

# 圆型薄板的临界转速分析\*

毛海鱼 谢建华 徐慧东

(西南交通大学应用力学与工程系, 成都 610031)

**摘要** 对内边夹支外边自由的一类薄圆板, 利用卡门大挠度理论建立了其旋转时的横向振动方程. 通过化简并应用伽辽金法对该偏微分方程离散化, 计算出了一个刚度算子在不同的节径数  $n$  下的最低阶(节圆数  $m=0$ ) 特征值及简化方程相应模态的特征频率. 给出了临界转速的计算方法, 并讨论了其随板的内外半径比  $a/b$  及泊松比  $\mu$  的变化关系. 分析结果表明, 对于节径  $n=0$  和  $n=1$  均不存在临界转速, 对于其它节径  $n$ , 临界转速随着内外半径比的增大而增大随着泊松比的增大而减小. 这对于电脑硬盘、圆锯、涡轮机等高速旋转设备的设计有重要的参考意义.

**关键词** 圆板, 临界转速, 伽辽金法, 特征值, 行波

## 引言

旋转圆板在工程中有广泛的应用如电脑硬盘、木工圆锯、涡轮机等. 一般认为圆板在旋转时会存在不同程度的振动, 但不一定会失稳. 只有当圆板的工作转速等于或接近临界转速时, 一个很小的横向外力就会使圆板产生强烈振动, 使其失去稳定性, 从而给设备带来灾难性的后果. 为了避免这种情况的发生, 所以旋转圆板必须在低于临界转速的状态下工作. 为了加快计算机硬盘的存取速度以及提高圆锯的切削速度就需要尽量提高工作转速. 在设计中就必须使圆板的转速远离临界转速, 因此对临界转速的研究有很大的实际意义.

最早在 1921 年 Lamb 和 Southwell 用经典线性振动理论对旋转盘的振动进行了研究<sup>[1]</sup>; Ra - mah 用瑞利—李兹法对各种边界条件下的旋转圆环板自振频率做了计算<sup>[2]</sup>; Nowinski 用卡门板理论研究了旋转圆板的非线性动力学, 对其自振频率做了预测<sup>[3]</sup>; Lee 和 Ng 用拉格朗日法对线性和指数变化的变厚度板的临界转速做了计算<sup>[4]</sup>; Raman 和 Mote 用平均化方法研究了弹性旋转圆盘在临界转速附近的 1:1 内共振<sup>[5]</sup>; Chen 用多尺度法研究了在横向周期激励载荷作用下的旋转圆盘发生次共振时前行波和后行波的非线性耦合<sup>[6]</sup>.

本文在根据卡门板理论, 考虑了旋转对中面内

力的影响, 建立了圆板的横向振动微分方程, 并对方程做了进一步的化简得到旋转圆板自由振动方程. 根据边界条件, 设出横向位移模态, 结合伽辽金法对方程离散. 在离散过程中首先定义了一个刚度算子, 通过该算子的特征值问题得到了相关特征值和对应的模态. 将所得模态代入化简后的自由振动方程算出旋转圆板在各阶模态下的行波频率, 与板的旋转方向一致的行波称之为前行波, 反之则为后行波. 不同模态的后行波频率不会同时在某一转速下为零, 当转速增加时, 后行波频率首先为零的模态称为临界转速模态, 此时的转速就为临界转速. 计算了低阶(节径数  $n \leq 5$ ) 模态的临界转速和内外半径比  $a/b$  以及泊松比  $\mu$  关系. 为旋转薄板的设计提供了一定的依据.

## 1 运动方程

考虑以常角速度  $\Omega$  绕  $z$  轴旋转的等厚线弹性圆板的旋转, 如图 1 所示. 圆板在内半径  $r=a$  处夹支, 在外半径  $r=b$  处自由, 板的厚度为  $h$ . 惯性坐标系  $(r, \theta)$  建立在板中性 ( $z=0$ ) 的几何中心, 故板的上下表面分别为  $z = \pm h/2$ .

计入离心力的影响, 参照文献[3], 用 Von Karman 理论建立了旋转圆板的大挠度横向振动方程如下

$$\rho h (w_{,tt} + 2\Omega w_{,t\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta}) + D \nabla^4 w + c(w_{,t} +$$

2007-08-08 收到第 1 稿, 2007-09-06 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10472096)

$$\Omega w_{,\theta} - hL[w, \phi] + \rho h r \Omega^2 \left( \frac{r}{2} \nabla^2 w + w_{,r} \right) = 0$$

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{2} EL[w, w] + 2\rho(1-\mu)\Omega^2 \quad (1)$$

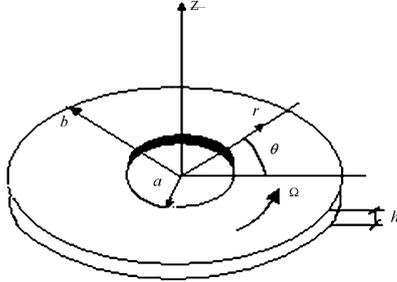


图 1 内边固定—外边自由的旋转圆板

Fig. 1 Spinning annular plate with clamped inner - boundary and free outer - boundary

$w$  和  $\phi$  为板的横向位移和应力函数, 式中算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

$$L[u, v] = u_{,rr} \left( \frac{v_{,r}}{r} + \frac{v_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{v_{,r\theta}}{r} - \frac{v_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{u_{,r\theta}}{r} - \frac{u_{,\theta}}{r^2} \right) + v_{,r} \left( \frac{u_{,r}}{r} + \frac{u_{,\theta\theta}}{r^2} \right) \quad (3)$$

其中  $\rho, c, E, \mu, D$  分别为板材料的密度、阻尼系数、弹性模量、泊松比和弯曲刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

对于内边夹支外边自由的圆板有以下边界条件

$$r = a \quad w = 0, w_{,r} = 0 \quad (4)$$

$$u^0 = 0, v^0 = 0 \quad (5)$$

$$r = b \quad w_{,rr} + \mu \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) = 0,$$

$$\left( \nabla^2 w \right)_{,r} + \frac{1-\mu}{r^2} \left( w_{,r} + \frac{1}{r} \right)_{,\theta\theta} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} - \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 = 0, \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{,r\theta} = 0 \quad (7)$$

式(1)联合(4) - (7) 构成完整的轴对称圆板的大挠度动力学方程。

不妨设  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ ,  $\phi_1$  由旋转产生,  $\phi_2$  与横向位移  $w$  有关, 由于旋转对称性  $\phi_1$  只是  $r$  的函数, 和  $\theta$  无关。则中面应力也分为两部分

$$\sigma_r^0 = \sigma_{1r}^0 + \sigma_{2r}^0 = \left( \frac{1}{r} \phi_{1,r} - \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 \right) + \frac{1}{r} \phi_{2,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{2,\theta\theta} \quad (8)$$

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_{1\theta}^0 + \sigma_{2\theta}^0 = \phi_{1,r} - \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 + \phi_{2,rr} \quad (9)$$

$$\tau_{r\theta}^0 = 0 + \tau_{2r\theta}^0 = \frac{1}{r^2} \phi_{2,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{2,r\theta} \quad (10)$$

即

$$\sigma_{1r}^0 = \left( \frac{1}{r} \phi_{1,r} - \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 \right), \sigma_{1\theta}^0 = \left( \frac{1}{r} \phi_{1,r} - \frac{1}{2} \rho r^2 \Omega^2 \right), \tau_{1r\theta}^0 = 0 \quad (11)$$

对于  $\sigma_{1r}^0$  和  $\sigma_{1\theta}^0$ , 参照文献[7], 代入边界条件(5)和(7)计算得出

$$\sigma_{1r}^0 = \frac{1+\mu(1-\mu)a^4 + (3+\mu)b^4}{8(1-\mu)a^2 + (1+\mu)b^2} \rho \Omega^2 + \frac{1-\mu[(3+\mu)b^2 - (1-\mu)a^2]b^2}{8(1-\mu)a^2 + (1+\mu)b^2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \rho \Omega^2 - \frac{3+\mu}{8} \rho r^2 \Omega^2 \quad (12)$$

$$\sigma_{1\theta}^0 = \frac{1+\mu(1-\mu)a^4 + (3+\mu)b^4}{8(1-\mu)a^2 + (1+\mu)b^2} \rho \Omega^2 - \frac{1-\mu[(3+\mu)b^2 - (1-\mu)a^2]b^2}{8(1-\mu)a^2 + (1+\mu)b^2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \rho \Omega^2 - \frac{1+3\mu}{8} \rho r^2 \Omega^2 \quad (13)$$

将(12) - (13)式代回(11)得到  $\phi_1$ , 并用  $\phi_1 + \phi_2$  代替(1)中的  $\phi$  化简得

$$\begin{cases} \rho h (w_{,rr} + 2\Omega w_{,r\theta} + \Omega^2 w_{,\theta\theta}) + D \nabla^4 w + c(w_{,t} + \Omega w_{,\theta}) - hL[w, \phi_2] - hF(w) = 0 \\ \nabla^4 \phi_2 = -\frac{1}{2} EL[w, w] \end{cases} \quad (14)$$

式(14)中算子

$$F = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{1r}^0 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \sigma_{1\theta}^0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (15)$$

引入下面的无量纲参数

$$w' = \frac{b}{h^2} w, t' = \frac{t}{b^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}, \omega' = \Omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, r' = \frac{r}{b}, \phi' = \frac{h}{D} \phi, c' = \frac{b^4}{24(1-\mu^2) \sqrt{\rho h^5 D}} c, \sigma' = \frac{h b^2}{D} \sigma \quad (16)$$

则将(16)代入控制方程(14), 去掉上标“'”后

$$\begin{cases} w_{,rr} + 2\omega w_{,r\theta} + \omega^2 w_{,\theta\theta} + \nabla^4 w + c \varepsilon (w_{,t} + \omega w_{,\theta}) - L[w, \phi_2] - F(w) = 0 \\ \nabla^4 \phi_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon L[w, w] \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\varepsilon = 12(1-\mu^2) \frac{h^2}{b^2} \quad (18)$$

若考虑特殊情况  $\varepsilon = 0$  (17) 式第二式等于零, 第一式则变成

$$w_{,u} + 2\omega w_{,\theta} + \omega^2 w_{,\theta\theta} + \nabla^4 w - F(w) = 0 \quad (19)$$

上式即为旋转圆板的线性自由振动方程.

## 2 伽辽金法

为了计算上的方便, 在运用伽辽金法求解 (19) 所表示方程的临界转速时, 分两步进行. 首先定义了一个自伴随的刚度算子, 通过该算子的特征值问题得出板横向振动的模态; 接着, 将该模态解代入完整的动力学方程 (19) 计算该模态对应的特征频率.

对于方程 (19) 定义刚度算子

$$L_0(w) = \nabla^4 w - F(w) \quad (20)$$

则特征方程为

$$L_0(w) = \lambda^2 w \quad (21)$$

对于给定的节径数  $n$ , 假设式 (21) 特征解为

$$w_n(r, \theta) = e^{in\theta} R_n(r) = e^{in\theta} \sum_{k=1}^M c_k \varphi_{kn}(r) \quad (22)$$

其中  $c_k$  为未知常数.  $\varphi_{kn}(r)$  为节径为  $n$  时的一系列比较函数.

将 (22) 代入 (21) 产生残差

$$\text{Res1} = L_0(w_n) - \lambda_n^2 w_n \quad (23)$$

运用伽辽金法有以下方程

$$(\varphi_{kn} e^{in\theta}, \text{Res1}) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, M \quad (24)$$

式中

$$(X, Y) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \bar{X} Y r dr d\theta \quad (25)$$

对于 (24) 可以写成以下形式

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1M} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \\ \delta_{M1} & \delta_{M2} & \cdots & \delta_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_M \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

其中

$$\delta_{ij} = \langle \varphi_{in}, L_0(\varphi_{jn}) - \lambda_n^2 \varphi_{jn} \rangle \quad (27)$$

齐次线性方程组有非零解的充要条件就是系数行列式为零, 从而解出  $M$  个  $\lambda_n$ , 将其分别代入方程 (26) 求得  $C$ , 并结合 (22) 便得到了各自对应的模态. 这些不同的  $\lambda_{in}$  对应于不同的节圆数, 其中最小的对应零节圆, 记为  $\lambda_{0n}$ . 在这里我们只关心最低阶即  $\lambda_{0n}$  和与它对应的模态  $w_{0n}$ , 这些特征值和模态都是板的旋转角速度  $\omega$  的函数.

设方程 (19) 的谐波解为<sup>[8]</sup>

$$w_n(r, \theta, t) = Z R_n(r) e^{in\theta} e^{\beta_n t} + \bar{Z} R_n(r) e^{-in\theta} e^{\bar{\beta}_n t} \quad (28)$$

其中  $Z$  为复常数,  $\bar{Z}$  为其共轭. 则当节圆数  $m=0$  时

$$w_{0n}(r, \theta, t) = Z R_{0n}(r) e^{in\theta} e^{\beta_n t} + \bar{Z} R_{0n}(r) e^{-in\theta} e^{\bar{\beta}_n t} \quad (29)$$

将 (29) 代入 (19) 产生残差

$$\text{Res2} = Z [(\beta_n^2 + 2in\omega\beta_n - n^2\omega^2) R_{0n}(r) + L_0(R_{0n}(r))] e^{in\theta+\beta_n t} + \bar{Z} [(\bar{\beta}_n^2 - 2in\omega\bar{\beta}_n - n^2\omega^2) R_{0n}(r) + L_0(R_{0n}(r))] e^{-in\theta+\bar{\beta}_n t} \quad (30)$$

再次运用伽辽金法

$$\langle R_{0n}(r) e^{in\theta}, \text{Res2} \rangle = 0 \quad (31)$$

即

$$2\pi Z e^{\beta_n t} (\beta_n^2 + 2in\omega\beta_n - n^2\omega^2 + \lambda_{0n}^2) \int_a^b r R_{0n}^2(r) dr = 0 \quad (32)$$

所以得到

$$\beta_{n\pm} = -(n\omega \pm \lambda_{0n}) i \quad (33)$$

当旋转圆板振动时, 从静坐标系和动坐标系中的看到结果有所不同. 在静坐标系看到的是向板前、后两个方向旋转的行波, 其中和旋转方向相同的为前行波, 与旋转方向相反的则为后行波. 两个行波振动的固有频率不相等, 前行波的频率大于后行波. 从动坐标系看到的则是相对旋转板不动的振动, 频率只有一个<sup>[9]</sup>.

$\beta_{n\pm}$  分别为前行波和后行波频率, 随着  $\omega$  的变化而变化, 当后行波频率  $n\omega - \lambda_{0n}$  为零时  $\omega$  称为相应模态的临界转速. 在此转速下, 一个很小的横向力都可以使板产生很大的变形, 故这种模态应尽量避免.

在上面的过程中,  $\beta_{n\pm}$  是基于方程 (19) 来计算的, 而该方程是在固定坐标系下建立的, 不随板的转动而动, 称为静频; 如果把坐标系建立在板上, 即随板转动, 这样就转化成 (20) 所对应的特征值问题了, 因而所得出的特征值  $\lambda_{0n}$  即为动频. 则动频和静频的关系为 (33) 所示. 这和文献 [9] 中的结果是一致的.

## 3 算例

对于每个给定的波节数  $n$  ( $n \leq 5$ ), 取

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^7 x_j (r-a)^{1+j} \quad (34)$$

将 (34) 代入边界条件 (6) (边界条件 (4) 自然满

足)求解关于  $X$  的方程,可以得到 5 个线性无关的比较函数  $\varphi_{1n}$ 、 $\varphi_{2n}$ 、 $\varphi_{3n}$ 、 $\varphi_{4n}$  和  $\varphi_{5n}$ , 则

$$w_n(r, \theta) = e^{in\theta} \sum_{k=1}^5 c_k \varphi_{kn}(r) \quad (35)$$

实践证明取 5 阶有足够的精度.

重复(22) - (33)的过程计算出各阶特征值(即动频  $\lambda_{0n}$ )和前后行波频率  $\lambda_{0n} + n\omega$  和  $\lambda_{0n} - n\omega$  (即(33)中的  $\beta_{n+}$  和  $\beta_{n-}$ ). 前后行波频率随角速度  $\omega$  的关系见图 2 和图 3, 其中前行波用  $F$  表示, 后行波用  $B$  表示. (0,3) $B$  就表示波节数为 3 的最低阶后行波频率, 依次类推. 由于临界转速是后行波频率为零时的角速度, 从图上得知后行波频率与横坐标轴的交点即为临界转速.

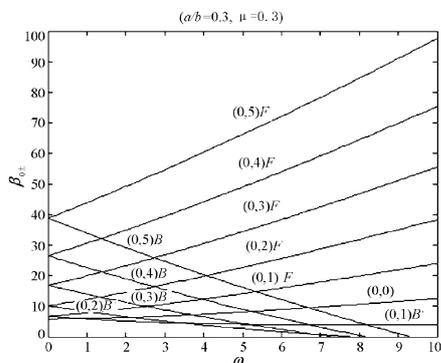


图 2 静频随角速度的变化

Fig. 2 Static frequency versus angular speed

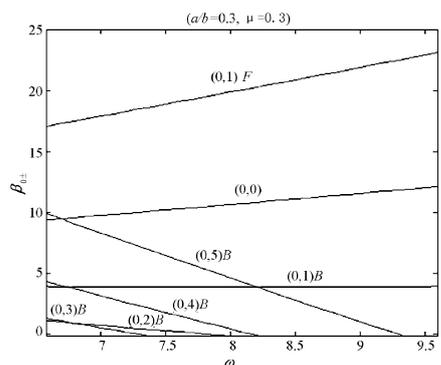


图 3 图 2 的局部放大

Fig. 3 Local magnifying map of Fig. 2

下面分别计算了临界转速随内外半径比( $\mu = 0.3$ )变化关系和随泊松比( $a/b = 0.3$ )的变化关系, 结果见图 4 和图 5.

### 4 结论

通过应用卡门板理论建立了旋转圆板的动力学方程, 假设出一类内边夹支外边自由圆板的振动

模态. 用两次伽辽金法分别计算出圆板自由振动的动频和静频, 得出了两者之间的关系. 定义并计算了临界转速, 讨论了临界转速随内外半径比和泊松比的变化关系.

对于各波节数  $n(n = 0, 1, 2, \dots, 5)$ , 通过计算发现:

(1) 对于固定的动频随角度的增大而增大; 对固定的角速度,  $n$  越大动频越大, 而且相邻  $n$  之间的距离随  $n$  的增加而增加.

(2) 除过  $n = 0$ , 对于其他节径, 静频 = 动频  $\pm n \times$  角速度.

(3)  $n = 0$  和  $n = 1$  没有临界转速, 其余的都有临界转速; 临界转速不一定随波节数的增加而增大, 图 3 中  $n = 3$  的临界转速就小于  $n = 2$  的, 因为临界转速还与内外半径比  $a/b$  和泊松比  $\mu$  有关.

(4) 对于各个  $n$ , 临界转速随着内外半径比  $a/b$  增加而增大;  $n$  越小增加的幅度越大, 曲线相对较陡;  $n$  越大增大的幅度就越小, 曲线比较平缓; 具体见图 4.

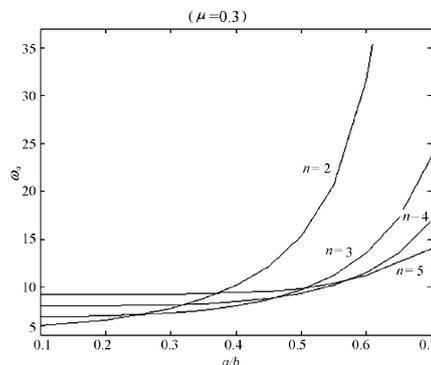


图 4 临界转速随内外半径比的变化

Fig. 4 Critical speed versus inner-to-outer radius ratio

(5) 对于各个  $n$ , 临界转速随泊松比  $\mu$  增加而减小, 见图 5.

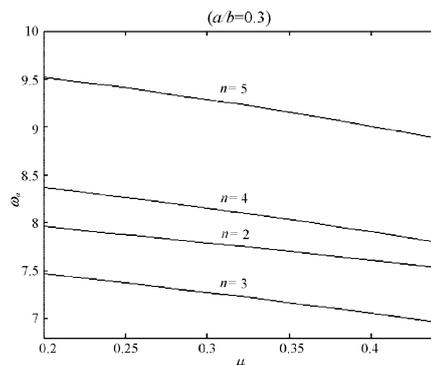


图 5 临界转速随泊松比的变化

Fig. 5 Critical speed versus Poisson's ratio

## 参 考 文 献

- 1 H. Lamb, R. V. Southwell. The vibrations of a spinning disc. *Proceedings of Royal Society, Series A*, 1921, 99: 272 ~ 280
- 2 G. K. Ramaiah. Natural frequencies of spinning annular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 74: 303 ~ 310
- 3 J. L. Nowinski. Nonlinear transverse vibrations of a spinning disk. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31: 72 ~ 78
- 4 H. P. Lee, T. Y. Ng. Vibration and critical speeds of a spinning annular disk of varying thickness. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 187(1): 35 ~ 50
- 5 A. Raman and C. D. J. Mote. Remarks on the non-linear vibration of an axisymmetric circular disk near critical speed. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2002, 37: 35 ~ 41
- 6 J. S. Chen, C. Y. Hua and C. M. Sun. On the secondary resonance of a spinning disk under space-fixed excitations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2004, 126: 422 ~ 429
- 7 S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. Beijing: Tsinghua University Press, 2003
- 8 L. Meirovitch. *Computational methods in structural dynamics*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands Rockville, Maryland, U. S. A: Sithoff & Noordhoff, 1980
- 9 晏砺堂, 朱梓根, 李其汉. 高速旋转机械振动. 北京: 国防工业出版社, 1994 (YAN Litang, ZHU Zigen, LI Qihan. *Vibration of High-speed Spinning Machine*. Beijing: National Defence Industry Press, 1994 (in Chinese))

## ANALYSIS ON THE CRITICAL SPEED FOR A SPINNING THIN ANNULAR PLATE\*

Mao Haiyu Xie Jianhua Xu Huidong

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** Based on the von Karman plate theory, the transverse vibration equation of a spinning thin axisymmetric annular plate with clamped inner-boundary and free outer-boundary was formulated. The discretization of a simplified partial differential equation was obtained by the Galerkin method. For any nodal diameter, the smallest eigenvalue (zero nodal circle) of a stiffness operator and the eigenfrequency of the corresponding mode with regard to the simplified equation were calculated. The calculating method for the critical speed was given, and the critical speed versus inner-to-outer radius ratio and Poisson's ratio was investigated. The analysis results indicate that there is no critical speed for nodal diameter and, but for other nodal diameter, the critical speed increases with the increase of the inner-to-outer radius ratio and decreases with the increase of the Poisson's ratio. These observation is helpful to the design of annular plate for high-speed applications such as computer hard disks, circular sows, and turbines.

**Key words** annular plate, critical speed, Galerkin method, eigenvalue, travelling wave