundation. *Journal of Vibration Engineering*, 1996, 9(4): 411 ~ 414 (in Chinese))
- 4 S. M. Kim, J. M. Roesset. Dynamic response of pavement systems to moving loads. Research Report 1422-2, Center for Transportation Research, University of Texas at Austin, 1996
- 5 S. M. Kim, and J. M. Roesset. Moving loads on a plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(9): 1010 ~ 1017
- 6 郑小平, 王尚文. 机场道面动态响应分析. 航空学报, 1990, 11(3): 146 ~ 155 (Zheng Xiaoping, Wang Shangwen. Dynamic analysis of airport pavement. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1990, 11(3): 146 ~ 155 (in Chinese))
- 7 S. M. Kim, and B. F. McCullough. Dynamic response of plate on viscous Winkler foundation to moving loads of varying amplitude. *Engineering structure*, 2003, (25) 1179 ~ 1188
- 8 L. Sun. Analytical dynamic displacement response of rigid pavements to moving concentrated and line loads. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43: 4370 ~ 4383
- 9 K. H. Lewis, and M. E. Harr. Analysis of concrete slabs on ground subjected to warping and moving loads. *Highway research record*, 1969, 291: 194 ~ 211

- 10 钟阳,张永山. 弹性地基上四边自由矩形薄板的解析解. 应用力学和数学, 2006, 27(6): 735 ~ 740 (Zhong Yang, Zhang Yongshan. Theoretic solution of rectangular thin plate on foundation with four edges free by symplectic geometry method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(6): 735 ~ 740 (in Chinese))
- 11 侯芸,孙四平,郭忠印. 移动荷载下刚性路面响应的参数影响分析. 同济大学学报(自然科学版), 2003, 31(1): 31 ~ 35 (Hou Yun, Sun Siping, Guo Zhongyin. Dynamic response sensitivity analysis of plate on elastic foundation subjected to moving point loads. *Journal of Tongji University*, 2003, 31(1): 31 ~ 35 (in Chinese))
- 12 徐芝纶. 弹性力学(下). 第三版. 北京:高等教育出版社, 1982 (Xu Zhilun. *Elasticity (Second Edition, Volume II)*. Beijing: Higher Education Press, 1982 (in Chinese))

DYNAMIC RESPONSE OF AIRPORT PAVEMENT WHEN AIRPLANE TAKES OFF OR LANDS

Zhong Yang Cao Changyong

(Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract The dynamic response of airport pavements subjected to a moving aircraft load was investigated. The airport pavement was modeled as a thin plate with all edges free resting on elastic foundation. The extended Kantorovich method was employed to reduce the governing partial differential equation of slab to ordinary differential equation through introducing free-free beam function, and the analytic solution of the problem was obtained by means of the Duhamel's integral equation. Numerical calculations were performed to illustrate the dynamic displacement response of pavements under moving loads. It is shown that the velocity of moving load, plate thickness and subgrade modulus have significant effect on the dynamic behaviors of pavements, while the acceleration and deceleration of moving loads have little effect on the dynamic response of pavements.

Key words airport pavement plate, dynamic response, acceleration, extended Kantorovich method