

非均匀地基上自由梁的刚体模态分析*

张望喜 易伟建 谢小安 陈友坤

(湖南大学土木工程学院,长沙 410082)

摘要 非均匀单参数(Winkler)地基和双参数(Pasternak)地基上自由梁的刚体模态与梁体—土体间的相互作用有关,当约束或支承不影响梁的平动和转动时,相应的刚体模态则会出现.刚体模态的频率和振型随地基的不均匀性和基床系数的变化而变化.基于哈密顿原理和变化运算,获得了考虑周围土体支承影响的双参数地基梁振动特性,并分析了不均匀地基上自由梁的广义刚体模态频率及其随地基不均性的变化规律.

关键词 双参数地基, 自由梁, 刚体模态, 不均匀性

引言

弹性地基梁在水利工程、土木工程中有着广泛的应用,如隧道底板、地下框架结构、柱下条形基础、路面板、机场道面板等.目前计算地基梁的横向振动特性及反应时,一般按均质单参数梁来计算,相关的研究有很多^[1-7].关于非均匀地基上自由梁的刚体模态的研究文献非常少见^[8],本文拟在此点做些初浅的探讨,以期抛砖引玉.

1 地基梁刚体模态

温克尔(Winkler)地基模型是应用最广泛的地基模型之一,亦称为单参数地基模型.所谓温克尔地基上的约束梁,是指梁的端部受到位移和转动约束且这类约束与地基的存在无关.温克尔地基模型认为地基反力正比于梁在该点的挠度,因此弹性地基上梁振动的微分方程即为无地基梁方程附加地基反力项^[9-10],表示如下

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k b w = q \quad (1)$$

式中, E 为梁的弹性模量, I 为梁的截面惯性矩, w 为梁的挠度, ρ 是梁的材料密度, b 和 h 分别为梁的截面宽度和高度, k 为压缩基床系数, q 为梁上均布荷载.相应的振型方程为

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \gamma^4 W = 0, \quad \gamma^4 = \omega^2 \frac{\rho b h}{EI} - \frac{k b}{EI} \quad (2)$$

式中, W 为梁的振型函数.当上式中的参数 $\gamma^4 =$

$\omega^2 \frac{\rho b h}{EI} - \frac{k b}{EI} = 0$ 时,可得固有频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\rho h}}$,方程(2)

变为 $\frac{d^4 W}{dx^4} = 0$,由此可得对应振型表达式的通解:

$$W = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D \quad (3)$$

式中, A, B, C, D 均为待定系数.对于自由梁,梁两端弯矩和剪力均为零,对应的边界条件为:

$$\begin{aligned} -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, & \quad -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0, \\ -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0, & \quad -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

由边界条件可确定式(3)的待定系数; $A = 0, B = 0$,式(3)变为:

$$W = C \cdot x + D \quad (4)$$

从上式可以看出,对应频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\rho h}}$ 的振型函数 W 为 x 的一次式,即梁的此阶振型为一直线,没有产生弯曲变形,即梁作为刚体(平动和转动)参与振动,此时的振型为刚体振型.

只有当约束对梁的刚体平动或转动不影响时,如两端滑支均匀温克尔地基梁和梁跨中一点简支均匀温克尔地基梁,梁才存在两种刚体模态(平动或转动)中的一种.对于两端简支、两端弹支、两端固支、一端简支一端弹支等同时会限制梁刚体平动和转动的约束梁中不存在刚体模态.

非均匀地基(包括温克尔地基和双参数地基)上自由梁或板不存在严格意义上的刚体模态,但当地基刚度远小于梁或板的刚度时, $\gamma^4 \approx 0$,梁或板自身的变

2007-05-10 收到第1稿,2007-06-06 收到修改稿.

*国家自然科学基金(50378034/E0807)和国家“985工程”资助项目

形在低阶模态中所占比例非常小,此时梁或板近似可看成刚体,此类模态称之为广义刚体模态,与之对应,前述具有严格意义的刚体模态称为狭义刚体模态.均匀双参数地基上的自由板,由于剪切基床系数和周边地基的影响,也不存在狭义的刚体模态(孤立双参数地基上的自由板只存在一个平动刚体模态),但当剪切基床系数和周边地基的影响非常小时,仍然存在广义刚体模态,即为本文研究的刚体模态.

2 单参数地基上的自由梁

考虑一根非均匀地基上的有限长梁,如图1所示.由于地基不均匀,导致基床系数也不均匀,温克尔地基中表现为图1所示的弹簧刚度的离散性,实际场地中,不均匀基床系数是一随机变量,非常复杂.考虑到梁为有限长,且在刚体模态中作为一刚体参与振动,现研究基床系数沿梁轴线方向呈线性分布和曲线分布的情形.基床系数线性分布相当于基床系数表达式是 x 的一次函数,当基床系数呈非线性时,基床系数表达式是 x 的高次函数.

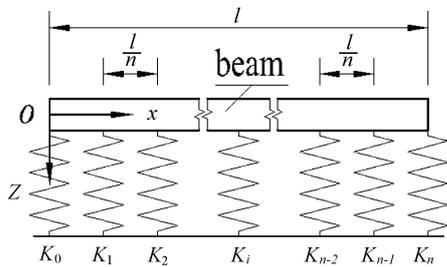


图1 弹性地基梁

Fig. 1 beam on Winkler foundation

不失一般性,取基床系数的表达式为:

$$K(x) = \frac{K}{l(1 + \alpha + \beta)} \left(1 + 2\alpha \frac{x}{l} + 3\beta \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (5)$$

式中, K —地基总刚度; α, β —确定基床系数分布特征的常数.

当 $\beta=0$ 时,相当于基床系数线性分布;当 $\alpha=0, \beta=0$ 时,相当于基床系数线性分布中的均匀分布.用梁左端 ($x=0$) 和右端 ($x=l$) 处的挠度 w_1 和 w_2 两个自由度来描述刚体模态中的梁,则梁的挠度表达式为:

$$w(x) = \left(1 - \frac{x}{l} \right) w_1 + \frac{x}{l} w_2 \quad (6)$$

运用达朗贝尔原理建立地基梁的运动方程,由 z 方向的力平衡和绕 O 点的力矩平衡,并将式(5)、(6)

代入,化简并整理成矩阵形式,得运动方程:

$$\frac{M}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \frac{K}{60(1 + \alpha + \beta)} [C_1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 2(10 + 5\alpha + 3\beta) & (10 + 10\alpha + 9\beta) \\ (10 + 10\alpha + 9\beta) & 2(10 + 15\alpha + 18\beta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, M —梁的总质量, $M = ml$.

按 α, β 取值不同,分三种情况进行讨论:

(1) $\alpha=0$ 且 $\beta=0$,即沿梁轴线基床系数处处均匀时,由方程(7)求得地基梁刚体模态的两个固有频率值和对应的两个主振型为:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}} = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \rho_{1,2} = \frac{W_2^{(1,2)}}{W_1^{(1,2)}} = \pm 1 \quad (8)$$

式中, W_1 和 W_2 是振型中与 w_1 和 w_2 对应的梁端振动幅值.

(2) $\alpha \neq 0$ 且 $\beta=0$,即基床系数沿梁轴线均匀增加或均匀减小时,地基梁刚体模态的两个固有频率值和对应的两个主振型为:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}} = \left(1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \left| \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right| \right) \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{W_2^{(1,2)}}{W_1^{(1,2)}} = -2 \mp \sqrt{3} \frac{\alpha}{|\alpha|} \quad (9)$$

表1 基床系数线性分布时温克尔地基上自由梁的刚体模态频率和主振型

Table 1 The frequencies and principal modes of beam on Winkler foundation whose compressive foundation coefficient varies linearly

Parameter	$-0.5 < \alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha$
ω_1 ($\times \sqrt{\frac{K}{M}}$ rad/s)	$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha}{\alpha + 1}}$	1	$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha}{\alpha + 1}}$
ω_2 ($\times \sqrt{\frac{K}{M}}$ rad/s)	$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha}{\alpha + 1}}$	1	$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\alpha}{\alpha + 1}}$
ρ_1	$-2 + \sqrt{3}$	1	$-2 - \sqrt{3}$
ρ_2	$-2 - \sqrt{3}$	-1	$-2 + \sqrt{3}$

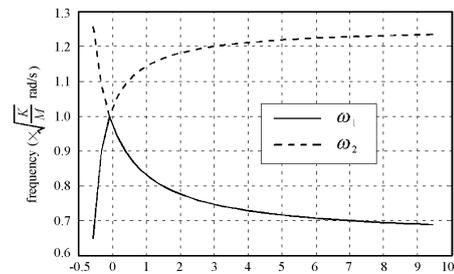


图2 频率变化曲线图

Fig. 2 Frequency varying-curve

由此得基床系数线性分布($\beta=0$)时地基梁的刚体模态的频率和振型,见表1.可以看出,当基床系数

完全均匀时,温克尔地基上自由梁的两阶刚体模态具有相同的频率,不同的主振型;当基床系数线性增加或线性减少时,地基梁的两阶刚体模态具有不同的频率,其与地基变化率的关系如图 2 示,但具有确定的主振型,即主振型只与地基线性变化的趋势(增加或减小)有关,而与地基变化的程度无关。

(3) $\alpha \neq 0$ 且 $\beta \neq 0$, 即基床系数沿梁轴线按曲线变化时,地基梁刚体模态的两个固有频率值和对应的两个主振型为:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}} = \sqrt{\frac{3(10 + 10\alpha + 11\beta) \mp 2C_2}{30(1 + \alpha + \beta)}} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{W_2^{(1,2)}}{W_1^{(1,2)}} = -\frac{(15\alpha + 24\beta) \mp 2C_2}{3\beta \mp C_2}$$

$$C_2 = \sqrt{75\alpha^2 + 225\alpha\beta + 171\beta^2} \quad (10)$$

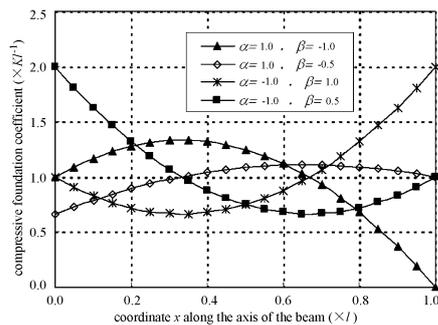


图 3 地基基床系数分布曲线

Fig. 3 Distribution curve of the compressive foundation coefficient

取图 3 所示四种基床系数曲线分布的地基,相应刚体模态的频率和振型如表 2 所示. 可以看出,当基床系数按曲线分布时,地基梁的两阶刚体模态取决于基床系数曲线的形状,如顶点和曲率等。

表 2 基床系数曲线分布时温克尔地基上自由梁的刚体模态频率和主振型

Table 2 The frequencies and principal modes of beam on Winkler foundation whose compressive foundation coefficient curved varies

Parameter	$\alpha = 1.0$ $\beta = -1.0$	$\alpha = 1.0$ $\beta = -0.5$	$\alpha = -1.0$ $\beta = 1.0$	$\alpha = -1.0$ $\beta = 0.5$
$\omega_1 (\times \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ rad/s})$	0.771	0.930	0.891	0.891
$\omega_2 (\times \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ rad/s})$	10.98	1.034	1.186	1.186
ρ_1	-2.396	-0.419	-0.104	-9.583
ρ_2	-0.104	-9.583	-2.396	-0.417

3 双参数地基上的自由梁

为了弥补温克尔地基模型将连续介质简化为离散弹簧的不足,适当考虑土体的连续性质,发展出许多温克尔修正模型,即双参数地基模型. 双参数地基引入剪切基床系数以考虑土体间侧向的连续性. 梁在双参数地基上,除梁下地基起支承作用以外,梁侧地基和梁端以外的地基亦起支承作用。

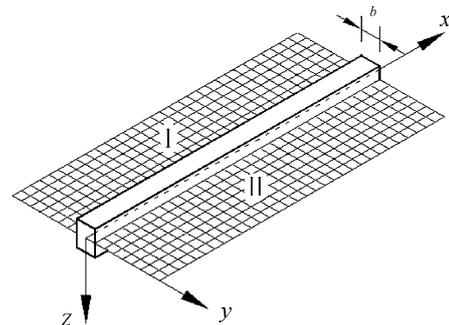


图 4 双参数地基上的有限梁

Fig. 4 Infinite length beam on double-parameter foundation

基于双参数地基梁理论,有如下平衡微分方程:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + K_c w - G_c \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (11)$$

式中, K_c 和 G_c 分别是考虑梁周地基影响的综合压缩和剪切基床系数, $K_c = bk + 2\sqrt{kG}$, $G_c = bG$ 。

为使问题简化,假定研究区域内地基压缩基床系数 k 与剪切基床系数 G 在垂直于梁轴线方向上均为同性,在平行于梁轴线方向上具有相同的变化规律,即压缩和剪切基床系数只与 x 坐标有关,而与 y 坐标无关. 据此假设,根据双参数地基梁理论,考虑梁侧土体影响的截面宽度为 b 的梁下综合基床系数为:

$$K_c(x) = bk(x) + 2\sqrt{k(x)G(x)}$$

$$G_c(x) = bG(x) \quad (12)$$

基床系数线性分布相当于基床系数表达式是 x 的一次函数,当基床系数呈非线性时,基床系数表达式可表示为 x 的二次函数. 现研究基床系数按二次曲线分布时的地基梁的刚体模态,取基床系数沿梁轴线的表达式为:

$$k(x) = \frac{K}{l(1+\alpha+\beta)}(1+2\alpha\frac{x}{l}+3\beta\frac{x^2}{l^2})$$

$$G(x) = \frac{G}{l(1+\alpha+\beta)}(1+2\alpha\frac{x}{l}+3\beta\frac{x^2}{l^2}) \quad (13)$$

综合基床系数为:

$$k_c(x) = \frac{K_c}{l(1+\alpha+\beta)}(1+2\alpha\frac{x}{l}+3\beta\frac{x^2}{l^2})$$

$$G_c(x) = \frac{G_c}{l(1+\alpha+\beta)}(1+2\alpha\frac{x}{l}+3\beta\frac{x^2}{l^2}) \quad (14)$$

式中, $K_c = bk + 2\sqrt{kG}$, $G_c = bG$.

梁的挠度表达式同式(6), 梁的动能 T 为:

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} m \dot{w} dx = \frac{ml}{6} (\dot{w}_1^2 + \dot{w}_1 \dot{w}_2 + \dot{w}_2^2) \quad (15)$$

式中, l 为梁的长度.

梁下土体压缩势能 V_1 和剪切势能 V_2 为:

$$V_1 = \int_0^l \frac{1}{2} K_c(x) w^2 dx = \frac{K_c}{60(1+\alpha+\beta)} C_3$$

$$C_3 = (10+5\alpha+3\beta)w_1^2 + (10+10\alpha+9\beta)w_1w_2 + (10+18\alpha+18\beta)w_2^2 \quad (16)$$

$$V_2 = \int_0^l \frac{1}{2} G_c(x) (\frac{dw}{dx})^2 dx = \frac{G_c}{2l^2} (w_1^2 - 2w_1w_2 + w_2^2) \quad (17)$$

梁端以外土体压缩势能 V_3 和剪切势能 V_4 为:

$$V_3 = \int_{-\infty}^l \frac{1}{2} K_c(x) \bar{w}^2 dx + \int_l^{\infty} \frac{1}{2} K_c(x) \bar{w}^2 dx =$$

$$\frac{C_4}{8l^3(1+\alpha+\beta)} w_1^2 + \frac{C_5}{8l^3(1+\alpha+\beta)} w_2^2 \quad (18)$$

$$V_4 = \int_{-\infty}^l \frac{1}{2} G_c(x) (\frac{d\bar{w}}{dx})^2 dx + \int_l^{\infty} \frac{1}{2} G_c(x) (\frac{d\bar{w}}{dx})^2 dx =$$

$$\frac{C_4}{8l^3(1+\alpha+\beta)} w_1^2 + \frac{C_5}{8l^3(1+\alpha+\beta)} w_2^2 \quad (19)$$

$$\bar{w} = \begin{cases} w_1 e^{\sqrt{\frac{K_c}{G_c}} \cdot x} & x \leq 0 \\ w_2 e^{-\sqrt{\frac{K_c}{G_c}} \cdot (x-l)} & x \geq l \end{cases}$$

$$C_4 = 2l^2 K_c - 2\alpha l \sqrt{K_c G_c} + 3\beta G_c$$

$$C_5 = (2+4\alpha+6\beta)l^2 K_c - (2\alpha+6\beta)l \sqrt{K_c G_c} + 3\beta G_c$$

式中, \bar{w} 是梁端地基挠度.

利用哈密顿原理, 经变分运算, 并利用分部积分公式可得:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\frac{ml}{3}\ddot{w}_1^2 + \frac{ml}{6}\ddot{w}_2^2 + K_{11}w_1 + K_{12}w_2)\delta w_1 + (\frac{ml}{6}\ddot{w}_1^2 + \frac{ml}{3}\ddot{w}_2^2 + K_{21}w_1 + K_{22}w_2)\delta w_2] dt = 0 \quad (20)$$

$$K_{11} = \frac{(10+5\alpha+3\beta)K_c}{30(1+\alpha+\beta)} + \frac{G_c}{l^2} +$$

$$\frac{2l^2 K_c - 2\alpha l \sqrt{K_c G_c} + 3\beta G_c}{2l^3(1+\alpha+\beta)}$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{(10+10\alpha+9\beta)K_c}{60(1+\alpha+\beta)} - \frac{G_c}{l^2}$$

$$K_{22} = \frac{(10+15\alpha+18\beta)K_c}{30(1+\alpha+\beta)} + \frac{G_c}{l^2} +$$

$$\frac{(2+4\alpha+6\beta)l^2 K_c + (2\alpha+6\beta)l \sqrt{K_c G_c} + 3\beta G_c}{2l^3(1+\alpha+\beta)}$$

可得双参数地基梁的运动方程:

$$\frac{M}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (21)$$

式中, $M = ml$.

同理, 可以得到基床系数曲线分布时双参数地基梁刚体模态的频率和主振型. 当 $\beta = 0$, 即基床系数线性分布时, 可求得地基梁刚体模态的两个固有频率值:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(l^2 K_c + 4l \sqrt{K_c G_c} + 6G_c)}{l^2 M} \mp \frac{\sqrt{3} \sqrt{C_6}}{2\alpha l^2 M}}$$

$$C_6 = \alpha^2 l^4 K_c^2 + 36(4\alpha^2 + 6\alpha + 3)G_c^2 +$$

$$12\alpha^2 l^3 K_c \sqrt{K_c G_c} + 12(5\alpha^2 + 2\alpha + 1)l^2 K_c G_c +$$

$$72(2\alpha^2 + 2\alpha + 1)l \sqrt{K_c G_c} G_c \quad (22)$$

由此, 可得对应的两个主振型:

$$\rho_{1,2} = \frac{W_2^{(1,2)}}{W_1^{(1,2)}} = -\frac{\frac{M}{3}\lambda_{1,2} - C_7}{\frac{M}{6}\lambda_{1,2} - (\frac{K_c}{6} - \frac{G_c}{l^2})}$$

$$C_7 = \frac{(\alpha+2)K_c}{6(\alpha+1)} + \frac{1}{l^2(\alpha+1)}(l \sqrt{K_c G_c} + G_c) \quad (23)$$

当 $\alpha = 0$ 且 $\beta = 0$, 即沿梁轴线基床系数处处均匀时, 两个固有频率值:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}} = \sqrt{1 + \frac{4 \mp 2}{l} \sqrt{\frac{G_c}{K_c}} + \frac{6 \mp 6}{l^2} \frac{G_c}{K_c} \sqrt{\frac{K_c}{M}}} =$$

$$\sqrt{C_7} \sqrt{\frac{bK + 2\sqrt{KG}}{M}} = \sqrt{C_8} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$C_7 = 1 + \frac{4 \mp 2}{l} \sqrt{\frac{bG}{bK + 2\sqrt{KG}}} + \frac{6 \mp 6}{l^2} \frac{bG}{bK + 2\sqrt{KG}}$$

$$C_8 = (b + 2\sqrt{\lambda_c}) + \frac{4 \mp 2}{l} \sqrt{b\lambda_c(b + 2\sqrt{\lambda_c})} + \frac{6 \mp 6}{l^2} b\lambda_c \quad (24)$$

式中, λ_c 为地基剪切基床系数 G 与压缩基床系数 k 之比, $\lambda_c = G/k$.

由此, 可得对应的两个主振型:

$$\rho_{1,2} = \frac{W_2^{(1,2)}}{W_1^{(1,2)}} = -\frac{\frac{M}{3}\lambda_{1,2} - K_{11}}{\frac{M}{6}\lambda_{1,2} - K_{12}} = \pm 1 \quad (25)$$

可以看出, 均匀双参数地基上自由梁的刚体模态的两个固有频率除和地基压缩基床系数及梁的总质量有关外, 还和地基剪切基床系数与地基压缩基床系数之比以及梁的总长度有关, 但主振型不变, 同均匀温克尔地基.

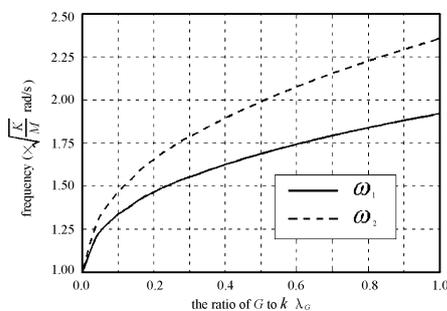


图 5 梁长为 5m 时频率—基床系数比曲线

Fig. 5 The natural frequency - ratio λ_c

ational curve when the whole length of the beam is 5 m long

图 5 和图 6 是截面宽度为单位宽度 ($b = 1$) 时双参数地基上自由梁的频率变化曲线. 从图 4 可知, 随着剪切基床系数与压缩基床系数之比不断加大, 均匀双参数地基梁的刚体模态频率增加, 当基床系数比为零时, 即相当于温克尔地基, 实际土体的剪切基床系数总会大于零, 因此按温克尔地基梁计算得到的刚体模态偏低. 从图 5 可知, 在地基总压缩刚度和梁总质量之比不变的情况下, 随着梁总长度的加大, 均匀双参数地基梁的刚体模态频率不

断减小, 但趋势越来越平缓.

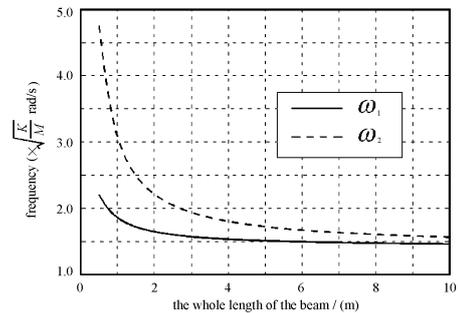


图 6 λ_c 为 0.25 时频率—梁总长度曲线

Fig. 6 The natural frequency - whole length of

the beam relational curve when the ratio λ_c is 0.25

4 结论

当约束不影响梁的刚体平动或转动时, 梁的平动或转动刚体模态就会出现. 不均匀地基梁不会出现严格意义上的刚体模态. 当地基的刚度远小于梁的刚度时, 地基梁会出现广义刚体模态, 即本文研究的刚体模态.

当压缩基床系数均匀时, 单参数地基自由梁两阶刚体模态的频率是相同的, 但振型不相同. 当压缩基床系数沿梁轴线线性增加或减小时, 单参数地基自由梁两阶刚体模态的频率是不相同的, 但频率是相同的和确定的. 当压缩基床系数非线性分布时, 单参数地基自由梁的刚体模态特性依赖于压缩基床系数分布的形状.

非均匀双参数地基上自由梁的刚体模态与压缩基床系数 k 、梁的总质量 M 、剪切基床系数 G 、基床系数 G/k 和梁的总长 l 有关. 基床系数 G/k 越大, 非均匀双参数地基上自由梁的刚体模态的频率越高. 当地基总压缩刚度和梁总质量之比不变时, 随着梁总长度的加大, 均匀双参数地基梁的刚体模态频率不断减小, 但趋势越来越平缓.

参 考 文 献

- 1 楼梦麟, 沈霞. 弹性地基梁振动特性的近似分析方法. 应用力学学报, 2004, 21(3): 150 ~ 152 (Lou ML, Shen X.

- An approach for analyzing dynamic characteristic of reinforced concrete Beam on elastic foundation. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2004, 21 (3): 150 ~ 152 (in Chinese))
- 2 易伟建,刘霞. 弹性地基梁损伤诊断研究. 计算力学学报, 2003, 20(4): 267 ~ 471 (Yi WJ, Liu X. Damage diagnosis of beams on elastic foundation. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20 (4): 267 ~ 471 (in Chinese))
 - 3 张望喜,易伟建. 双参数地基上厚薄板通用元与地基参数识别的挠度反分析. 工程力学, 2003, 20(6): 46 ~ 51 (Zhang WX, Yi WJ. Generalized conforming element for thick-thin slabs on double-parameter foundation and inverse analysis of deflection for foundation parameter identification. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(6): 46 ~ 51 (in Chinese))
 - 4 Yu TX, Chen XW, Chen YZ. Elastic-plastic beam-on-foundation subjected to mass impact or impulsive loading. *Computers and Structures*, 2002, 80: 1965 ~ 1973
 - 5 Cavalca KL, Cavalxante PF, Okabe EP. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2005, 80: 157 ~ 174
 - 6 鲍四元, 邓子辰. 哈密顿体系下矩形薄板自由振动的一般解. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 10 ~ 16 (Bao SY, Deng ZC. A general solution of free vibration for rectangular thin plates in Hamilton systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 10 ~ 16 (in Chinese))
 - 7 秦金旗, 唐驾时. 非经典阻尼系统的精确解. 动力学与控制学报, 2006, 4(2): 136 ~ 144 (Qin JQ, Tang JS. Exact solution of non-classical damping systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(2): 136 ~ 144 (in Chinese))
 - 8 杨端生, 黄炎, 潘军. 双参数弹性地基上板自由振动. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 92 ~ 96 (Yang DS, Huang Y and Pan J. Free vibration of plates on the bi-parameter elastic foundation. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 92 ~ 96 (in Chinese))
 - 9 邓学钧. 刚性路面设计. 北京: 人民交通出版社, 1990 (Dun XJ. Design of rigid pavement. Beijing: China Communication Press, 1990 (in Chinese))
 - 10 赵跃宇, 冯锐, 劳文全等. 空间曲线梁非线性动力学方程. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 34 ~ 38 (Zhan YY, Feng R, Lao WQ et al. Nonlinear kinematic equation of spatial curved beam. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 34 ~ 38 (in Chinese))

ANALYSIS ON RIGID MODAL OF FREE BEAM ON INHOMOGENEITY FOUNDATION*

Zhang Wangxi Yi Weijian Xie Xiaoran Chen Youkun
(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract The rigid modal of free beam on inhomogeneous Winkler foundation or double-parameter foundation relates to the interaction between beam and soil. When there is no constraint or the existent constraints don't influence beam's translation or rotation, the corresponding rigid modal will occur. In order to consider the effect of soil under and around the beam, double-parameter foundation model was introduced. Based on Hamilton principle and calculus of variation, the vibration equation of beam on double-parameter foundation was deduced, and the variable regularity of modal frequency and modal shape with the inhomogeneous foundation were analyzed.

Key words double-parameter foundation, free beam, rigid modal, inhomogeneity

Received 10 May 2007, revised 6 June 2007.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(50378034/E0807) and the National "985 Project"