第6卷第1期2008年3月
1672-6553/2008/06(1)/012-4

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 1
Mar. 2008

Burgers 方程的精确孤立波解的符号计算

闻小永

(北京信息科技大学理学院数学系,北京 100085)

摘要 借助于符号计算 Maple,给出了一种构造非线性波动方程行波解的直接代数方法,该方法的主要特点是充分利用 Riccati 方程. 使用此方法得到 Burgers 方程的多组精确行波解,其中包括一些新的孤立波解,这种方法也适用于求解其它的非线性波动方程(组).

关键词 Burgers 方程, Riccati 方程, 孤立波解, 符号计算

引 言

求解非线性波动方程的精确解,尤其是孤立子解,长期以来一直是物理学家和数学家研究的重点课题,孤立子解在光纤通信、流体力学、等离子体和一维磁性等物理领域中有着广泛的应用,因此寻找非线性波动方程的孤立子解具有重要的理论和实践意义. 近年来,随着计算机技术的发展,人们提出和发展了许多以计算机符号计算为基础的求解非线性方程精确解的有效方法,如齐次平衡法[1]、双曲正切函数展开法[2-3]、sine-cosine 法[4]、Jacobi 椭圆函数展开法[5]等. 本文借助符号计算 Maple 和 Riccati 方程的解,通过构造一个新的尝试解,得出非线性波方程的多组新的精确孤立波解,作为例子我们将考虑著名的 Burgers 方程,Burgers 方程是物理学和力学中经常出现的重要的非线性波方程之一,其标准形式为:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} = 0 \tag{1}$$

其中 β 为耗散系数. 该方程是是物理和力学中重要的非线性的耗散(热传导、扩散和黏性)方程,首次由 Burgers 于 1948 年得到,并用来描述河道中湍流现象,另外一维冲击波的传播也可用该方程来描述. 关于 Burgers 方程的研究,已取得部分研究成果[6-12],文献[6-7]求得了该方程的孤波解,文献[8-9]得到了该方程的冲击波解,文献[10-12]得到了该方程的一般形式的行波解和奇异行波解. 本文借助符号计算 Maple 和 Riccati 方程的解,通过构造一个新的尝试解,得出该方程的多组新的精确孤立波解,这些解不仅进一步丰富了 Burgers 方程解的结果,而且也为进一步理解和研究该方程所描述的物理现象提供了新的线索和帮助.

1 方法介绍

具体步骤如下:

步骤 1:对于给定的非线性波动方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0 \tag{2}$$

进行行波变换 :

$$u = u(\xi), \xi = k(x - \lambda t) \tag{3}$$

其中 k 是波数,λ 是波速. (2)式化为如下的常微分方程

$$G(u, \frac{du}{d\xi}, \frac{d^2u}{d\xi^2}) = 0 \tag{4}$$

步骤 2:定义 u 的阶数为 n,则通过平衡(4)中的最高阶项和非线性项得到 u 的阶数 n 的值.

步骤 3:设方程(4)中 $u(\xi)$ 可以表示为的 $\varphi(\xi)$ 下列形式新的有限级数解

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(\xi)^{-i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\phi(\xi)^i}{(1 + \mu\phi(\xi) + r\phi(\xi)^2)^i} \tag{5}$$

而 $\phi(\xi)$ 满足 Riccati 方程:

$$\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} = a + b\varphi(\xi)^2 \tag{6}$$

其中 a_i, b_i, μ, r 是待定常数,a, b 是常数.

步骤 4:把(5)式代入方程(4)并利用(6)式,通分令分子为零,约化合并同次幂,得到一个关于 $\varphi(\xi)$ 的一元方程,令 $\varphi^i(\xi)$(i 是整数)的系数为零,得到

2007-04-16 收到第1稿,2007-05-08 收到修改稿.

一个关于 a_i,b_i,k,λ,μ,r 的超定代数方程组,利用 Maple 下解此方程组,得到 a_i,b_i,k,λ,μ,r 的值.

步骤 5:方程(6)的解如下:

(i)当 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 时,

$\varphi(\xi)=\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi),\varphi(\xi)=\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi)$,

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi)},\varphi(\xi)=\frac{1}{\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi)};\tag{7}$$

(ii)当 $a=4,b=-1$ 时,$\varphi(\xi)=\tanh(\xi)+\coth(\xi)$; (8)

(iii)当 $a=1,b=-4$ 时,$\varphi(\xi)=\frac{1}{\tanh(\xi)\pm\coth(\xi)}$; (9)

(iv)当 $a=1,b=-1$ 时,$\varphi(\xi)=\tanh(\xi),\varphi(\xi)\coth(\xi)$ (10)

(v)当 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$ 时,

$\varphi(\xi)=\tan(\xi)\pm\sec(\xi),\varphi(\xi)=-\cot(\xi)\pm\csc(\xi)$,

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\tan(\xi)\pm i\sec(\xi)},\varphi(\xi)=\frac{1}{\cot(\xi)\pm\csc(\xi)};\tag{11}$$

(vi)当 $a=4,b=1$ 时,$\varphi(\xi)=\tan(\xi)-\cot(\xi)$; (12)

(vii)当 $a=1,b=4$ 时,$\varphi(\xi)=\frac{1}{\cot(\xi)-\tan(\xi)}$; (13)

(viii)当 $a=b=1$ 时,$\varphi(\xi)=\tan(\xi)$; (14)

(ix)当 $a=b=-1$ 时,$\varphi(\xi)=\cot(\xi)$; (15)

(x)当 $a=0$ 和 $b\neq0$ 时,$\varphi(\xi)=\frac{1}{b\xi+c_0}$ (16)

其中 $\xi=k(x-\lambda t),i=\sqrt{-1}$ 和 c_0 是任意常数.

步骤 6:把步骤 4 中得到的 a_i,b_i,k,λ,μ,r 和步骤 5 中的不同情况回代到(5)中,得到方程(2)的精确孤立波解.

注:当 $a_1=\cdots=a_n=\mu=r=0,\varphi(\xi)=\tanh(\xi)$,就是文献[6]的方法. 另外 步骤 4 是关键的一步,其计算过程都可以通过符号计算 Maple 来完成.

2　Burgers 方程的孤立波解

对于 Burgers 方程(1)由上述方法,进行行波变换 $u=u(\xi),\xi=k(x-\lambda t)$ 得:

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+k\beta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}=0\tag{17}$$

通过平衡(8)中的最高阶项和非线性项,可得阶数 $n=1$,由步骤 3,假设

$$u(\xi)=a_0+\frac{a_1}{\varphi(\xi)}+\frac{a_2\varphi(\xi)}{\mu\varphi(\xi)+r\varphi(\xi)^2}\tag{18}$$

借助符号计算 Maple,将(18)和(6)代入到(17)中,经整理得到一个关于 $\varphi^i(\xi)$(i 是整数)的代数方程,令方程的系数为零,得到关于 $a_0,a_1,a_2,k,\lambda,\mu,r$ 的超定代数方程组,由于方程较多,在此省略,利用 Maple 对其求解得到如下的解:

情形 1:$a_0=\lambda,a_1=2k\beta a,a_2=0$,

$$\mu=\mu,r=r,k=k,\lambda=\lambda\tag{19}$$

情形 2:$a_0=\lambda,a_1=2k\beta a,a_2=-2k\beta b$,

$$\mu=0,r=0,k=k,\lambda=\lambda\tag{20}$$

情形 3:$a_0=\lambda,a_1=2k\beta a,a_2=-\frac{16k\beta b}{3}$,

$$\mu=0,r=-\frac{b}{3a},k=k,\lambda=\lambda\tag{21}$$

情形 4:$a_0=2k\beta a\mu+\lambda,a_1=0$,

$a_2=-2k\beta b-2k\beta a\mu^2$,

$$\mu=\mu,r=0,k=k,\lambda=\lambda\tag{22}$$

情形 5:$a_0=2k\beta a\mu+\lambda,a_1=0$,

$a_2=-8k\beta b-2k\beta a\mu^2$,

$$\mu=\mu,r=-\frac{b}{a},k=k,\lambda=\lambda\tag{23}$$

根据方程(18)和(7)-(16),并综合考虑(19)-(23)五种情形,可以得到方程(1)的解,下面只列出 Burgers 方程的孤立波解.

(i)当 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 时,得到 Burgers 方程的解如下:

$$u_{1,2}=\lambda+\frac{k\beta}{\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi)};$$

$$u_{3,4}=\lambda+\frac{k\beta}{\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi)}+k\beta(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi));$$

$$u_{5,6}=\lambda+\frac{k\beta}{\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi)}+\frac{8k\beta(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))}{3+(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))^2};$$

$$u_{7,8}=\lambda+k\beta\mu+\frac{(-k\beta\mu^2+k\beta)(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))}{1+\mu(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))};$$

$$u_{9,10}=\lambda+k\beta\mu+\frac{(-k\beta\mu^2+4k\beta)(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))}{1+\mu(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))+(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))^2};$$

$$u_{11,12}=\lambda+\frac{k\beta}{\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi)};$$

$$u_{13,14}=\lambda+\frac{k\beta}{\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi)}+k\beta(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi));$$

$$u_{15,16}=\lambda+\frac{k\beta}{\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi)}+\frac{8k\beta(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))}{3+(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))^2};$$

$$u_{17,18}=\lambda+k\beta\mu+\frac{(-k\beta\mu^2+k\beta)(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))}{1+\mu(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))};$$

$u_{19,20}=\lambda+k\beta\mu+$

$$\frac{(-k\beta\mu^2+4k\beta)(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))}{1+\mu(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))+(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))^2};$$

$$u_{21,22}=\lambda+k\beta(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi));$$

$$u_{23,24}=\lambda+k\beta(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))+\frac{8k\beta(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))}{1+3(\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi))^2};$$

$$u_{25,26}=\lambda+k\beta\mu+\frac{-k\beta\mu^2+k\beta}{\coth(\xi)\pm\operatorname{csch}(\xi)};$$

$$u_{27,28}=\lambda+k\beta(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi));$$

$$u_{29,30}=\lambda+k\beta(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))+\frac{8k\beta(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))}{1+3(\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi))^2};$$

$$u_{31,32}=\lambda+k\beta\mu+\frac{-k\beta\mu^2+k\beta}{\tanh(\xi)\pm i\operatorname{sech}(\xi)}$$

（ⅱ）当 $a=4, b=-1$ 时，得到 Burgers 方程的解如下：

$$u_{33}=\lambda+\frac{8k\beta}{\tanh(\xi)\pm\coth(\xi)};$$

$$u_{34}=\lambda+\frac{8k\beta}{\tanh(\xi)\pm\coth(\xi)}+2k\beta(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi));$$

$$u_{35}=\lambda+\frac{8k\beta}{\tanh(\xi)\pm\coth(\xi)}+\frac{64k\beta(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))}{12+(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))^2};$$

$$u_{36}=\lambda+8k\beta\mu+\frac{(-8\beta\mu^2+2k\beta)(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))}{1+\mu(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))};$$

$$u_{37}=\lambda+8k\beta\mu+\frac{(-32k\beta\mu^2+32k\beta)(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))}{4+4\mu(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))+(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))^2}$$

（ⅲ）当 $a=1, b=-4$ 时，得到 Burgers 方程的解如下：

$$u_{38}=\lambda+2k\beta(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi));$$

$$u_{39}=\lambda+2k\beta(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))+\frac{64k\beta(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))}{4+3(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))^2};$$

$$u_{40}=\lambda+2k\beta\mu+\frac{-2k\beta\mu^2+8k\beta}{\mu(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))};$$

$$u_{41}=\lambda+2k\beta\mu+\frac{(-2k\beta\mu^2+32k\beta)(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))}{4+\mu(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))+(\tanh(\xi)\pm\coth(\xi))^2}$$

（ⅳ）当 $a=1, b=-1$ 时，得到 Burgers 方程的解如下：

$$u_{42}=\lambda+2k\beta\coth(\xi);$$

$$u_{43}=\lambda+\frac{2k\beta}{\tanh(\xi)}+2k\beta\tanh(\xi);$$

$$u_{44}=\lambda+\frac{2k\beta}{\tanh(\xi)}+\frac{16k\beta\tanh(\xi)}{3+\tanh(\xi)^2};$$

$$u_{45}=\lambda+2k\beta\mu+\frac{(-2k\beta\mu^2+2k\beta)\tanh(\xi)}{1+\mu\tanh(\xi)};$$

$$u_{46}=\lambda+2k\beta\mu+\frac{(-2k\beta\mu^2+8k\beta)\tanh(\xi)}{1+\mu\tanh(\xi)+\tanh(\xi)^2};$$

$$u_{47}=\lambda+2k\beta\tanh(\xi);$$

$$u_{48}=\lambda+\frac{2k\beta}{\coth(\xi)}+\frac{16k\beta\coth(\xi)}{3+\coth(\xi)^2};$$

$$u_{49}=\lambda+2k\beta\mu+\frac{(-2k\beta\mu^2+2k\beta)\coth(\xi)}{1+\mu\coth(\xi)}$$

注：上述的解中，μ 是任意常数，$\xi=k(x-\lambda t)$. 由于篇幅所限，我们略去了 Burgers 方程的一些三角函数周期解和一些有理解，其中 $u_{11,12}$ 和 u_{47} 是文献[6-7]中的两个解. 上述的解经过使用 Maple 代入方程(17)进行验证，结果是完全正确的.

3 结论

本文借助符号计算 Maple 和 Riccati 方程的解，通过构造一个新的尝试解，得到 Burgers 方程的多组新的精确孤立波解，这些解将为进一步了解 Burgers 方程所描述的物理现象提供了新的线索和帮助. 据我们掌握的资料，除少数解被一些作者发现外，其余解特别是分式形式的孤立波解是本文方法首次发现. 这种方法可以应用到其它的非线性波动方程(组)，并且易于在计算机上运行.

参 考 文 献

1 范恩贵，张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法. 物理学报，1998，47(3)：353～362 (Fan E G, Zhang H Q. The homogeneous balance method for solving nonlinear solitonequations. *Acta Physica Sinica*, 1998, 47(3): 353～362 (in Chinese))

2 Parkes E J, Duffy B R. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV-Burgers equation. *Physics Letters A*, 1997, 229: 217～220

3 Fan E G. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Physics Letters A*, 2000, 277: 212～218

4 Yan C T. A simple transformation for nonlinear waves. *Physics Letters A*, 1996, 224: 77～84

5 刘式适，付遵涛，刘式达，赵强. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用. 物理学报，2001，50(11)：2068～2073 (Liu S S, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q. Expansion method about the Jacobi elliptic function and its applications to nonlinear wave equations. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(11): 2068～2073 (in Chinese))

6 李志斌,张善卿. 非线性波动方程准确孤立波解的符号计算. 数学物理学报,1997,17(1):81 ~ 89(Li Z B, Zhang S Q. Exact solitary wave solutions for nonlinear wave equations using symbolic computation. *Acta Mathematica Scientia*,1997,17(1):81 ~ 89(in Chinese))

7 张桂戌,李志斌,段一士. 非线性波方程的精确孤立波解. 中国科学,2000,(12):1103 ~ 1108(Zhang G X, Li Z B, Duan Y S. Exact solitary wave solutions for nonlinear wave equations. *Science in China* (*series A*),2000,30:1103 ~ 1108 (in Chinese))

8 刘式适,付遵涛,刘式达等. 求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法. 应用数学和力学,2001, 22(3): 281 ~ 286(Liu S S, et al. A simp le fast method in finding particular solutions of some nonlinear PDE. *Appl Math. Mech*,2001, 22(3):281 ~ 286(in Chinese))

9 刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京:北京大学出版社, 2000:23 ~ 25,167 ~ 170(Liu S S, Liu S D. Nonlinear Equations in Physics. Beijing: Peking University Press, 2000:23 ~ 25,167 ~ 170 (in Chinese))

10 谢元喜,唐驾时. 求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法. 物理学报,2004,53(9):2828 ~ 2830(Xie Y X and Tang J S. A simple fast method in finding the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations. *Acta Phys. Sin.* ,2004,53(9) :2828 ~ 2830 (in Chinese))

11 谢元喜,唐驾时. 求一类非线性偏微分方程精确解的简化试探函数法. 动力学与控制学报,2005,3(1):15 ~ 18 (Xie Yuanxi, Tang J iashi. A simp lified trial function method for seeking the exact solutions to a class of nonlinear PDEs. *Journal of Dynam ics and Control*,2005, 3(1): 15 ~ 18(in Chinese))

12 谢元喜,唐驾时. 对"求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法"一文的一点注记. 物理学报,2005,54(3):1036 ~ 1038(Xie Y X and Tang J S. A note on paper "A simple fast method in finding the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations". *Acta Phys. Sin.* ,2005,54 (3) :1036 ~ 1038 (in Chinese))

EXACT SOLITARY WAVE SOLUTIONS OF BURGERS EQUATION USING SYMBOLIC COMPUTATION

Wen Xiaoyong

(*Department of Mathematics*, *College of Sciences*, *Beijing Information Technology university*, *Beijing* 100085, *China*)

Abstract With the aid of the symbolic computation system Maple, a direct algebraic method for constructing the traveling wave solutions to nonlinear wave equations was presented, and the main idea of this method was to take full advantage of the Riccati equation. Using this method, many kinds of traveling wave solutions including new solitary wave solutions were obtained for Burgers equation. So, this method can also be applied to solve other nonlinear wave equations.

Key words Burgers equation, Riccati equation, solitary wave solutions, symbolic computation

Received 16 April 2007, revised 8 May 2007.