第 6 卷第 1 期 2008 年 3 月
1672-6553/2008/06(1)/009-3

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 6 No. 1
Mar. 2008

一类离散线性切换系统的最优控制*

向峥嵘　王春芳

(南京理工大学自动化学院,南京　210094)

摘要　研究了一类离散线性切换系统在切换时间、切换次数固定的情况下的二次最优控制问题. 利用离散动态规划的方法,将多级决策过程分解成一系列易于求解的单级决策过程,求出最优控制序列和最优切换序列, 并给出算法. 最后通过一个数值例子来说明所提出的方法的有效性.

关键词　切换系统,　最优控制,　动态规划

引 言

近年来, 切换系统的研究引起了极大的关注,其在制造控制、网络控制系统等场所得到了广泛的应用,目前已经取得了许多研究结果[1-2]. 最近有学者开始将目光转向切换系统的优化控制方面,翟海峰[3]等针对分段线性混杂系统最优控制问题,采用混杂动态规划方法,研究了混杂系统的最优控制。张聚,李平[4]基于混杂系统的离散时间混合逻辑动态模型,研究了混杂系统具有状态约束和控制输入约束优化问题的混合整数二次规划(MIQP),讨论了 MIQP 问题的求解步骤. 尹增山[5]等研究了一类混杂系统的最优控制问题,提出了基于可达网络的混杂系统优化控制的动态规划方法,并给出问题的全局最优解. Lincoln[6]用查找树的方法求解离散时间切换线性系统的 LQR 问题. Borrellia[7]等用动态规划法解决了有限时间有约束的离散时间线性混杂系统的优化控制.

本文针对一类离散线性切换系统,研究了在切换次数固定及切换时刻也固定的情况下的二次最优问题. 采用离散动态规划的方法,将多级决策过程分解成一系列易于求解的单级决策过程,求出最优控制序列和最优切换序列. 最后通过一个数值例子来说明所提出的方法的有效性.

1　问题的描述

考虑如下离散线性切换系统

$$x(k+1)=A_{q(i)}(k)x(k)+B_{q(i)}(k)u(k) \quad (1)$$

其中 $x(k)$ 为离散时间状态变量;$u(k)$ 为系统离散时间控制变量;$q(i)$ 为离散事件状态变量,i 表示子系统标示. 切换序列 δ 从 0 到 N 表示为 $\delta=\{(0,e_0),(t_1,e_1),\cdots,(t_K,e_K)\}$,其中 $0\le K<\infty$, $0\le t_1\le\cdots\le t_K\le N$, t_K 是整数,$e_K=(q_{K-1},q_K)$, $i=1,2,\cdots,K$.

问题 1:对于系统(1),寻找切换次数 N,切换时刻 $k=0,1,\cdots,N-1$,切换序列 δ 以及每个子系统中的控制输入 $u\in U=\{u(.)\mid u(k)\in U\subseteq R^m, \forall k=0,1,\cdots,N-1\}$,使二次性能指标

$$J=\frac{1}{2}x^T(N)Fx(N)+\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Q(k)x(k)+u^T(k)R(k)u(k)] \quad (2)$$

达到最小. 其中 F 为 $n\times n$ 半正定常数矩阵,$Q(k)$ 为 $n\times n$ 半正定矩阵,$P(k)$ 为 $n\times n$ 正定矩阵,终端时刻 N 是固定的.

定义 1[3]:对于从 q' 到 q 的变迁,$q,q'\in Q$,则关于 q' 到 q 变迁的离散前件算子 $\mathrm{Pre}(q)$ 定义为 $\mathrm{Pre}(q)=\{q'\mid q=\delta(x,q')\}$

2　离散线性切换系统二次最优控制

基于离散动态规划思想[8],将切换系统的二次最优控制问题转变为多阶段决策问题. 根据最优性原理,多级决策过程的最优策略具有这样的性质,不论初始状态和初始决策如何,当把其中任何一级和状态再作为初始级和初始状态时,其余的决策对此必定也是一个最优策略.

定理 1: 对于问题 1,切换系统(1)的最优切换路径和最优控制策略为

2007-06-27 收到第 1 稿,2007-10-08 收到修改稿.
* 江苏省自然科学基金资助项目(BK2007210)和南京理工大学科研发展基金资助项目(AB96248)

$$u^*(k)=-K(k)x(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{3}$$

$$K(k)=[R(k)+B^T_{q^*(i)}(k)P(k+1)\times B_{q^*(i)}(k)]^{-1}B^T_{q^*(i)}(k)P(k+1)A_{q^*(i)}(k) \tag{4}$$

$$q^*(i)=arg\{\min_{q(i)\in Pre(q(i+1))}J'_{q(i)}\},i=1,2,\cdots,K \tag{5}$$

$$J'_{q(i)}=\min\frac{1}{2}x^T(N)Fx(N)+\sum_{N-k}^{N-k-1}[x^T(k)Q(k)x(k)+u^T(k)R(k)u(k)] \tag{6}$$

其中 $P(k+1)$ 为满足 Riccati 方程的解

$$P_{q(i)}(k)=[A_{q(i)}(k)-B_{q(i)}K(k)]^TP_{q(i)}(k+1)[A_{q(i)}(k)-B_{q(i)}(k)K(k)]+K^T(k)R(k)K(k)+Q(k) \tag{7}$$

证明 在区间$[t_K,N]$上,计算第 $N-1$ 级每个子系统的最优控制律:

$$u_{q(i)}(N-1)=-K(N-1)x(N-1),$$

$$K(N-1)=[B^T_{q(i)}(N-1)P(N)B_{q(i)}(N-1)+R(N-1)]^{-1}B^T_{q(i)}(N-1)P(N)A_{q(i)}(N-1)$$

其中 $P(N)$ 是下列 Riccati 方程的对称非负定解

$$P(N-1)=[A_{q(i)}(N-1)-B_{q(i)}(N-1)K(N-1)]^TP(N)[A_{q(i)}(N-1)-B_{q(i)}(N-1)K(N-1)]+K^T(N-1)R(N-1)K(N-1)+Q(N-1)$$

最优性能指标为:$J'_{q(i)}(N-1)=\frac{1}{2}x^T(N-1)P(N-1)x(N-1)$,然后根据 $q^*(i)=arg\{\min_{q(i)\in Pre(q(i+1))}J'_{q(i)}(N-1)\}$确定 $q^*(i)$,进一步确定了 $N-1$ 步的最优切换序列,从而求出第 $N-1$ 级最优控制输入为 $u^*(N-1)=-K(N-1)x^*(N-1)$. 其中

$$K(N-1)=[B^T_{q^*(i)}(N-1)P(N)B_{q^*(i)}(N-1)+R(N-1)]^{-1}B^T_{q^*(i)}(N-1)P(N)A_{q^*(i)}(N-1)$$

$N-1$ 级最优性能指标为:.

$$J^*(N-1)=\frac{1}{2}x^T(N-1)P(N-1)x(N-1)$$

其中 $P(N)$ 是下列 Riccati 方程的对称非负定解

$$P(N-1)=[A_{q^*(i)}(N-1)-B_{q^*(i)}(N-1)K(N-1)]^TP(N)[A_{q^*(i)}(N-1)-B_{q^*(i)}(N-1)K(N-1)]+K^T(N-1)R(N-1)K(N-1)+Q(N-1)$$

同理可求得 $N-2$ 级的最优控制. 由 $q^*(i)=arg\{\min_{q(i)\in Pre(q(i+1))}J'_{q(i)}(N-2)\}$确定 $q^*(i)$,从而进一步确定 $N-2$ 级的最优控制输入为:$u^*(N-2)=-K(N-2)x(N-2)$和最优性能指标为:$J^*(N-2)=\frac{1}{2}x^T(N-2)P(N-2)x(N-2)$. 依次类推,直到初始阶段,即可证明定理 1 成立.

离散切换系统(1)的最优控制求解算法:

步骤 1:由给定条件,计算最后一项每个子系统的性能指标,由 $q^*(i)=arg\{\min_{q(i)\in Pre(q(i+1))}J'_{q(i)}(N-1)\}$,求得 $q^*(i)$,从而可求得最优切换序列.

步骤 2:根据式(3)和式(8),计算所有最优控制序列 $u^*(N-1)$和最优性能指标 $J^*(N-1)$.

步骤 3:令 $k=N-2$,重复计算步骤 1 和步骤 2,直到 $k=0$.

3 算例

考虑线性离散切换系统

$$x(k+1)=A_{q(i)}x(k)+B_{q(i)}u(k),\quad i=1,2,3$$

其中 $A_1=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$;$B_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;$A_2=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$;$B_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$;$A_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$;$B_3=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

系统在 $k=1,2,3$ 时刻发生切换,求解最优控制 $u^*(k)$和最优切换序列 δ,使性能指标 $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}[x^T(k)Qx(k)+u^T(k)Ru(k)]$为最小. 其中 $Q=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$;$R=1$.

首先计算 $k=2$ 的最优控制律,控制输入解为:$u_1(3)=0$;$u_2(3)=0$;$u_3(3)=0$. 性能指标 $J_1(3)=0.1250$;$J_2(3)=0$;$J_3(3)=0.5000$,$q^*(i)=arg\{\min_{q(i)\in Pre(q(i+1))}J'_{q(i)}(3)\}$,从而最优控制输入为:$u^*(3)=0$,最优性能指标为:$J^*(3)=0$,可以求得切换到系统 2.

类似计算 $k=2$ 时控制输入解为:$u_1(2)=0.5000$;$u_2(2)=0$;$u_3(2)=-1.0000$. 性能指标为:$J_1(2)=1.3750$;$J_2(2)=2.0000$;$J_3(2)=1.0000$. 从而最优控制输入为:$u^*(2)=-1.0000$,最优性能指标为 $J^*(2)=1.0000$,可以求得切换到系统 3.

计算 $k=1$ 时控制输入解为:$u_1(1)=-1.5000$;$u_2(1)=0$;$u_3(1)=-4.0000$. 性能指标为:$J_1(1)=4.5000$;$J_2(1)=10.0000$;$J_3(1)=27.0000$. 最优控制输入为 $u^*(1)=-1.5000$,最优性能指标为 $J^*(1)=4.5000$,可以求得切换到系统 1. 计算 $k=0$ 时控制输入的解为:$u_1(0)=3.0000$;$u_2(0)=4.0000$;$u_3(0)=-5.0000$. 性能指标为:$J_1(0)=17.0000$;

$J_2(0)=20.0000$；$J_3(0)=404.0000$. 最优控制输入为 $u^*(0)=3.0000$，最优性能指标为 $J^*(0)=17.0000$. 得到整个过程的最优控制输入为 $u^*(0)=3.0000$，$u^*(1)=-1.5000$，$u^*(2)=-1.0000$，$u^*(3)=0$.

4 结语

本文基于离散动态规划原理，研究了在切换次数固定及切换时刻也固定的情况下的二次最优控制问题，给出了最优控制序列和最优切换序列求解方法. 最后通过一个例子说明了方法的有效性步骤.

参 考 文 献

1 莫以为，萧德云. 混合动态系统及其应用综述. 控制理论与应用，2002，19(1)：1～7(Mo Yiwei，Xiao Deyun. Overview of hybrid dynamic system and its Application. *Control Theory and Applications*，2002，19(1)：1～7(in Chinese))

2 向伟铭，向峥嵘，陈庆伟. 基于遗传算法的切换控制器设计与优化. 动力学与控制学报，2007，5(1)：58～61 (Xiang Weiming，Xiang Zhengrong，Chen Qingwei. Design and optimization of GA-based switching controller. *Journal of Dynamics and Control*，2007，5(1)：58～61(in Chinese))

3 翟海峰，苏宏业，董利达，王肖，褚健. 一类分段线性混杂系统的最优控制策略研究. 控制与决策，2002，17(6)：863～866(Zhai Haifeng etal. Study on optimal control strategy for a class of piecewise linear hybrid systems. *Control and Decision*，2002，17(6)：863～866 (in Chinese))

4 张聚，李平. 含状态与输入约束的一类混杂系统优化控制. 浙江大学学报，2003，37(2)：139～143(Zhang Ju，Li Ping. Optimal control of a class of hybrid systems with states and inputs constraints. *Journal of Zhejiang University*，2003，37(2)：139～143 (in Chinese))

5 尹增山，高春华，李平. 混杂系统优化控制的动态规划方法研究. 控制理论与应用，2002，19(1)：29～33(Yin Zengshan，Gao Chunhua，Liping. Optimal control for hybrid systems based on dynamical programming. *Control Theory and Applications*，2002，19(1)：29～33 (in Chinese))

6 B. Lincoln，B. Bernhardsson. LQR optimization of linear system switching. *IEEE Transactions on Automatic Contro*，2002，47(10)：1701～1705

7 F. Borrellia，M. Baotic，A. Bemporad，M. Moraria. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete－time linear hybrid systems. *Automatica*，2005，41(9)：1709～1721

8 胡寿松，王执铨，胡维礼. 最优控制理论与系统. 南京：东南大学出版社，1994 (Hu Shousong，Wang Zhiquan，Hu Weili. Optimal control theory and systems. Nanjing：Southeast University Press，1994(in Chinese))

OPTIMAL CONTROL FOR A CLASS OF DISCRETE LINEAR SWITCHED SYSTEMS*

Xiang Zhengrong　Wang Chunfang

(*School of Automation*，*Nanjing University of Science and Technology*，*Nanjing*　210094，*China*)

Abstract　This paper studied the quadratic optimal control for a class of discrete linear switched systems with switched time and fixed switched number. By using the discrete dynamic programming principle，a multistage decision process was disintegrated into a series of single decision processes，which was easy to find feasible solutions，and the optimal control sequence and the optimal switched sequence were given. Finally，a numerical example was given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words　switched systems，　optimal control，　dynamic programming

Received 27 June 2007，revised 8 October 2007.

* The project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China(BK2007210) and the Research and Development Foundation from Nanjing University of Science and Technology(AB96248)