

# 基于延拓方法的悬索非线性振动分析

周海兵<sup>1</sup> 刘伟长<sup>2</sup>

(1. 湖南大学土木工程学院, 长沙 410082) (2. 广东省冶金建筑设计研究院, 广州 510080)

**摘要** 研究了受谐波激励作用下悬索的非线性响应. 基于索的拟静态假设, 同时考虑悬索的几何非线性, 首先利用 Hamilton 变分原理得到了悬索面内运动的非线性方程. 然后把悬索的位移展开成固有模态的级数和. 并利用 Galerkin 方法得到一个有限维的动力系统. 再利用打靶法和延拓方法研究了悬索的周期运动. 同时利用数值积分研究了超谐波共振区的一些非周期运动. 最后讨论了激励幅值对悬索周期运动的影响.

**关键词** 悬索, 非线性振动, 延拓方法, 周期运动

## 引言

索结构在土木工程中应用非常广泛: 斜拉索中的拉索; 悬索桥中的悬索以及拱桥吊装过程中的运输天线等, 近年来对索结构的动力学也开展了非常多的研究<sup>[1-15]</sup>. 特别是近年来, 缆索吊装在钢管混凝土拱桥的修建过程中得到广泛的应用, 对垂跨比为 0.025 - 0.045 的运输天线在吊装过程中的安全性提出了更高的要求. 所以对垂跨比在这一范围内悬索的静动力学进行研究有很重要的工程应用意义.

在上面所提到的研究中, 利用最广泛的是近似法<sup>[1-12]</sup>, 其中主要包括基于多尺度法的离散法<sup>[1-10]</sup>和直接法<sup>[11,12]</sup>. 在离散法中, 首先利用 Galerkin 方法把运动方程离散成低维模型, 然后利用摄动法(多尺度法、平均法等)进行近似求解. 这种方法应用比较方便, 同时也可以研究共振区的非线性动力学. 然而最近的研究结果表明, 这种方法在研究悬索的非线性振动时可能得到一些错误的结果, 甚至可能得到性质相反的幅频曲线<sup>[11]</sup>. 因此近年来, 广泛应用直接法对悬索的非线性振动进行研究<sup>[11,12]</sup>. 这种方法直接利用摄动法对悬索的运动方程以及边界条件进行近似求解, 可以避免由离散带来的一些错误结果. 然而这种方法在求解过程中引入了一个边界值问题, 因此求解比较复杂. 同时因为运动方程是偏微分方程, 也很难进行结果对比. 尽管近似法能够得到有利于结果分析的近似数

学表达式, 但是都是基于小参数假设以及只能对少数共振区的研究, 研究范围受到了很大的限制.

针对这些问题, 本文提出利用延拓方法对悬索的非线性振动进行研究. 首先把悬索的非线性运动方程利用 Galerkin 方法进行离散, 并写成矩阵形式. 然后利用打靶法在远离共振区处得到一组周期解, 再利用延拓方法确定整条幅频曲线. 最后利用数值结果分析了多模态离散下悬索的非线性振动, 并分析了激励幅值对非线性振动的影响.

## 1 数学模型

### 1.1 运动方程

考虑两端悬挂在一条水平线上的弹性悬索, 如图 1 所示. 以一端为坐标原点, 重力加速度方向为  $y$  轴, 两端点连线方向为  $x$  轴建立直角坐标系. 在自身重力的作用下, 悬索的构形如图 1 中的虚线所示. 如果假设悬索的垂跨比小于  $\frac{1}{8}$ , 此时, 悬索的初始构形可以用抛物线方程  $y(x) = 4bx(l-x)/l^2$  进行描述, 其中  $b$  为悬索的垂度;  $l$  为悬索的水平跨径. 在竖向荷载  $F(x, t) = F(x)\cos\Omega t$  的作用下(其中  $F(x)$  为描述荷载面内分布的函数,  $\Omega$  为荷载的频率), 悬索在  $t$  时刻的构形如图 1 中的实线所示. 此时坐标  $x$  点处的位移场可以用纵向  $u(x, t)$  位移和竖向位移  $w(x, t)$  来确定. 因为悬索的横向波速远小于其纵向波速, 所以可以假设悬索以拟静态方式进行轴向变形. 基于上面的假设, 利用 Hamilton

变分原理可以得到忽略弯曲、扭转以及剪切的悬索非线性面内运动方程

$$m\ddot{w} + c\dot{w} - \{Hw' + EA/l(y' + w')\} \int_0^l (y'w' + 1/2w'') dx \}' = F(x, t) \quad (1)$$

其中  $m$  为悬索单位长度的质量;  $c$  为悬索单位长度上的阻尼系数;  $E$  为悬索的弹性模量;  $A$  为悬索的横截面积;  $H$  为悬索的水平张力; 并满足  $H/EA \ll 1$ ; 一点代表对时间  $t$  的导数; 一撇代表对坐标  $x$  的导数. 同时边界条件在两个端点处满足  $w(x, t)|_{x=0, x=l} = 0$ . (1) 式综合考虑了悬索纵向运动对竖向运动的影响, 可以更加精确描述悬索在外激励作用下的非线性响应, 因此被广泛利用到单自由度模型<sup>[11, 12]</sup>和多自由度模型<sup>[10]</sup>的研究.

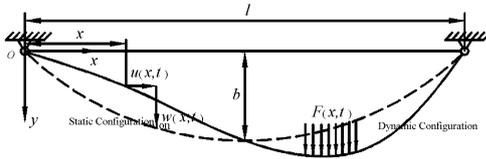


图1 悬索的构形

Fig. 1 Configuration of suspended cable

## 1.2 离散模型

按照文献[11]所给的过程, 把(1)式中的变量对悬索的跨径和第一阶对称模态的固有周期进行规一化, 就可以得到悬索面内非线性运动方程的无量纲形式. 然后利用分离变量法, 把无量纲竖向位移进行级数展开

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

其中  $\phi_i(x)$  为悬索的固有模态;  $q_i(t)$  为广义坐标;  $N$  为根据收敛性要求确定的总自由度. 把(2)式代入(1)式, 并进行 Galerkin 积分可以得到由一组常微分方程描述的面内运动方程. 把这组常微分方程写成状态方程的矩阵形式

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) \quad (3)$$

其中  $\mathbf{p} = \{\dot{\mathbf{q}}^T, \mathbf{q}^T\}^T$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = \{\{\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{f}(t)\}, \mathbf{0}\}^T$ ,  $\mathbf{C}$  为  $N \times N$  的模态阻尼矩阵:  $\mathbf{C} = \boldsymbol{\varphi}^{-T} \text{Diag}(2\xi\omega_i) \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ , 这里  $\boldsymbol{\varphi}$  是固有模态  $\phi_i(x)$  组成的列向量,  $\xi$  为模态阻尼比,  $\omega_i$  为悬索的固有频率;  $\mathbf{I}$  为单位矩阵;  $\mathbf{K}$  为一次项组成的刚度矩阵:  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\varphi}^{-T} \text{Diag}(\omega_i^2) \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ ;  $\mathbf{K}_2$  和  $\mathbf{K}_3$  为平方非线性项和立方非线性项组成的刚度矩阵;  $\mathbf{f}$  为  $N \times 1$  的荷载列向

量. 并且最后三个矩阵(列向量)的数学表达式可以参考<sup>[10]</sup>. 显然(3)式是含时间  $T$  的非自治系统, 因此周期  $T = 2\pi/\Omega$ .

## 2 幅频响应曲线

结构在外激励作用下的周期运动对应于结构控制方程的周期解, 结构的幅频曲线反映了周期解随激励频率的变化情况. 为了研究悬索的幅频响应, 首先利用打靶法确定一组周期解.

### 2.1 打靶法

按照打靶法<sup>[16]</sup>, 首先要引入如下方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = [\mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{F}(\mathbf{p})]_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\Phi}(t), \boldsymbol{\Phi}(0) = \mathbf{I} \quad (4)$$

其中  $\boldsymbol{\Phi}$  为  $2N \times 2N$  的转换矩阵; 下标  $\mathbf{p}$  表示对  $\mathbf{p}$  的导数. 然后利用初始猜测  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$  和 Runge - Kutta 法可以得到  $\mathbf{p}(T)$  和  $\boldsymbol{\Phi}$ . 此时  $\mathbf{p}$  的修正量  $\delta\mathbf{p}$  可以通过以下方程来确定

$$[\boldsymbol{\Phi}(T) - \mathbf{I}] \delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}(T) \quad (5)$$

如果  $\|\delta\mathbf{p}\|$  小于或等于允许误差 TOL ( $\|\cdot\|$  表示范数), 则周期解为  $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$ , 否则初始猜测更新为  $\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$ , 重复上述过程直到满足收敛条件. 此时周期解的稳定性可以通过计算  $\boldsymbol{\Phi}(T)$  的特征值来确定, 如果特征值的模小于 1, 则周期解稳定, 否则不稳定.

### 2.2 延拓方法

在确定一组周期解之后, 就可以利用简单的延拓方法确定整条曲线, 然而这种方法在奇异点处不可逆. 因此通常引入弧长参数作为一个独立的变量. 为此引入一个新的约束方程

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2 + (\Omega - \Omega_0)^2 = \Delta s^2 \quad (6)$$

(3) 式和(6)式由  $2N + 1$  个方程组成, 其中含有  $2N + 1$  个未知变量, 可以利用 Newton - Raphson 法求解.

## 3 数值结果与讨论

以往大部份悬索模态作用的研究主要关注第一横截点附近的非线性动力学, 在本文的数值研究中, 选择的参数为  $EA/H = 198.236$ ,  $f = b/l = 1/27.5$ , 同时选定阻尼比  $\xi = 0.02$ . 相应的前八阶固有模态以及频率如图 2 所示, 其中  $s$  上标表示对称, 上标  $a$  表示反对称, 下标表示阶数. 显然此时对称模态的第三阶固有频率与第一阶固有频率之间近似满足 3:1 的关系:  $\omega_3^s \approx 3\omega_1^s$ . 在确定幅频曲线时, 为

为了避免非线性带来的不稳定和多解现象,选取远离共振区的一点作用初始点,然后利用第二节的方法确定整条曲线.在下面的幅频曲线中,稳定解和不稳定解分别用实线和虚线表示.

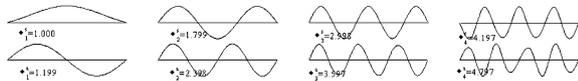


图 2 悬索的固有频率与固有模式

Fig. 2 Natural frequency and mode of suspended cable

### 3.1 非线性响应

图 3 给出了此种情况下,悬索在外激励较大频率范围内的幅频响应曲线,其中  $f_1 = 0.008$ , PD 代表倍周期分叉, TR 代表环面分叉. 整条幅频响应曲线反映了很多非线性振动独特的现象:跳跃;亚谐波共振;超谐波共振;内共振;分叉等. 结构非线性振动与线性振动一个明显的区别在于响应中可能存在大量的超谐波和亚谐波成份,当外激励频率接近这些谐波时,可能激发更多的亚谐波和超谐波共振. 图 3a 的幅频曲线非常明显地出现了由这些共振引起的峰值. 这些峰值同样可以出现在由单模态离散模型的摄动结果中<sup>[2,3]</sup>,因此多模态作用对直接激发模态的亚谐波共振以及超谐波共振影响较小. 然而这种模态作用特别是第三阶对称模态与第一阶对称模态的 3:1 内共振,导致了间接激发的第三阶对称模态多个较大的峰值(图 3b). 为了说明这些共振现象导致悬索运动的多谐波现象,利用数值积分对离散模型进行求解,然后把不同激励频率作用下的悬索响应进行 FFT 变换,得到的频谱图如图 4a 和图 4b 所示. 可以看出这些图中存在由于悬索非线性导致的多谐波成份. 同时也可以注意到在  $\Omega \approx 1$  时,频谱图中出现了连续分布现象,证实了混沌运动的存在.

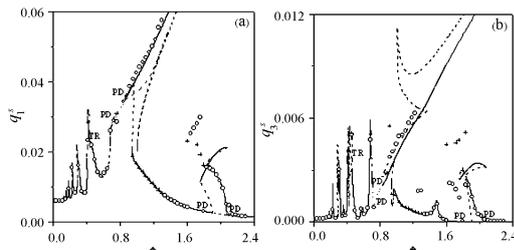


图 3 幅频响应曲线:(a) 第一阶对称模态;(b) 第三阶对称模态

Fig. 3 The amplitude - frequency response curves:

(a) The natural frequency of the first symmetric;

(b) The natural frequency of the third symmetric

本文方法:——稳定解,---不稳定解;数值积分:“○”频率增大;“+”频率减小.

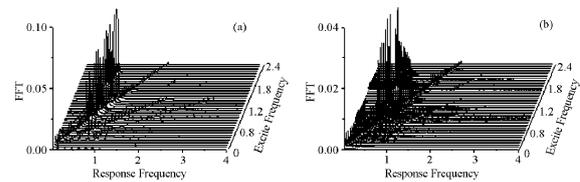


图 4 悬索非线性响应的 FFT 变换:(a) 频率增大;(b) 频率减小

Fig. 4 FFT of Nonlinear Response of suspended cable:

(a) increasing the frequency;(b) decreasing the frequency

为了证明本文方法的正确性,图 3 同时给出了激励频率缓慢增加和减小的数值结果,其中“○”号和“+”号代表随激励频率缓慢增加和减小时分别利用 Runge - Katta 法直接进行数值积分得到周期解的最大值. 数值积分的结果和延拓方法得到的曲线除了在  $\Omega \approx 1$  和  $\Omega \approx 2$  处有比较大的差别之外,其它吻合非常好. 在  $\Omega \approx 1$  的差别产生主要是在主共振区非周期运动的存在,而在  $\Omega \approx 2$  处的差别主要可能是因为存在一条独立于现有解分支的  $2T$  解分支.

### 3.2 激励幅值的影响

悬索在外激励幅值较大的情况下,幅频曲线呈现出非常复杂的非线性现象,为了便于进行研究激励幅值对悬索非线性振动的影响,考虑相对较小的情况: $f_1 = 0.0006$ ;  $f_2 = 0.0012$ ;  $f_3 = 0.0024$ . 图 5 给出了三种不同激励幅值情况下的幅频曲线.

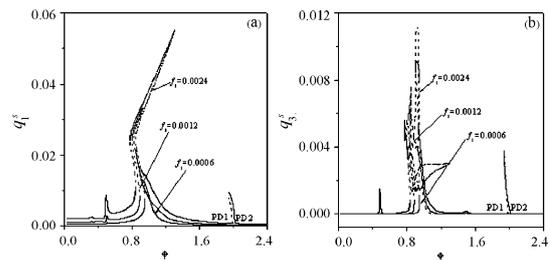


图 5 幅频响应曲线:(a) 第一阶对称模态;(b) 第三阶对称模态

Fig. 5 The amplitude - frequency response curves:

(a) The natural frequency of the first symmetric;

(b) The natural frequency of the third symmetric

显然在激励幅值很小的情况下  $f_1 = 0.0006$ , 幅频曲线相对简单. 在主共振区  $\Omega \approx 1$ , 第一阶和第三阶对称模态的幅频曲线分别像预期中的那样呈软弹簧特性和硬弹簧特性. 同时超谐波共振区内基本上可以忽略非线性的影响,而第三阶对称模态的幅频曲线在超谐波共振区基本上没有变化. 随着激励

幅值的增大,立方非线性的影响逐渐增强,第一阶对称模态的幅频曲线在响应幅值较大的时候向右倾斜呈硬弹簧特性.因为悬索单模态的二次摄动得到的幅频曲线无论是直接法还是离散法只受有效非线性系数<sup>[11]</sup>的影响,因此不可能出现先软化后硬化的现象.但是在悬索的四次摄动却可以得到这种现象<sup>[11]</sup>,因此说明了延拓方法可以得到精度很高的结果,同时也可以避免摄动法中的小参数假设带来的精度问题.

#### 4 结论

基于悬索的多自由度离散模型,本文利用延拓方法研究了悬索的非线性振动.这种方法计算量小,提高自由度的个数可以得到比较精确的结果,同时也能对一些非线性现象进行预测.并利用数值积分对得到的结果进行了对比,两者结果比较吻合,还利用数值积分分析了悬索的非周期运动.通过本文的研究,可以得到以下主要结论:

(1)悬索在外激励较大情况下,模态的幅频曲线出现了多个超谐波共振、主共振以及亚谐波共振.第一阶模态在主共振区的幅频曲线主要呈硬弹簧特性.并在这个区域内,悬索可能经过运动失稳,从而作比较复杂的非周期运动.同样在超谐波共振区内: $\Omega \approx \frac{1}{2}$ ,幅频曲线并不一直存在稳定解,此时悬索可能作混沌运动、概周期运动以及 NT 运动.在亚谐波共振区内: $\Omega \approx 1$ ,悬索可能经过倍周期分叉,从而作  $2T$  运动.

(2)外激励大小直接影响直接激发的第一阶对称模态的幅频曲线.在外激励非常小时,此阶模态的幅频曲线呈软弹簧特性,当激励幅值增大时,幅频曲线的上半部分逐渐向右倾斜.同时外激励大小也影响了悬索的亚谐波共振以及超谐波共振.

虽然本文利用延拓方法只研究了悬索的非线性振动,但是这种方法可以推广到分布参数系统的非线性振动研究中,特别是研究分布参数系统中的模态作用研究.

#### 参 考 文 献

- 1 Benedettini F, Rega G. Planar non-linear oscillations of elastic cables under planar excitation. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1987, 22: 497 ~ 509
- 2 Benedettini F, Rega G. Planar non-linear oscillations of elastic cables under superharmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 132: 353 ~ 366
- 3 Rega G, Benedettini F. Planar non-linear oscillations of elastic cables under subharmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 132: 367 ~ 381
- 4 Rao GV, Iyengar RN. Internal resonance and non-linear response of a cable under periodic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 149: 25 ~ 41
- 5 Perkins NC. Modal interactions in the non-linear response of elastic cables under parametric/external excitation. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1992, 27: 233 ~ 250
- 6 Benedettini F, Rega G, Alaggio R. Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182: 775 ~ 798
- 7 Luongo A, Piccardo G. Non-linear galloping of sagged cables in 1:2 internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 214: 915 ~ 940
- 8 Zhao YY, Wang LH, Chen DL, et al. Nonlinear dynamic analysis of the two-dimensional simplified model of an elastic cable. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 255: 43 ~ 59
- 9 Zhao Y, Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: Three-to-one internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 264: 1073 ~ 1093
- 10 王连华, 赵跃宇. 悬索在考虑 1:3 内共振情况下的动力学行为. *固体力学学报*, 2006, 27(3): 230 ~ 236 (Wang L, Zhao Y. Nonlinear interactions and chaotic dynamics of suspended cables with three-to-one internal resonances. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 27(3): 230 ~ 236 (in Chinese))
- 11 赵跃宇, 王连华, 刘伟长, 周海兵. 悬索非线性动力学中的直接法与离散法. *力学学报*, 2005, 37(3): 329 ~ 338 (Zhao YY, Wang LH, Liu WC, Zhou HB. Direct treatment and discretizations of non-linear dynamics of suspended cables. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(3): 329 ~ 338 (in Chinese))
- 12 Arafat HN, Nayfeh AH. Non-linear responses of suspended cables to primary resonance excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266: 325 ~ 354
- 13 Martinelli L, Perotti F. Numerical analysis of the non-linear dynamic behavior of suspended cables under turbulent

- wind excitation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2001, 2: 207 ~ 233
- 14 Ni YQ, Lou WJ, Ko JM. A hybrid pseudo - force/laplace transform method for non - linear transient response of a suspended cable. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 238 (2): 189 ~ 214
- 15 Srinil N, Rega G, Chuccheepsaul S. Large amplitude three - dimensional free vibration of inclined sagged elastic cable. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 33: 129 ~ 146
- 16 Nayfeh AH, Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley - Interscience, New - York, 1994
- 17 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2001 (Liu YZ, Chen LQ. *Nonlinear Vibration*. Beijing: Higher Education Press, 2001 (In Chinese))

## NONLINEAR OSCILLATIONS OF SUSPENDED CABLES USING THE CONTINUATION METHOD

Zhou Haibing<sup>1</sup> Liu Weichang<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

(2. Guangdong Metallurgical Architectural Design & Research Institute, Guangzhou 510080, China)

**Abstract** The dynamic response of a suspended cable subjected to a harmonic excitation was investigated. Based on the assumption of quasi - static stretching due to the fact that the transverse wave speed is much lower than the longitudinal wave speed, the nonlinear governing in - plane equation of the suspended cable was derived by means of Hamilton principle, which took into account the geometric nonlinearity of the suspended cable. And the displacement of the suspended cable was expanded in a series of the natural modes of the suspended cable. Then, the Galerkin method was used to obtain a finite - dimensional dynamical system. The periodic motions of the suspended cable were examined by means of the shooting method and the continuation method, while the non - periodic motions were studied through direct simulations. A comparison with the direct numerical results was performed. At last, the effects of the amplitude of the harmonic excitation on the periodic motion of the suspended cable were investigated.

**Key words** suspended cables, nonlinear oscillations, the continuation method, periodic motion