

# 桥梁结构移动荷载识别的辛精细积分算法\*

侯秀慧<sup>1</sup> 邓子辰<sup>1,2</sup> 黄立新<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072) (2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

**摘要** 首先利用哈密顿原理, 将桥梁结构振动微分方程转化为哈密顿正则方程形式, 然后将精细积分思想的算法引入到辛算法中, 形成辛精细积分算法. 在时间微段上, 将非齐次项正弦/余弦化, 得到了荷载识别的辛精细积分格式. 与传统 Runge-Kutta 方法及荷载识别的精细积分格式相比, 仿真算例表明本文算法不仅提高了识别精度, 而且在长期定量计算中保持了辛算法的稳定性, 计算结果不受积分步长的影响, 因此可通过增大积分步长, 缩短仿真时间, 提高计算效率.

**关键词** 荷载识别, 桥梁结构, 哈密顿系统, 辛精细积分, 移动荷载, Runge-Kutta 方法, 精细积分方法

## 引言

近年来, 随着高速铁路的出现与大跨度桥梁的发展, 车桥动力相互作用问题的研究已成为桥梁振动领域中一个重要的课题, 如何通过结构的响应有效地反演桥梁结构的移动荷载, 对桥梁结构的设计与建造均具有重要的指导意义.

冯康提出哈密顿动力体系的保辛差分为保守体系数值积分指出了方向<sup>[1]</sup>, 钟万勰等基于计算力学和最优控制的相似性将哈密顿体系理论应用于有限元方法, 并发展了精细积分算法<sup>[2]</sup>, 已有不少学者在这方面做了有益的探讨<sup>[3-7]</sup>. 本文将桥梁振动系统有效地转化为哈密顿体系, 将精细积分思想引进到辛几何算法中, 形成辛精细积分方法, 并将该算法应用到桥梁结构移动荷载识别研究中, 将传统的基于经典牛顿力学的移动荷载识别方法推广到以辛几何为基础的哈密顿体系中, 从而有望为荷载识别这一结构动力学逆问题的研究提供新的研究途径.

## 1 动力学模型

图1所示, 假设简支连续梁模型为 Bernoulli-Euler 梁(不考虑剪切变形与转动惯量的影响), 等截面( $EI$ 为常数), 恒载质量均匀分布(单位长度梁的质量  $\rho$  为常数), 随时间变化荷载  $f(t)$  以匀速  $c$

沿梁从左向右移动, 梁的运动满足小变形理论并在弹性范围内, 其强迫振动微分方程可用下式表示:

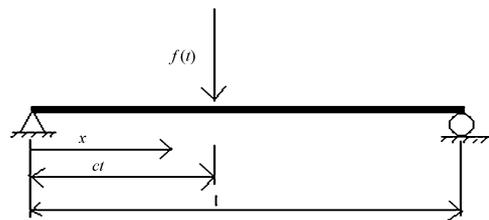


图1 承受移动荷载的简支梁

Fig. 1 A simply supported beam subjected to a moving force

$$\rho \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \delta(x - ct)f(t) \quad (1)$$

其中  $v(x, t)$  代表梁在位置  $x$ 、时间  $t$  处的挠度,  $E$  为梁的弹性模量,  $I$  为梁的截面惯性矩,  $\delta$  为 Dirac 函数.

基于模态叠加理论, 梁的挠度可表示为

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (2)$$

其中  $q_n(t)$  为广义模态坐标,  $\phi_n(x)$  为模态函数,  $n$  为模态数, 对于等截面简支梁, 模态函数可假定为三角函数, 即

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3)$$

将式(2)和(3)代入式(1), 同时利用模态函数的正交性, 将方程左右同乘  $\phi_n(x)$ , 沿梁长  $l$  进行积分, 得:

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2}{\rho l} p_n(t) \quad (4)$$

2007-04-16 收到第1稿, 2007-05-31 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(10572119 和 10632030)、教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0958)、陕西省自然科学基金(2006A07)、大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金及西北工业大学创新种子基金(Z200730)资助

其中

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4, p_n(t) = f(t) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (5)$$

## 2 Hamilton 正则方程

对于上述结构体系,其 Lagrange 函数:

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}^T \dot{q} / 2 - q^T \omega^2 q / 2 + F(t)q \quad (6)$$

其中

$$F(t) = \frac{2}{\rho l^4} p_n(t) \quad (7)$$

广义变量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad (8)$$

变换得:

$$\dot{q} = p \quad (9)$$

Hamilton 函数为:

$$H = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) = \dot{q}^T \dot{q} / 2 + q^T \omega^2 q / 2 - F(t)q = p^T p / 2 + \omega^2 q^T q / 2 - F(t)q \quad (10)$$

建立对偶变量:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q + F(t) \end{cases} \quad (11)$$

则哈密顿正则方程

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

设  $v = \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}$  上式即可表示为:

$$\dot{v} = H v + r \quad (13)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

取  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  由于  $(JH)^T = JH$  故:  $H$  为哈密顿矩阵.

对于  $\dot{v} = H v$  的正则方程,其状态解为  $v = \exp(Ht)v_0$  其中  $\exp(Ht)$  做为辛矩阵  $Ht$  的指数变换.

## 3 构造辛精细积分算法

在保持哈密顿系统辛结构的基础上,可以将精细积分思想引入到哈密顿问题中来,构造辛精细积分算法,也即精细辛算法,不仅能够提高计算精度,而且可以保持长期稳定性<sup>[8]</sup>. 对于上述问题,

关键是如何精确地求解  $\exp(Ht)$ ,且保持其原有的辛性质,对于  $\exp(Ht)$  的逼近,最简单的办法就是采用有理 Padé 逼近,下面考虑对  $\exp(x)$  有理逼近:

$$\exp(x) \approx \frac{n_{lm}(x)}{d_{lm}(x)} = \phi_{lm}(x) \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} n_{lm}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(l+m-k)! m!}{(l+m)! k! (m-k)!} (x)^k \\ d_{lm}(x) = \sum_{k=0}^l \frac{(l+m-k)! l!}{(l+m)! k! (l-k)!} (-x)^k \end{cases} \quad (16)$$

对每一对非负整数  $l$  和  $m$ ,  $\frac{n_{lm}(x)}{d_{lm}(x)}$  关于原点的 Taylor 级数展开式为:

$$\exp(x) - \frac{n_{lm}(x)}{d_{lm}(x)} = O(|x|^{m+l+1}) \quad |x| \rightarrow 0 \quad (17)$$

记  $\phi_{lm}$  为  $l+m$  阶对  $\exp(x)$  的 Padé 逼近.

定理:设  $H$  是无穷小辛阵,对于充分小的  $|t|$ ,  $\phi_{lm}(Ht)$  是辛阵,当且仅当  $l=m$ ,即  $\phi_u(x)$  是对  $\exp(x)$  的 Padé 对角逼近.

对于  $\exp(Ht)$ ,采用以上有理 Padé 逼近,即令  $x = Ht$

(1) 取  $l=1, m=1$ ,有 Euler 中点格式:

$$v^{n+1} = v^n + \frac{Ht}{2}(v^n + v^{n+1}) \quad (18)$$

整理得:

$$v^{n+1} = \phi^{(1,1)}(Ht)v^n \quad (19)$$

其中:  $\phi^{(1,1)}(Ht) = \frac{1 + \frac{Ht}{2}}{1 - \frac{Ht}{2}}$ ,此格式具有 2 阶精度.

(2) 取  $l=2, m=2$ ,有

$$v^{n+1} = v^n + \frac{Ht}{2}(v^n + v^{n+1}) + \frac{H^2 t^2}{2}(v^n - v^{n+1}) \quad (20)$$

整理得;

$$v^{n+1} = \phi^{(2,2)}(Ht)v^n \quad (21)$$

其中:  $\phi^{(2,2)}(Ht) = \frac{1 + \frac{Ht}{2} + \frac{(Ht)^2}{12}}{1 - \frac{Ht}{2} + \frac{(Ht)^2}{12}}$  此格式具有 4 阶

精度.

在 Padé 逼近中引入精细积分思想:选取以上四阶精度格式,取  $s=2^N$  选  $N=20$  则  $s=1048576$  故:

$$\exp(Ht) = [\exp(H \cdot t/s)]^s \approx [\phi^{(2,2)}(H \cdot t/s)]^s =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Ht}{2} + \frac{(Ht)^2}{12} \\ 1 - \frac{Ht}{2} + \frac{(Ht)^2}{12} \end{bmatrix}^{2N} = \frac{(I + T_a)^{2N}}{(I + T_b)^{2N}} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{H \cdot t/s}{2} + \frac{(H \cdot t/s)^2}{2} \\ T_b &= -\frac{H \cdot t/s}{2} + \frac{(H \cdot t/s)^2}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

对矩阵  $T_a$ , 有  $(I + T_a) \times (I + T_b) = I + 2T_a + T_a \times T_a$ .

由于矩阵  $T_a$  很小, 当它与单位阵  $I$  相加时, 就会成为其尾数, 在计算机的舍入操作中, 其精度将丧失殆尽. 因此  $2T_a$  与  $T_a \times T_a$  做为增量, 不宜直接与  $I$  相加进行指数计算<sup>[9]</sup>, 因此可以采用以下程序代码

$$\text{for}(iter = 1; iter \leq N; iter++) \{ T_a = 2T_a + T_a T_a; T_b = 2T_b + T_a T_a \}$$

则

$$T = \exp(Ht) = \phi(Ht) = \frac{I + T_a}{I + T_b} \quad (24)$$

#### 4 桥梁结构移动荷载识别的辛精细积分格式

对式(13), 在时间段  $[t_k, t_{k+1}]$  内, 取  $T = e^{H\tau}$ ,  $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ , 将  $r$  正弦/余弦化

$$r = r_1 \sin \omega t + r_2 \cos \omega t \quad (25)$$

其中  $r_1, r_2$  为时不变向量,  $\omega$  为常量, 将式(25)代入式(13), 得:

$$\begin{bmatrix} q_n(t_{k+1}) \\ p_n(t_{k+1}) \end{bmatrix} = T(\tau) \begin{bmatrix} q_n(t_k) \\ p_n(t_k) \end{bmatrix} + M(\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\rho l} f(t_k) \cos(\mu - \omega) t_k \end{bmatrix} - N(\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\rho l} f(t_k) \sin(\mu - \omega) t_k \end{bmatrix} \quad (33)$$

即

$$\begin{cases} q_n(t_{k+1}) = T_{11} q_n(t_k) + T_{12} p_n(t_k) + M_{12} \frac{2}{\rho l} f(t_k) \cos(\mu - \omega) t_k - N_{12} \frac{2}{\rho l} f(t_k) \sin(\mu - \omega) t_k \\ p_n(t_{k+1}) = T_{21} q_n(t_k) + T_{22} p_n(t_k) + M_{22} \frac{2}{\rho l} f(t_k) \cos(\mu - \omega) t_k - N_{22} \frac{2}{\rho l} f(t_k) \sin(\mu - \omega) t_k \end{cases} \quad (34)$$

将式(34)代入式(2), 整理既得简支梁模型的挠度为:

$$\begin{aligned} v(x, t_{k+1}) &= \sum_{n=1}^p \phi_n(x) q_n(t_{k+1}) = \\ &g(x, \tau, t_k) + j(x, \tau, t_k) f(t_k) \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\begin{cases} g(x, \tau, t_k) = \sum_{n=1}^p \phi_n(x) (T_{11} q_n(t_k) + T_{12} p_n(t_k)) \\ j(x, \tau, t_k) = \frac{2}{\rho l} \sum_{n=1}^p \phi_n(x) (M_{12} f(t_k) \cos(\mu - \omega) t_k - N_{12} f(t_k) \sin(\mu - \omega) t_k) \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} v(t_{k+1}) &= T(v(t_k) - A \sin \omega t_k - B \cos \omega t_k) + \\ &A \sin \omega t_{k+1} + B \cos \omega t_{k+1} \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\begin{cases} A = (\omega I + H^2/\omega)^{-1} (r_2 - H r_1/\omega) \\ B = (\omega I + H^2/\omega)^{-1} (-r_1 - H r_2/\omega) \end{cases} \quad (27)$$

令  $\mu = \frac{n\pi c}{l}$ , 利用单点插值方法, 在积分区间  $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$  内, 设

$$\begin{aligned} r_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\rho l} f(t_k) \cos(\mu - \omega) t_k \end{bmatrix}, \\ r_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\rho l} f(t_k) \sin(\mu - \omega) t_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

将式(26)分离变量得:

$$v(t_{k+1}) = T(\tau) v(t_k) - S(\tau) A - E(\tau) B \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} S(\tau) = T(\tau) \sin \omega t_k - I \sin \omega t_{k+1} \\ E(\tau) = T(\tau) \cos \omega t_k - I \cos \omega t_{k+1} \end{cases} \quad (30)$$

将式(27)代入式(29), 分离出  $r_1, r_2$ , 得:

$$v(t_{k+1}) = T(\tau) v(t_k) + M(\tau) r_1 - N(\tau) r_2 \quad (31)$$

其中

$$\begin{cases} M(\tau) = (\omega I + H^2/\omega)^{-1} (HS(\tau)/\omega + E(\tau)) \\ N(\tau) = (\omega I + H^2/\omega)^{-1} (S(\tau) - HE(\tau)/\omega) \end{cases} \quad (32)$$

将式(28)代入式(31)并展成向量形式如下:

将式(35)变形得:

$$v(x, t_{k+1}) - g(x, \tau, t_k) = j(x, \tau, t_k) f(t_k) \quad (37)$$

其中  $p$  为截断的模态阶数 (即振型数),  $N_B = l/c\tau$  为采样点数,  $N$  为响应测点数, 则设汽车开始上桥与最后离桥阶段, 即荷载作用的最初与最后阶段,  $f(0) = f(N_B) = 0, v(0) = v(N) = 0$ , 将式(37)写成矩阵形式, 以便同时求解各点荷载:

$$v_{N \times 1} = G_{N \times N_B} f_{N_B \times 1} \quad (38)$$

其中当  $N = N_B$  时,  $G_{N \times N_B}$  为对角矩阵, 则:

$$f_{N_B \times 1} = [G_{N \times N_B}]^{-1} v_{N \times 1} \quad (39)$$

当  $N > N_B$  时,得到广义逆的极小范数最小二乘解:

$$f_{N_B \times 1} = [G_{N \times N_B}]^+ v_{N \times 1} \quad (40)$$

以上就是基于精细辛算法的桥梁结构移动荷载识别公式.

与基于精细积分方法的荷载识别格式<sup>[10]</sup>相比,本方法在  $T = e^{Ht}$  的计算上发生变化. 首先有效地将桥梁结构振动微分方程转化为哈密顿正则方程形式,得哈密顿矩阵  $H$ ; 然后在方程求解过程中,利用能够保持  $H$  辛格式的有理 Padé 逼近计算  $\exp(Ht)$ , 同时引入精细积分思想的  $2^N$  算法,在保持辛结构的基础上,提高了计算精度;最后在时间段  $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$  中,将方程(13)中的非齐次项正弦/余弦化,通过公式推导得到荷载识别的辛精细积分格式. 与精细积分格式相比,本算法不仅提高了计算精度,而且在长期定量计算中保持了辛算法的稳定性.

### 5 仿真算例

对高低频混合的哈密顿系统,哈密顿函数:

$$H = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_3x_3^2 \quad (41)$$

对偶变量

$$q = [x_1, x_2, x_3]^T, p = [m_1\dot{x}_1, m_2\dot{x}_2, m_3\dot{x}_3]^T \quad (42)$$

则正则方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (43)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_3 \end{bmatrix}, K = -\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

假设  $m_1 = 0.1, m_2 = 10, m_3 = 1000, k_1 = 100, k_2 = 10, k_3 = 1$ , 得解析解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{10}/50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(10\sqrt{10}t) \\ \sin(t) \\ \sin(\sqrt{10}/100t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

则

$$P = \begin{bmatrix} m_1\dot{x}_1^2 \\ m_2\dot{x}_2^2 \\ m_3\dot{x}_3^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \cos(10\sqrt{10}t) \\ \cos(t) \\ \cos(\sqrt{10}/100t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

分别利用 SPIM(辛精细积分)方法与 Runge-Kutta 方法对上述问题进行求解,采用积分步长时,两种方法求得  $x_1$  的结果与解析解比较如图 2 所示;改变积分步长,分别取  $\tau = 0.05$  与  $\tau = 0.0001$  进行计算,如表 1 及表 2 所示(表中:误差 =  $\|$  数值方法解 - 解析解  $\| / \|$  解析解  $\|$ ),可知,对于相同的步长  $\tau$ ,SPIM 方法较传统的 Runge-Kutta 方法计算精度高,且 SPIM 方法计算精度基本不受步长变化的影响,而 Runge-Kutta 方法计算精度受积分步长变化影响较大. 对于 Runge-Kutta 方法,当积分步长从  $\tau = 0.05$  到  $\tau = 0.0001$  变化时,计算结果精度提高了近  $10^{12}$  倍,且  $\tau = 0.0001$  时的计算精度不及 SPIM 方法  $\tau = 0.05$  时的计算精度. 因此采用 SPIM 方法,可通过增大积分步长,在不降低计算精度的基础上,缩短计算时间,提高计算效率. 辛精细积分方法结合了辛算法的稳定性与精细积分方法的高精确性等特点,是一种全新的算法.

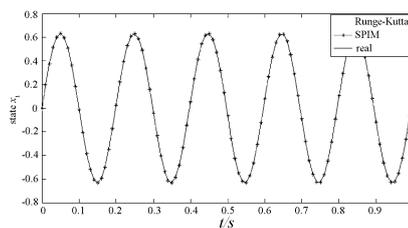


图 2 SPIM、Runge-Kutta 方法计算  $x_1$  所得结果与解析解关系曲线(步长 0.01)

Fig. 2 Results of state  $x_1$  calculated by SPIM, Runge-Kutta and analytical solution with time step 0.01

表 1 Runge-Kutta 方法与解析解计算误差随步长变化关系(时间)

Table 1 The error between Runge-Kutta and analytical solution with variable time step(time)

method	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
step 0.05	0.07762	0.2153	0.33249	0.43222	0.51709	0.58931	0.65076	0.70304	0.74751	0.78535
step 0.01	5.9542e-005	0.00020039	0.00032996	0.00044845	0.00055603	0.00065283	0.00073898	0.00081459	0.00087974	0.0009345
step 0.0001	6.3197e-015	1.0045e-013	3.0369e-013	6.1675e-013	1.0385e-012	1.5732e-012	2.2165e-012	2.9753e-012	3.8512e-012	4.8387e-012

表2 SPIM方法与解析解计算误差随步长变化关系(时间)

Table 2 The error between SPIM and analytical solution with variable time step (time)

method	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
step 0.05	1.7555e-016	3.5125e-016	3.5155e-016	5.2801e-016	3.5261e-016	3.5337e-016	1.7714e-016	5.3303e-016	3.5658e-016	0
step 0.01	1.7555e-016	0	3.5155e-016	5.2801e-016	8.8152e-016	7.0674e-016	1.5943e-015	1.2437e-015	1.248e-015	1.4319e-015
step 0.0001	1.4395e-014	4.619e-014	7.7693e-014	1.0895e-013	1.3999e-013	1.6997e-013	2.0265e-013	2.3347e-013	2.6726e-013	2.9873e-013

如图1所示的简支梁模型,设  $\rho = 1.1 \times 10^4$ ,  $EI = 2.0 \times 10^5$ , 梁长  $l = 1\text{m}$ , 力  $f(t)$  以匀速  $c = 1\text{m/s}$  沿梁长  $l$  从左向右移动, 频率  $f_1 = 6.70\text{Hz}$ ,  $f_2 = 26.80\text{Hz}$ ,  $f_3 = 60.30\text{Hz}$ .

(1) 取周期载荷  $f(t) = 3\sin(2\pi t) + 7\sin(3\pi t)$ , 仿真本文方法的识别精度.

设积分步长  $\tau = 0.01$ , 则  $n = l/c\tau = 1/(1 \times 0.01) = 100$ , 取 100 个测量点, 利用桥梁受移动荷载作用时动力响应的精细积分算法<sup>[11]</sup>, 计算已知力

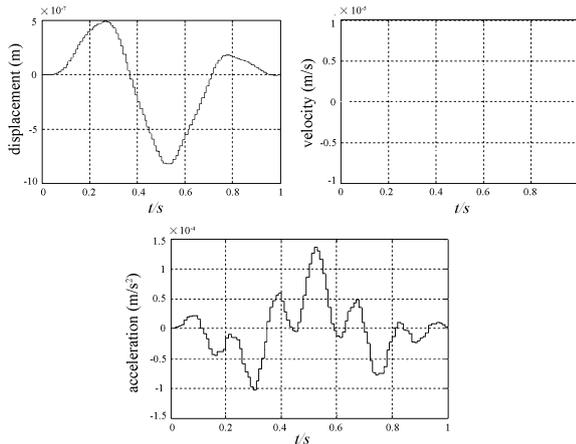


图3 简支梁模型响应曲线

Fig.3 The response curve for the simply supported beam model

作用下简支梁模型的挠度响应, 得到其响应曲线如图3所示.

取同样的积分步长, 即  $\tau = 0.01$ , 将以上挠度响应离散, 即取 100 个采样点 ( $N_B = N$ ), 利用本文提出的辛精细积分方法 (SPIM) 进行荷载识别, 采用前三阶模态组合, 得相应的识别曲线如图 4 (a) 所示. 与精细积分方法 (PIM) 识别曲线 (图 4 (b)) 相比, 设识别误差为:  $error = \| P_{identified} - P_{true} \|$ , 列于表 3, 知 SPIM 识别精度较 PIM 方法有一定程度的提高, 但幅度不大.

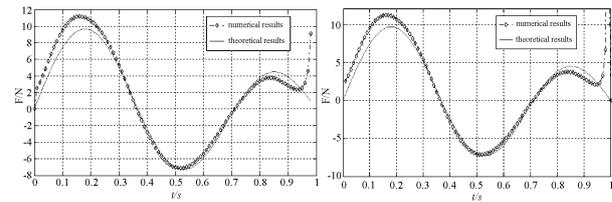


图4 (a) SPIM 识别力与真实力对比曲线;

(b) PIM 识别力与真实力对比曲线

Fig.4 (a) The comparison curve between

identified results from SPIM and real results;

(b) The comparison curve between

identified results from PIM and real results

表3 SPIM、PIM 识别误差比较 (时间, 误差)

Table 3 The identified error comparison between SPIM and PIM (time, error)

method	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
PIM	3.4132	1.9194	1.0376	0.43675	2.6772	0.44556	0.50217	1.1992	8.9432	1.1544	2.0648	0.8045
SPIM	3.4069	1.9076	1.0083	0.41792	2.7172	0.44607	0.49406	1.1858	7.4757	1.0622	2.143	1.3855

观察以上对比曲线, 可知, 在跨中, 即  $l/2$  处, 曲线拟和很好, 而在初始与最后离桥时段, 产生一定的识别误差. 尤其在识别力的最后时段, 即移动荷载离开简支梁模型时, 数值发生了奇异, 这是简支梁模型由强迫振动突变为自由振动引起的, 可通过规则化方法修正.

改变积分步长, 分别取  $\tau = 0.05$  与  $\tau = 0.001$  进行计算, 同样得 SPIM 识别精度基本不受步长变化的影响. 因此辛精细积分方法在移动荷载识别方向, 不仅识别精度高, 而且稳定性好, 识别精度基本不受步长变化的影响. 因此通过增大步长, 可以缩短计算时间, 有效地改善仿真的速度. 本算例表明

辛精细积分方法在移动荷载识别方向是一种全新的算法,不仅具有高精度性,而且具有长期稳定性.

(2)非周期载荷:分别取线性变化荷载 $f(t) = 10 \times t + 6$ 与二次变化荷载 $f(t) = 3 \times t^2 + 5 \times t + 7$ ,利用用样的方法进行仿真识别,得本文方法识别的荷载与真实荷载的误差曲线如图5所示,可见当外力为非周期荷载时,识别精度亦可以接受.

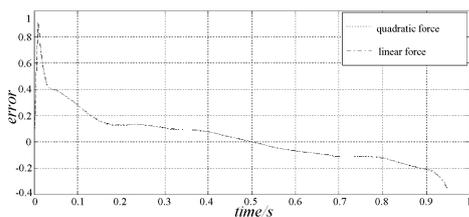


图5 两种非周期荷载识别误差比较

Fig.5 The identified error comparison between two nonperiodic force

## 6 结论

(1)将精细积分思想引入到辛几何中,利用有理 Padé 逼近,形成辛精细积分方法(SPIM),与传统的方法(Runge-Kutta方法)相比,计算精度有大幅度的提高,且具有辛算法的长期稳定特性,计算结果不受积分步长的影响.通过对高低频混合系统的仿真验证了这一特性.

(2)有效地将桥梁结构振动微分方程转化为哈密尔顿正则方程形式,并将辛精细积分算法应用到桥梁结构移动荷载识别研究中.与精细积分方法(PIM)相比,无论对周期还是非周期变化荷载的识别,辛精细积分方法不仅识别精度高,而且继承了辛算法的保结构特性,识别结果基本不受积分步长的影响,具有长期稳定性.通过仿真算例与误差比较验证了这一特性.

(3)从另一角度思考问题,改变传统的基于经典牛顿力学的荷载识别方法,提出一套荷载识别的新的理论体系.有望改变荷载识别精度低,长期稳定性差的缺点,并将荷载识别这一结构动力学逆问题形成一个基于哈密尔顿系统的完整的理论体系进行研究.

## 参 考 文 献

- 1 冯康,秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法. 浙江:科学技术出版社,2003 (Feng Kang, Qin Mengzhao. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems. Zhejiang: Science and Technology Press, 2003 (in Chinese))
- 2 钟万勰,欧阳华江,邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连:大连理工大学出版社,1993 (Zhong Wanxie, Ouyang Huajiang, Deng Zichen. Computational Structural Mechanics and Optimal Control. Dalian: Dalian University Press, 1993 (in Chinese))
- 3 张素英,邓子辰. 非线性动力学方程的四阶近似几何积分的特性与计算. 动力学与控制学报,2004, 2(1): 21 ~ 27 (Zhang Suying, Deng Zichen. Property and computation of a fourth-order geometric integration for nonlinear dynamic equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 21 ~ 27 (in Chinese))
- 4 鲍四元,邓子辰. 哈密顿体系下矩形薄板自由振动的一般解. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 10 ~ 16 (Bao Siyuan, Deng Zichen. A general solution of free vibration for rectangular thin plates in Hamilton systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 10 ~ 16 (in Chinese))
- 5 张素英,邓子辰. 非线性动力学方程的李级数解法及其应用. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 13 ~ 20 (Zhang Suying, Deng Zichen. Lie series solution of nonlinear dynamic equations and it's application. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 13 ~ 20 (in Chinese))
- 6 钟万勰. 分析结构力学与有限元. 动力学与控制学报, 2004, 2(4): 1 ~ 8 (Zhong Wanxie. Analytical structural mechanics and finite element. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 1 ~ 8 (in Chinese))
- 7 钟万勰,吴志刚,高强. 广义卡尔曼-布西滤波算法识别系统参数. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 1 ~ 7 (Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Gao Qiang. System parameter identification with an extended kalman-bucy filtering algorithm. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 1 ~ 7 (in Chinese))

- 8 Yong-an Huang, Zichen Deng, Linxiao Yao. An improved symplectic precise integration method for analysis of the rotating rigid-flexible coupled system. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299(1-2): 229 ~ 246
- 9 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京: 高等教育出版社, 2005 (Zhong Wanxie. Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics. Beijing: Higher Education Press, 2005 (in Chinese))
- 10 徐倩, 文祥荣, 孙守光. 结构动态载荷识别的精细逐步积分法. 计算力学学报, 2002, 19(1): 56 ~ 60 (Xu qian, Wen Xiangrong, Sun Shouguang. High precision direct integration scheme for structural dynamic load identification. *Journal of Computational Mechanics*, 2002, 19(1): 56 ~ 60 (in Chinese))
- 11 张亚辉, 张守云, 赵岩, 宋刚, 林家浩. 桥梁受移动荷载动力响应的一种精细积分法. 计算力学学报, 2006, 23(3): 36 ~ 40 (Zhang Yahui, Zhang Shouyun, Zhao Yan, Song Gang, Lin Jiahao. A precise integration method for bridges subjected to moving loads. *Journal of Computational Mechanics*, 2006, 23(3): 36 ~ 40 (in Chinese))

## AN IMPROVED SYMPLECTIC PRECISE INTEGRATION METHOD FOR MOVING LOAD IDENTIFICATION OF BRIDGE STRUCTURE \*

Hou Xiuhui<sup>1</sup> Deng Zichen<sup>1,2</sup> Huang Lixin<sup>1</sup>

(1. School of Mechanics, Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract** Firstly, the generalized Hamilton's principle was used to establish a model for bridge structure, which was discretized and transferred into Hamiltonian system to get the canonical equations. Secondly, the idea of PIM (precise integration method) was introduced into the Symplectic geometric algorithm to establish a Symplectic PIM (SPIM). This new algorithm was then applied to deal with moving force identification for bridge structure, from which the vibration equation was sine/cosine transformed to get the SPIM format. Compared with Runge-Kutta method and the PIM format for load identification, two numerical results display the long-term stability properties and the high precision of the SPIM, whose results could not be affected by the time-step. As a result, the time-step can be enlarged to speed up the computation.

**Key words** load identification, bridge structure, Hamiltonian system, symplectic precise integration, moving load, Runge-Kutta method, precise integration method

Received 16 April 2007, revised 31 May 2007.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572119 和 10632030), Program for New Century Excellent Talents of Education Ministry of China (NCET-04-0958), Open Foundation of State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment of Dalian University of Technology and Graduate starting seed fund of Northwestern Polytechnical University (Z200730)