

# 旋转运动柔性梁的压电质量和刚度效应\*

滕悠优 蔡国平

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

**摘要** 对旋转运动柔性梁的压电质量效应和刚度效应进行了研究,给出了基于经典层板理论的压电层合结构的等效抗弯刚度. 研究中考虑了大范围运动已知和未知两种情况. 仿真结果显示,当压电长度很短时,压电材料对系统动力特性的影响不大,可以忽略不计;当压电长度较长且小于梁长度的一半时,压电刚度对系统特性有着较大影响,而压电质量的影响较小;当压电长度大于梁长度的一半时,压电质量对系统特性有着较大影响,而压电刚度的影响较小.

**关键词** 旋转运动柔性梁, 压电, 质量效应, 刚度效应

## 引言

随着材料科学的进步,以压电陶瓷、电(磁)流变液和形状记忆合金为代表的智能材料在振动工程中的应用日益广泛,而压电材料以其优异的机电耦合性能、响应速度快、易于和结构集成等优点广泛应用于振动主动控制. 层状压电智能结构元件是振动控制中经常采用的结构形式,其中压电材料可通过粘贴或埋入等形式与基体结为一体. 压电材料用作作动器时,在外加控制电压作用下将产生相应的伸缩变形以抵消外部激励引起的形变,从而达到对结构进行主动控制的目的.

旋转运动柔性梁的结构模型在实际中有着许多工程背景,如柔性机械臂、直升机旋翼等. 因为压电作动器可与基体结为一体,因此非常适合于存在大范围运动的柔性构件的振动控制. 然而对于微小尺寸的柔性构件,如 MEMS 中的微尺度机械臂,压电材料的引入会引起附加质量效应和附加刚度效应,影响系统的动力特性. 因此有必要系统地研究压电材料的附加质量和刚度对系统动力特性的影响.

本文对旋转运动柔性梁的压电质量效应和刚度效应进行研究. 首先基于经典层板理论推导压电层合结构的等效抗弯刚度;然后考虑压电材料的质量效应和刚度效应,基于有限元离散方法和一次近似模型进行数值仿真,揭示压电材料对旋转运动柔性梁动力学特性的影响.

## 1 考虑压电作动器的系统建模

旋转运动柔性梁的一次近似动力学方程可以参考文献[1,2],本文限于篇幅,在此不进行罗列,重点给出压电层合结构的等效抗弯刚度的推导方法和等效质量的处理方法.

压电效应反映了压电材料弹性与介电性之间的耦合,也反映了机械能和电能之间的转换. 在此先定义压电陶瓷的习惯坐标轴取向:定义极化方向为  $z$  轴或 3 方向的正向,然后按右手手法则定义垂直于  $z$  轴的两个坐标轴分别为  $x$  轴或 1 方向、 $y$  轴或 2 方向,如图 1 所示.

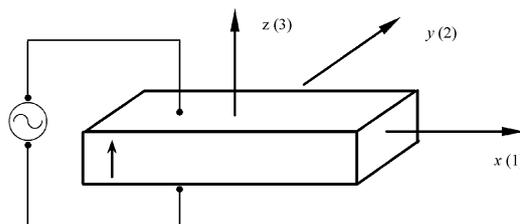


图1 压电材料坐标表示示意图

Fig. 1 Coordinate sketch of PZT material

以往的多数研究中,通常忽略压电材料的质量效应和刚度效应,而只考虑它对基体梁的作动效应,将压电作动器对基体梁的作用等效为一个集中力矩,用 Heaviside 函数表示为<sup>[3]</sup>:

$$M = (E_b I_b) \frac{12s_1}{t_b(6+C)} [h(x-x_1) - h(x-x_2)] \quad (1)$$

2007-06-27 收到第1稿,2008-01-22 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(10472065, 10772112)和教育部重点项目(107043)资助项目

式中,  $E$  为弹性模量,  $I$  为惯性矩,  $s_1 = d_{31} U/t_p$ ,  $C = (E_b t_b)/E_p t_p$ , 下标  $b$  和  $p$  分别表示基体和压电层,  $x_1$ 、 $x_2$  如图 2 所示,  $h(x)$  为 Heaviside 函数, 其表达式为:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

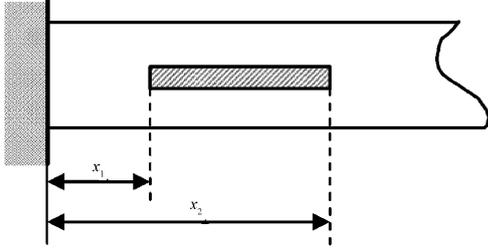


图 2 压电作动器位置示意图

Fig. 2 Position of PZT actuator on the beam

为了揭示粘贴于柔性梁表面的压电材料对系统动力学特性的影响, 在建模时须考虑压电层的质量效应和刚度效应. 假设压电作动器与柔性梁等宽, 并在梁两侧表面均贴有压电作动器, 在有限元建模时将贴有压电材料的部分作为一个单元. 贴有压电材料的单元如图 3 所示, 基体梁的厚度为  $h$ , 宽度为  $b$ , 压电层厚度为  $t$ , 并在梁两侧各粘贴一片.

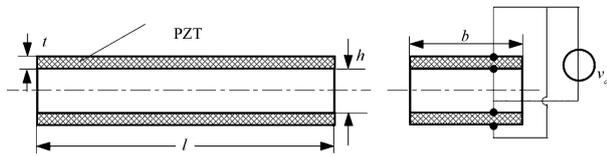


图 3 考虑压电层的单元模型

Fig. 3 Element model with PZT

压电层合结构与一般的层合结构并无本质区别, 只需要将压电层作为一种横观各向同性铺层对待即可. 由于层合板的层间剪切刚度甚小, 横向剪切变形的影响不容忽视, 且在分析梁的高阶振型时, 也需要考虑剪切变形的影响. 一阶剪切变形理论可计入横向剪切变形的影响, 计算量小而又不失精度, 因此这里采用一阶横向剪切变形理论推导压电层合梁的等效抗弯刚度.

一阶剪切变形理论放弃了不计横向剪切变形的直法线假设 (Kirchhoff - Love 假设), 而代之以瑞斯纳的直线假设, 即: 变形前垂直于中面的直线变形后仍为直线, 但不垂直于变形后的中面. 设变形前垂直于中面的直线, 变形时在  $xz$  和  $yz$  平面内的转角分别为  $\phi_x$  和  $\phi_y$ , 那么任意点的位移表示为:

$$u = u^0(x, y) - z\phi_x(x, y)$$

$$v = v^0(x, y) - z\phi_y(x, y)$$

$$w = w(x, y) \quad (3)$$

式中,  $u^0$ 、 $v^0$  和  $w$  分别为中面上某点在  $x$ 、 $y$  和  $z$  向的位移, 式(3)含有五个广义位移  $u^0$ 、 $v^0$ 、 $w$ 、 $\phi_x$  和  $\phi_y$ , 由式(3)容易得到如下所示应变关系:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}$$

$$\chi_x = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \chi_y = -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \quad \gamma_{zx}^0 = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \quad (5)$$

层合板的每个叠层有以下的应力-应变关系<sup>[4,5]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中,  $\bar{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$ ) 是经过坐标转换后的偏轴刚度系数, 将式(6)沿层合板厚度积分, 有:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{zx}^0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中,  $M_x$ 、 $M_y$  和  $M_{xy}$  分别为单位宽度的弯矩和扭矩;  $Q_y$  和  $Q_x$  为单位宽度的剪力;  $A_{ij}$  ( $i, j = 4, 5$ ) 为横向剪切刚度;  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 为拉弯耦合刚度;  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 为弯曲刚度; 分别表示为:

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \quad (8)$$

$$(Q_y, Q_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{yz}, \tau_{zx}) dz \quad (9)$$

$$(B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(z, z^2) dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (10)$$

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \quad (11)$$

对于对称层合板有  $B_{ij} = 0$ , 这样使得层合板的分析大为简化. 考虑到层合梁是一维构件, 引入近似条件:

$$M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \quad (12)$$

这样式(7)可简化为:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中,  $\bar{D}_{11}$  和  $\bar{A}_{55}$  分别为单位宽度的等效抗弯刚度和等效横向剪切刚度, 且有:

$$\bar{D}_{11} = D_{11} + \frac{D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}}{D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26}}D_{12} + \frac{D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}}{D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26}}D_{16} \quad (14)$$

$$\bar{A}_{55} = A_{55} - \frac{A_{45}A_{45}}{A_{44}} \quad (15)$$

因此对贴有压电材料的单元只考虑其等效抗弯刚度, 如下式所示:

$$EI = b \bar{D}_{11} \quad (16)$$

本文仿真中考虑压电材料的两种效应: 刚度效应和质量效应. 在系统的动力学方程中,  $EI$  用这里的  $b \bar{D}_{11}$  来取代, 也就是考虑了压电材料的刚度效应. 对于压电材料的质量效应, 做如下处理: 贴有压电的单元上, 其中的  $\rho A$  用  $\bar{\rho A}$  取代,  $\bar{\rho A}$  为单元的平均线密度. 如柔性梁的厚度为  $h$ , 宽度为  $b$ , 密度为  $\rho_1$ , 压电层厚度为  $t$ , 密度为  $\rho_2$ , 则  $\bar{\rho A}$  的具体表达如下式所示<sup>[5]</sup>:

$$\bar{\rho A} = \frac{\rho_1 h + 2\rho_2 t}{h + 2t} b \quad (17)$$

## 2 动力学仿真

首先考虑系统大范围运动已知时的情况, 该情况即为非惯性系下的动力学问题. 柔性梁结构参数为: 长度  $L = 0.9\text{m}$ , 横截面积  $A = 1.2 \times 10^{-4}\text{m}^2$ , 截面惯性矩  $I = 4 \times 10^{-11}\text{m}^4$ , 体积密度  $\rho = 2.767 \times 10^3\text{kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 69\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.32$ . 压电材料

结构参数为: 厚度  $0.5\text{mm}$ , 密度  $\rho = 7.6 \times 10^3\text{kg/m}^3$ , 轴向弹性模量  $E = 63\text{GPa}$ , 轴向弹性模量  $E = 54\text{GPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.35$ . 柔性梁固定端的中心刚体半径取为  $r_A = 0.05\text{m}$ . 系统大范围运动规律取为:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\omega_0}{T}t - \frac{\omega_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{T}t), & 0 \leq t \leq T \\ \omega_0, & t > T \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $T = 10\text{s}$ ,  $\omega_0 = 4\text{rad/s}$ . 系统在  $t < 10\text{s}$  区间加速旋转, 并且在  $T = 10\text{s}$  时达到角速度  $\omega_0$ , 然后系统以  $\omega_0$  为角速度进行恒速旋转运动. 柔性梁在  $t > 10\text{s}$  后的振动呈现出一种有规律的简谐振动形式.

假设压电的一端固定在柔性梁的根部, 改变其长度, 令压电材料的长度为  $L_1$ , 梁长度为  $L_2$ , 考虑不同  $L_1/L_2$  比值情况下, 柔性梁的频率特性. 首先采用一次近似模型进行仿真, 柔性梁的响应频率随压电材料长度的变化规律如图 4 所示. 可看出, 当压电长度很短时, 压电材料的存在对响应频率的影响很小, 而随着压电材料长度的增加, 其影响逐渐增大. 当  $L_1/L_2 < 0.4$  时, 压电材料的质量效应对系统频率的影响很小; 而当  $L_1/L_2 > 0.5$  时, 压电材料的质量效应开始逐渐占据主导地位, 使得系统的频率开始呈现出随压电长度增长而递减的趋势, 此时如果忽略压电材料的质量效应将会导致较大误差, 甚至得到错误的结果.

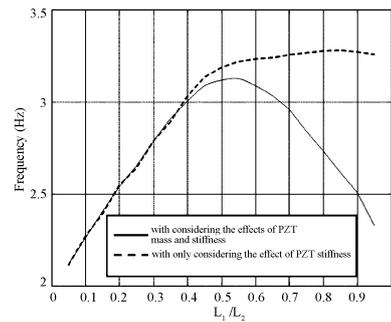


图 4 频率随压电长度变化

Fig. 4 Frequency changing along with the length of PZT

然后考虑刚柔耦合动力学问题, 即系统的大范围运动是未知的和需要进行求解的, 已知的是作用在中心刚体上的外力矩, 此时柔性梁的弹性振动和系统的大范围运动相互耦合. 梁和压电材料参数与上相同. 作用在中心刚体上的驱动力矩规律取为:

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $T = 2s$ ,  $\tau_0 = 0.2Nm$ . 仿真结果与非惯性系下的仿真结果类似, 当压电材料长度较短时, 压电材料的刚度效应占主导作用; 而当压电材料较长时, 其质量效应占主导地位, 如下图 5 所示.

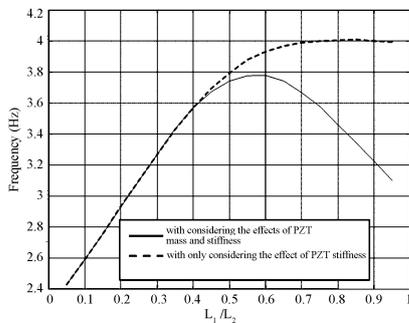


图 5 频率随压电长度变化

Fig. 5 Frequency changing along with the length of PZT

### 3 结论

本文对考虑压电材料影响的旋转运动柔性梁的动力特性进行了研究, 其中分别考虑了压电材料的刚度效应和质量效应, 系统运动形式分别考虑了系统大范围运动已知和未知的两种情况. 通过研究得出以下结论:

(1) 当压电长度很短时, 压电材料对系统动力特性的影响不大, 可以忽略不计.

(2) 当压电长度小于梁长度的一半时, 压电刚度对系统特性有着较大影响, 而压电质量的影响较

小; 当压电长度大于梁长度的一半时, 压电质量对系统特性有着较大影响, 而压电刚度的影响较小.

### 参 考 文 献

- 1 杨辉. 刚-柔耦合动力系统的建模理论与实验研究. 上海交通大学博士学位论文, 2002 (Yang Hui. Modeling and experiment study of rigid-flexible coupling dynamics systems. PhD dissertation in Shanghai Jiaotong University, 2002 (in Chinese))
- 2 蔡国平, 洪嘉振. 非惯性系下的柔性悬臂梁的振动主动控制. 力学学报, 2003, 35(6): 744 ~ 751 (Cai Guoping, Hong Jiazhen. Active vibration control of flexible cantilever beam in non-inertial system. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(6): 744 ~ 751 (in Chinese))
- 3 董兴建. 高速旋转压电柔性梁的动力学分析与控制. 上海交通大学博士学位论文, 2006 (Dong Xingjian. Dynamic analysis and control of a piezoelectric flexible beam rotating at high speed. PhD dissertation in Shanghai Jiaotong University, 2006 (in Chinese))
- 4 周履, 范赋群. 复合材料力学. 北京: 高等教育出版社, 1991 (Zhou Lv, Fan Fuqun. Mechanics of composite material. Beijing: High Education Press, 1991 (in Chinese))
- 5 滕悠优. 柔性机械臂的主动控制及实验研究. 上海交通大学硕士学位论文, 2007 (Teng Youyou. Active control and experiment study of flexible manipulator. Master dissertation in Shanghai Jiaotong University, 2006 (in Chinese))

## EFFECTS OF PZT MASS AND STIFFNESS ON ROTATING FLEXIBLE BEAM\*

Teng Youyou Cai Guoping

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract** The effects of PZT mass and stiffness on rotating flexible beam were studied. Based on the classical plate theory, the equivalent bending stiffness was presented, and the known and unknown large motions of the system were considered in the numerical simulations. Simulation results indicate that, when the length of piezoelectric material is very short, its effect on system dynamics is little and could be ignored; when the length of piezoelectric material is shorter than half length of the flexible beam, the piezoelectric stiffness has the biggest effect on system dynamics, but the piezoelectric inertia has less effect compared with the piezoelectric stiffness; when the length of piezoelectric material is longer than half of the manipulator arm, the piezoelectric inertia has considerable effect on system dynamics, but the effect of piezoelectric stiffness is less.

**Key words** rotating flexible beam, PZT, mass effect, stiffness effect

Received 27 June 2007, revised 22 January 2008.

\* The project supported by the National Science Foundation of China (10472065, 10772112) and the Key Project of ministry of education of China (107043)