第 6 卷第 1 期 2008 年 3 月
1672-6553/2008/06(1)/045-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 1
Mar. 2008

# 受两个频率激励和皮带驱动的具有干摩擦的振子的动力学分析*

李志从　王琪

（北京航空航天大学理学院，北京　100083）

**摘要**　一个可调节速度的皮带驱动的干摩擦振子系统，设其干摩擦力大小是常值且两个激励频率是谐调的，本文对这个简单的力学模型进行了研究，分析了 Filippov 系统中可能出现的四种余维 - 1 sliding 分岔并给出数值模拟. 分析表明：该系统具有极其丰富的 sliding 分叉现象，较小的激励频率易引起非光滑分岔现象.

**关键词**　非光滑系统，　余维 - 1 sliding 分岔，　Filippov 系统

## 引 言

近几年来，非光滑动力系统由于其复杂的动力学现象和特性不能通过光滑动力系统的古典理论加以解释而被广泛研究. Leine 根据不连续状态，不连续的向量场及向量场的不连续的导数对非光滑动力系统进行了一个详细的划分. 由不连续的向量场描述的系统称为 Filippov 系统（如带干摩擦或者粘弹性支撑的系统）. 当非光滑系统的一个极限环同一个同时从两边吸引的切换流形的一段区域相交时，此类系统会出现 sliding 运动. 文献中研究了 Filippov 系统的一些数值算法.

在文献中，作者第一次提出了在 Filippov 系统中存在的四种可能的 sliding 分岔. 在文献中作者给出了他们的解析条件. 无论如何，同时能出现这四种余维 - 1 slidng 分岔现象的例子还很少.

在本文中，研究了受两个频率激励和皮带驱动的一个干摩擦振子的动力学特性，通过数值仿真发现在该系统中存在这四种余维 - 1 的 sliding 分岔现象.

## 1　力学模型

振子系统如图 1 所示. 一个物块通过一个粘弹性元件与一个支架相连，并可在一个速度可以连续控制的驱动皮带上运动. 物块与皮带间存在干摩擦，物块由 Voigt 模型描述. 另外，外激励通过弹性元件作用在系统上.

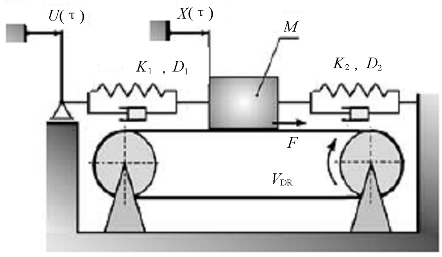


图 1　干摩擦振子模型

Fig. 1　The model of a dry friction oscillator

其中：

$M$：物块质量［kg］；$\tau$：时间［s］；

$X$：物块坐标，其原点在平衡点处［m］；

$X'$：$\dfrac{dX}{dt}$；$U_1, U_2$：外激励的振幅［m］；

$\Omega_1, \Omega_2$：外激励的频率［rad/s］；

$F$：物块与皮带间的摩擦力［N］；

$D_1$：内部粘性阻尼［Ns/m］；

$D_2$：外部粘性阻尼［Ns/m］；

$K_1$：内部刚度系数［N/m］；

$K_2$：外部刚度系数［N/m］；

$V_{DR}$：皮带速度［m/s］；

$m, t, x, \dot{x}, f, d_1, k_1, k_2, v_{dr}$：上述各量相应的无量纲表达.

外部激励由两个谐频激励组成：

$$U(\tau) = U_1\sin(\Omega_1\tau) + U_2\sin(\Omega_2\tau) \tag{1}$$

设系统处于平衡状态，指的是两弹簧的力大小为零处，则系统的动力学方程为

2007-05-30 收到第 1 稿，2007-09-20 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目（10672007）

$$MX'' + (D_1 + D_2)X' + (K_1 + K_2)X = -F\mathrm{sing}(X' - V_{DR}) + K_1(U_1\sin\Omega_1\tau + U_2\sin\Omega_2\tau) + D_1(U_1\Omega_1\cos\Omega_1\tau + U_2\Omega_2\cos\Omega_2\tau) \quad (2)$$

为了突出外激励 $U(t)$ 的影响,设 $K_2 \ll K_1$. 定义

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M}}, t = \omega_0\tau, d_1 = \frac{D_1}{M\omega_0}, d_2 = \frac{D_2}{M\omega_0},$$

$$u_1 = \frac{U_1}{M\omega_0^2}, u_2 = \frac{U_2}{M\omega_0^2}, v_{dr} = \frac{V_{DR}}{\omega_0},$$

$$f = \frac{F}{K_1 + K_2}, \omega_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_0}, \omega_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_0} \quad (3)$$

则无量纲方程可以写为:

$$\ddot{x} + (d_1 + d_2)\dot{x} + x \in u_1\sin\omega_1\tau + u_2\sin\omega_2\tau + d_1(u_1\omega_1\cos\omega_1\tau + u_2\omega_2\cos\omega_2\tau) - f\mathrm{Sign}(\dot{x} - v_{dr}) \quad (4)$$

其中 $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{dt}$.

$$Sign(y) = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ \in [-1, 1], & y = 0; \quad y \in R \\ -1, & y < 0 \end{cases} \quad (5)$$

假设两个外激励的频率是谐调的, 即

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \upsilon = \frac{M}{N} \quad (6)$$

其中 $M$ 和 $N$ 是不可约的整数且 $f$ 大小是常值.

## 2 动力性分析

### 2.1 Slip 和 Stick 运动的解

假设 $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2 = 0$,可以得到 Slip 运动和 Stick 运动的解析解. 设初始条件为

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_0$$

在 Slip 运动阶段,系统的解是

$$x(t) = \mp f + \frac{u_1}{1-\omega_1^2}\sin\omega_1(t - t_0) + \frac{u_2}{1-\omega_2^2}\sin\omega_2(t - t_0) + \gamma_1\cos(t - t_0) + \gamma_2\sin(t - t_0) \quad (7)$$

其中:

$$\gamma_1 = x_0 \pm f$$

$$\gamma_2 = \dot{x}(t_0) - \frac{u_1\omega_1}{1 - \omega_1^2} - \frac{u_2\omega_2}{1 - \omega_2^2} \quad (8)$$

注意 *Eq.* (8) 中"$\mp$"和 *Eq.* (9) 中"$\pm$"的上部和下部分别对应于 $\dot{x} > v_{dr}$ 和 $\dot{x} < v_{dr}$ 的情况.

在 Stick 运动阶段,运动方程是

$$x(t) = x_0 + v_{dr}(t - t_0) \quad (9)$$

并且一种运动的末状态做为另一种状态的初值. 从 Slip 运动到 Stick 运动的转换由下式决定:

$$v_{dr} = \frac{u_1}{1-\omega_1^2}\cos\omega_1 t + \frac{u_2}{1-\omega_2^2}\sin\omega_2 t - \gamma_1\sin t + \gamma_2\cos t. \quad (10)$$

而由 Stick 运动到 Slip 运动的转换由下式决定:

$$f = | -x_0 - v_{dr}(t - t_0) + u_1\sin\omega_1 t + u_2\sin\omega_2 t| \quad (11)$$

无论如何,要得到系统的显式解比较困难,甚至大多数情况下是不可能的. 为了揭示其动力学行为, 我们给出了系统的数值模拟.

### 2.2 Filippov 系统的 sliding 分岔

文献[8]中, 作者根据一个周期轨与切换区域的边界相交引入了 4 种可能的 sliding 分岔. 图 2 给出了一个 3 维空间的表示, 注意图中只绘出了与 sliding 区域相交的一部分轨迹.

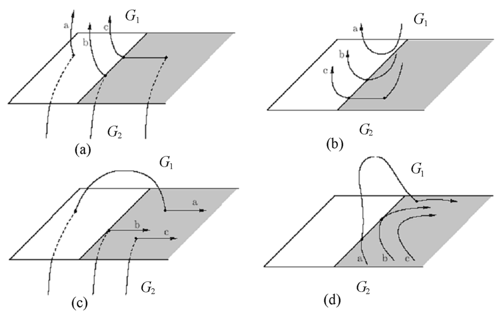

图 2 四种可能的余维-1 sliding 分岔:(a)crossing-sliding 分岔;(b)grazing-sliding 分岔;(c)switching-sliding 分岔;(d)adding-sliding 分岔

Fig. 2 The four possible codimension-one bifurcation scenarios: (a)crossing-sliding;(b)grazing-sliding;(c)switching-sliding;(d)adding-sliding

## 3 数值模拟

假设 $d_1 = d_2 = 0.05, f = 0.5, u_1 = 0.3, u_2 = 0.2$ 取不同的 $\omega_1, \upsilon$ 或者 $v_{dr}$ 我们给出了 Eq. (4) 的一些数值结果.

固定 $v = 2:3, v_{dr} = 0.9$, 图 3 – 8 描述了不同的激励下系统的相图. 所有的运动是周期的且系统在 $\omega_1 = 1.26$ 时从周期 – 3 的运动变为周期 – 2 的运动.

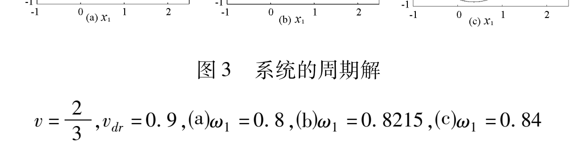

图 3 系统的周期解

$v = \frac{2}{3}, v_{dr} = 0.9$, (a)$\omega_1 = 0.8$, (b)$\omega_1 = 0.8215$, (c)$\omega_1 = 0.84$

Fig. 3 Different periodic solutions of the system with

$v = \frac{2}{3}, v_{dr} = 0.9$, (a)$\omega_1 = 0.8$, (b)$\omega_1 = 0.8215$, (c)$\omega_1 = 0.84$

图 3 描述了上节中定义 grazing – sliding 分岔(图 2 ($b$)). 在此, 对小的激励频率,物块的速度没有达到皮带的驱动速度(图 3($a$)), 即物块一直在皮带上滑动. 随着参数的变化,在 $\omega_{=}0.8215$ 处系统的一部分轨迹开始与 sliding 区域接触, 从而出现了 grazing – sliding 分岔. 参数的进一步变化, 导致了 stick 运动的发生, 即物块在一段时间内粘在皮带上(图 3($c$)).

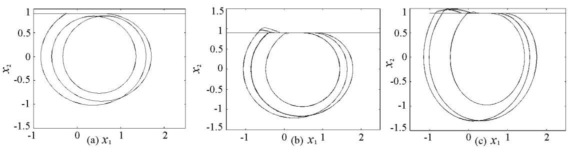

图 4　系统的周期解

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=0.85$, (b)$\omega_1=0.877$, (c)$\omega_1=0.92$

Fig. 4　Different periodic solutions of the system with

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=0.85$, (b)$\omega_1=0.877$, (c)$\omega_1=0.92$

图 4 描述了另一种分岔 switching – sliding 分岔. 一段轨迹横断穿过 sliding 区域的边界,以高于皮带的速度运动片刻后,又回到 sliding 区域内(图 4.(b)). 而且,从图 4 中也可以看出,两个小环的振幅随着 $\omega_1$ 的增大渐渐变大,从而出现了 grazing – sliding 分岔. 更有趣的是,两个较大的环都经历了 switching – sliding 分岔且两个环都能进入到 sliding 区域,出现 stick 运动(图 4(c)).

从图 5 中可以看出其中一个环的振幅开始减小, 最终周期 –3 运动在 $\omega_1=1.26$ 时被周期 –2 运动代替(图 5($b$)). 并且, 较小的极限环发生了 grazing – sliding 分岔(图 5(c)).

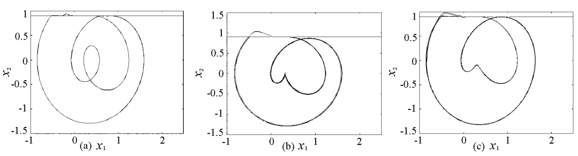

图 5　系统的周期解

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.18$, (b)$\omega_1=1.26$, (c)$\omega_1=1.278$

Fig. 5　Different periodic solutions of the system with

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.18$, (b)$\omega_1=1.26$, (c)$\omega_1=1.278$

正如图 5(c)和图 6(a)所示, 随着 $\omega_1$ 的增大较小的极限环环进入 sliding 区域的位置向左移动, 即振幅逐渐增大(图 6(b)), 并发生了 switching – sliding 分岔(图 6(c)).

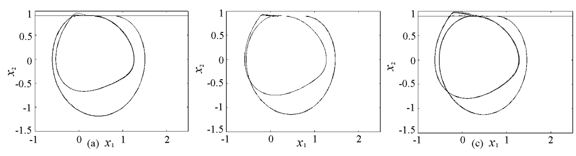

图 6　系统的周期解

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.412$, (b)$\omega_1=1.427$, (c)$\omega_1=1.437$

Fig. 6　Different periodic solutions of the system with

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.412$, (b)$\omega_1=1.427$, (c)$\omega_1=1.437$

比较图 6(c)和图 7(a), 较大环的振幅开始减小, 并且经历了 grazing – slidng 分岔. 从图 7(b)和(c)看到系统发生了 switching – sliding 分岔.

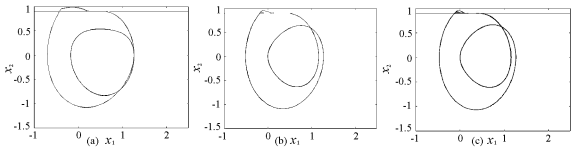

图 7　系统的周期解

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.52$, (b)$\omega_1=1.622$, (c)$\omega_1=1.641$

Fig. 7　Different periodic solutions of the system with

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.52$, (b)$\omega_1=1.622$, (c)$\omega_1=1.641$

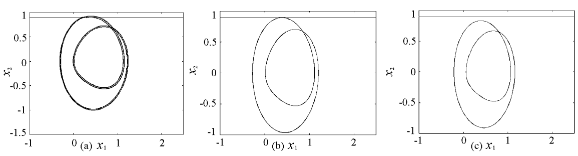

图 8　系统的周期解

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.7$, (b)$\omega_1=1.71$, (c)$\omega_1=1.73$

Fig. 8　Different periodic solutions of the system with

$v=\frac{2}{3}, v_{dr}=0.9$, (a)$\omega_1=1.7$, (b)$\omega_1=1.71$, (c)$\omega_1=1.73$

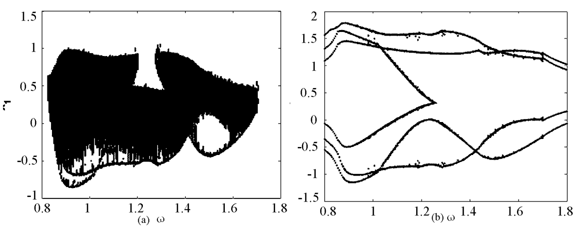

图 9　视 $\omega_1$ 为参数物块坐标 $x_1$ 的分岔图

(a)沿 Pioncare 截面 $x_2=v_{dr}=0.9$, (b)沿 Pioncare 截面 $x_2=0$

Fig. 9　(a) The mass displacement $x_1$ versus $\omega_1$ along Pioncare section $x_2=v_{dr}=0.9$,

(b) The mass displacement $x_1$ versus $\omega_1$ along Pioncare section $x_2=0$

图 8 描绘了 crossing – sliding 分岔的现象. 数值模拟揭示了如果 $\omega_1>1.709$,物块的最大速度不会超过皮带的驱动速度(图 8(c)).

固定 $v=\frac{2}{3}$，视外激励频率为参数，图 9(a) 给出了物块位移 $x_1$ 沿 Pioncare 截面 $x_2=v_{dr}=0.9$ 的分岔图. 为了便于分析振子的分岔特性，图 9(b) 给出了其沿 Pioncare 截面 $x_2=0$ 的分岔图.

图 10(a) 和 (b) 绘出了取 $\omega_1=0.8$，$v$ 为参数，$x_1$ 沿不同的 Pioncare 截面的分岔图. 结合图 11 我们看到振子的所有运动都是周期的(图. 11(c,f,g,i))或准周期的(图. 11(a,b,d,e,h))，这取决于不同的 $v$. 如果 $v<0.84$ 或者 $v>1.88$，物块的速度小于皮带的速度并且没有 stick 运动.

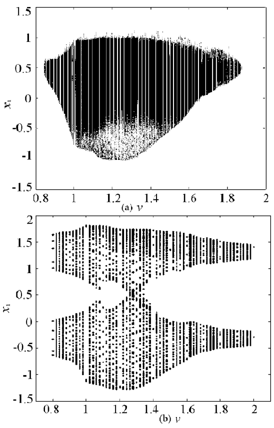


图 10 视 $v$ 为参数物块坐标 $x_1$ 的分岔图

(a) 沿 Pioncare 截面 $x_2=v_{dr}=0.9$，(b) 沿 Pioncare 截面 $x_2=0$

Fig. 10 (a) The mass displacement $x_1$ versus $v$ along Pioncare section $x_2=v_{dr}=0.9$, (b) The mass displacement $x_1$ versus $v$ along Pioncare section $x_2=0$

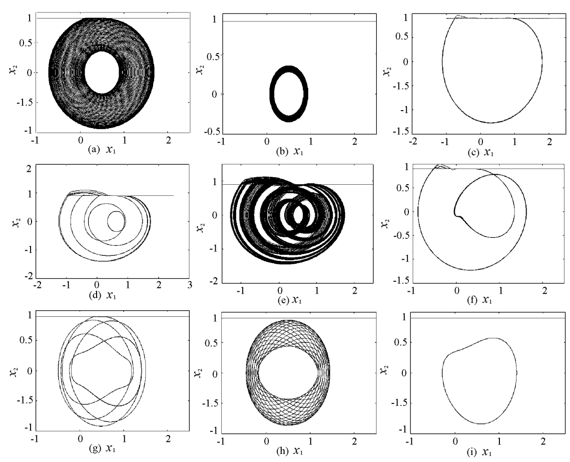

图 11 系统的周期解 $\omega_1=0.8$，$v_{dr}=0.9$，

$(a)v=0.899$，$(b)v=0.998$，$(c)v=1$，$(d)v=1.2$，$(e)v=1.222$，$(f)v=1.5$，$(g)v=1.8$，$(h)v=1.95$，$(i)v=2$

Fig. 11 Different periodic solutions of the system with $\omega_1=0.8$, $v_{dr}=0.9$, (a) v = 0.899, (b) v = 0.998, (c) v = 1, (d) v = 1.2, (e) v = 1.222, (f) v = 1.5, (g) v = 1.8, (h) v = 1.95, (i) v = 2

取 $v=1.5$，$v_{dr}=0.1$，图. 12 绘出了视 $\omega_1$ 为参数的 adding – sliding 分岔. 此分岔现象与其他三种分岔现象不同之处在于此分岔是发生在 stick 运动过程中的.

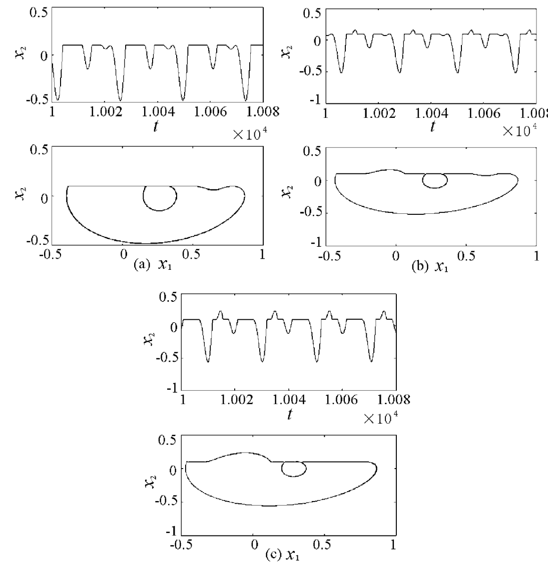

图 12 系统的周期解 $v=1.5$，$v_{dr}=0.1$，

$(a)\omega_1=0.53$，$(b)\omega_1=0.57$，$(c)\omega_1=0.62$

Fig. 12 Different periodic solutions of the system with $v=1.5$, $v_{dr}=0.1$, $(a)\omega_1=0.53$, $(b)\omega_1=0.57$, $(c)\omega_1=0.62$

## 4 结论

从上面的分析可以看出如此简单的干摩擦振子系统却有如此丰富的非光滑余维 – 1 sliding 分岔现象，包括 grazing – sliding 分岔，switching – sliding 分岔，crossing – sliding 分岔和 adding – sliding 分岔. 关于此类问题的分岔分析，既可以通过理论分析，也可以通过数值仿真找到其分岔点，而且数值分析可以更详细地分析其动力学行为(如可以清楚地看到系统的周期性变化). 为了系统的稳定，实际应用中应该考虑这些非光滑分岔现象. 如对此系统来说，尽量取较大的激励频率和适当的频率谐调比.

## 参 考 文 献

1 Leine R I, Van Campen D H, Van De Vrande B L. Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonliear Dynamics*, 2000, (23): 105 ~ 164

2 Van De Vrande B L, Van Campen D H, De Kraker A. An approximate analysis of dry – friction – induced stick – slip

vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics*, 1999 (19) :157 ~ 169

3 Cheng G, Zu J W. Dynamics of a dry friction oscillator under two – frequency excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, (275) :591 ~ 603

4 Di Bernardo M, Kowalczyk P, Nordmark A. Sliding bifurcations: a novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry – friction oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13(10) :2935 ~ 2948

5 Leine R I, Van Campen D H, Kraker A De. Stick – slip vibrations Induced by alternate friction models. *Nonlinear Dynamics*, 1998(16) :41 ~ 54

6 Bogacz R, Ryczek B. Frictional phenomena in dynamical system with two – frequency excitation. *Meccanica*, 2003 (38) :711 ~ 717

7 Galvanetto U. Some discontinuous bifurcations in a two block stick – slip system. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 284(4) :53 ~ 669

8 Galvanetto U. Sliding bifurcations in the dynamics of mechanical systems with dry friction – remarks for engineers and applied scientists. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, (276) :121 ~ 139

9 Kowalczyk P. Di Bernardo M. Two – parameter degenerate sliding bifurcations in Filippov systems. *Physica D*, 2005 (204) :204 ~ 209

10 Kowalczyk P, Di Bernardo M, Champneys A R, Hogan S J, Homer M, Piiroinen P T. Two – parameter discontinuity – induced bifurcations of limit cycles: classification and open problems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16 (3):601 ~ 629

# DYNAMICAL ANALYSIS OF A DRY FRICTION OSCILLATOR WITH TWO-FREQUENCY EXCITATION AND BELT DRIVING *

Li Zhicong, Wang Qi

(*School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083, *China*)

**Abstract** A dry friction oscillator driven by a moving belt, whose velocity could be continuously controlled, was investigated under the assumption that the dry friction force was constant and the excitation frequencies were harmonic. And the codimension – 1 sliding bifurcation of Filippov system was analyzed and numerically simulated. The numerical simulation reveals that there are abundant bifurcation phenomena, and that smaller excitation frequencies tend to cause non – smooth sliding bifurcation in the dry friction oscillator system.

**Key words** non-smooth system, codimension-1 sliding bifurcation, Filippov system

Received 30 May 2007, revised 20 September 2007.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10672007)