

# 多腔充液晃动的等效特性

夏恒新<sup>1</sup> 宝音贺西<sup>2</sup> 郑亚<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学机械学院, 南京 210000) (2. 清华大学航天航空学院, 北京 100084)

**摘要** 用等效力学模型法研究了多腔体充液晃动问题. 在单腔体等效模型的基础上给出了多腔体充液体的等效模型, 并分析了液体分散到多个腔体后对飞行器带来的影响. 结果表明, 从频带的改善到作用力的减少等方面, 一般情况下多个腔体的力学特性更有利于飞行器的动力学与控制设计.

**关键词** 多腔充液, 晃动, 等效力学模型

## 引言

在航天历史上液体燃料的晃动曾引起过严重的事。于是美国、苏联从60年代开始系统深入的研究晃动问题, 得到了理论和试验多方面结果<sup>[1,2]</sup>. 目前在航天器控制系统设计中考虑晃动时最常用的方法为等效力学模型法<sup>[3]</sup>, 它能够很好的描述晃动液体的宏观力学特征. 等效模型有两种, 等效单摆和等效弹簧-质量, 首先由Graham等提出<sup>[4]</sup>, 两者本质上相同. 经过NASA的大力研究和学者们的长期努力, 各种形状贮箱的等效模型基本建立. 线性模型的等效参数, 除了等效阻尼以外已很成熟, 等效阻尼的计算也最近得到很大的进步, 小幅晃动情况下的等效阻尼计算基本得到解决<sup>[5,6]</sup>. 此外, 液体晃动与柔性附件的耦合运动<sup>[7]</sup>和晃动本身的非线性特性<sup>[8]</sup>也是受到广泛关注的课题.

最近, 有一种带有多个充液腔体飞行器的研究对充液动力学与飞行器控制系统的设计提出了一些新的问题. 本文以这种多充液腔飞行器为背景, 在Graham, Bauer等人工作的基础上, 研究多腔体充液的等效模型以及分析充液晃动质量、频率、作用力等影响飞行姿态的参数.

## 1 单腔体等效模型

本文采用弹簧-质量等效模型方法, 针对圆柱形贮箱展开讨论(背景飞行器的贮箱为圆柱形; 其他形状贮箱的问题原理上相同). 假设当地加速度

为  $a = 1\text{m/s}^2$ , 沿圆柱轴线方向. 晃动为小幅, 运动为无旋、液体为无粘性.

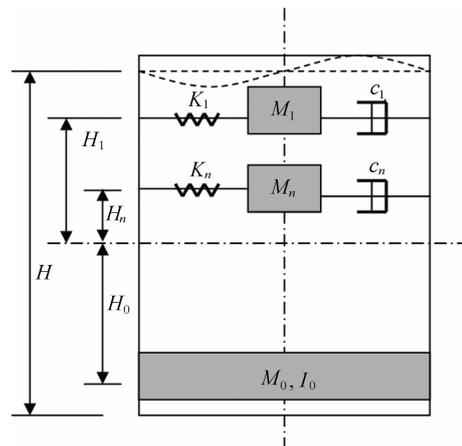


图1 等效模型示意图

Fig. 1 Equivalent mechanical model

根据等效模型的原则, 它必须满足:

- (1) 等效质量和惯量与原系统一致;
- (2) 质心与晃动系统一致;
- (3) 等效频率、模态与晃动系统一致;
- (4) 对外部激励的相应与原系统一致.

可见, 按上述原则建立的等效模型从宏观力学特征上是和原来的晃动系统是完全一致的, 且具有更简单的离散形式, 这也是在飞行器控制系统设计中采用等效模型的重要原因. 根据该原则学者们已经建立了各种形状贮箱的等效模型, 下面给出圆柱形贮箱的各类等效参数, 等效模型如图1所示.

假设充液总质量为  $M$ , 贮箱底面半径为  $R$ , 高为  $H$ , 则等效参数为<sup>[3]</sup>

$$M_n = M \frac{2R}{\xi_n H (\xi_n^2 - 1)} \tanh\left(\frac{\xi_n H}{R}\right) \quad (1)$$

$$K_n = \Omega_n^2 M_n = \frac{2a}{H (\xi_n^2 - 1)} \tanh^2\left(\frac{\xi_n H}{R}\right) \quad (2)$$

$$\Omega_n^2 = \frac{\alpha \xi_n}{R} \tanh\left(\frac{\xi_n H}{R}\right) \quad (3)$$

$$M_0 = M - \sum M_n \quad (4)$$

$$H_n = \frac{H}{2} \left[ 1 - \frac{4R}{\xi_n H} \tanh\left(\frac{\xi_n H}{2R}\right) \right] \quad (5)$$

$$M_0 = M - \sum M_n \quad (6)$$

其中,  $M_n$ 、 $K_n$ 、 $\Omega_n$ 、 $H_n$  分别为阶等效质量、等效刚度、等效圆频率和等效作用点高度.  $M_0$  为静止部分质量.  $\xi_n$  为方程  $\partial J_1(\xi_n, \rho/r)/\partial r|_{\rho=r} = 0$  的解,  $J_1$  为第一类一阶贝塞尔函数. 计算可得其值  $\xi_n = 1.841, 5.335, 8.535, 11.205, \dots$ . 当这些等效参数确定后可以列出系统等效方程, 这里只考虑横向运动  $x$  和俯仰运动  $\psi$ .

$$M_0 \ddot{x} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n (\ddot{x}_n + \dot{x}) = F \quad (7)$$

$$M_n (\ddot{x}_n + \dot{x} + H_n \dot{\psi}) + K_n x_n + 2M_n \Omega_n \zeta_n - M_n \alpha \psi = 0 \quad (8)$$

$$I_0 \ddot{\psi} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} H_n M_n (\ddot{x}_n + (H_n + H_0) \dot{\psi}) = T \quad (9)$$

其中  $F$  为作用在充液体上的外力、 $T$  为外力矩. 等效阻尼  $\zeta_n$  无解析表达式, 需用实验或数值计算确定<sup>[7,8]</sup>.

当贮箱做横向运动  $X_0 \sin \Phi t$ , 俯仰运动时  $\psi = \psi_0 \sin \phi t$ , 通过计算式(7) - (9), 可得液体对贮箱壁上的作用力(忽略阻尼)和力矩分别为

$$F = M X_0 \Phi^2 \sin \Phi t \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M} \left( \frac{\Phi^2}{\Omega_n^2 - \Phi^2} \right) \right] + M \psi_0 \phi^2 \sin \phi t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M} \left( \frac{H_n \phi^2 + a}{\Omega_n^2 - \phi^2} \right) \quad (10)$$

$$T = -M X_0 \Phi^2 \sin \Phi t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M} \left( H_n + \frac{a}{\Phi^2} \right) \left( \frac{\Phi^2}{\Omega_n^2 - \Phi^2} \right) + \psi_0 \phi^2 \sin \phi t \left[ I_0 - M_0 H_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{\Omega_n^2 - \Phi^2} (H_n^2 \Omega_n^2 + 2H_n a + \frac{a^2}{\Phi^2}) \right] \quad (11)$$

## 2 多腔体等效模型及其对飞行器上的作用

假设腔体仍为圆柱形(其他形状的贮箱可用同样的方法处理, 对应的等效参数有所区别), 若把液

体分散到  $\alpha$  个相同的更小的贮箱中, 设其底面半径为  $r = R/\beta$ ,  $\beta$  为大小贮箱的底面半径比值; 高为  $h = H/\eta$ ,  $\eta$  为大小贮箱高度比值. 根据圆柱形贮箱的等效参数可得每个小贮箱的等效参数为

$$m_n = \frac{M}{\alpha} \frac{2\eta R}{\beta \xi_n H (\xi_n^2 - 1)} \tanh\left(\frac{\beta \xi_n H}{\eta R}\right) \quad (12)$$

$$\omega_n^2 = \beta \frac{\alpha \xi_n}{R} \tanh\left(\frac{\beta \xi_n H}{\eta R}\right) \quad (13)$$

$$k_n = \omega_n^2 m_n = \frac{2\eta R}{H (\xi_n^2 - 1)} \tanh^2\left(\frac{\beta \xi_n H}{\eta R}\right) \quad (14)$$

$$h_n = \frac{H}{2\eta} \left[ 1 - \frac{4\eta R}{\beta \xi_n H} \tanh\left(\frac{\beta \xi_n H}{2\eta R}\right) \right] \quad (15)$$

晃动总质量为

$$\sum_{\alpha} m_n = \sum \alpha m_n = \sum M \frac{2\eta R}{\beta \xi_n H (\xi_n^2 - 1)} \tanh\left(\frac{\beta \xi_n H}{\eta R}\right) \quad (16)$$

其中,  $m_n$ 、 $k_n$ 、 $\omega_n$ 、 $h_n$  分别为小贮箱的  $n$  阶等效质量、等效刚度、等效圆频率和等效作用点高度.

从式(16)可知, 当  $\beta = \eta$  时晃动总质量不变, 晃动质量主要影响控制力的大小. 从式(13)可知, 即使  $\beta = \eta$ , 晃动基频将变大, 并有关系  $\omega_n^2 = \beta \Omega_n^2$ , 说明大贮箱通过分散到若干个较小的贮箱可改变晃动频率, 从而可避免耦合振动等问题. 因为当贮箱变大时基频接近控制系统本身频带, 多个贮箱的飞行器更不容易出现控制、结构、晃动耦合的问题. 其他参数可通过贮箱壁上的作用力来比较. 另外,  $h_n = H_n/\eta$ , 即每个晃动质量作用点的相对高度不变.

这里只考虑横向运动和俯仰运动. 当飞行器做横向运动  $X_0 \sin \Phi t$ , 俯仰运动  $\psi = \psi_0 \sin \phi t$  时, 多个贮箱对飞行器的反作用力和力矩为

$$F = M X_0 \Phi^2 \sin \Phi t \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha m_n}{M} \left( \frac{\Phi^2}{\omega_n^2 - \Phi^2} \right) \right] + M \psi_0 \phi^2 \sin \phi t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha m_n}{M} \left( \frac{h_n \phi^2 + a}{\omega_n^2 - \phi^2} \right) \quad (17)$$

$$T = -M X_0 \Phi^2 \sin \Phi t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha m_n}{M} \left( h_n + \frac{a}{\Phi^2} \right) \left( \frac{\Phi^2}{\omega_n^2 - \Phi^2} \right) + \psi_0 \phi^2 \sin \phi t \left[ I_0 - m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{\omega_n^2 - \phi^2} (h_n^2 \omega_n^2 + 2h_n a + \frac{a^2}{\phi^2}) \right] \quad (18)$$

当  $\beta = \eta$  时,

$$F = MX_0 \Phi^2 \sin \Phi t \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M} \left( \frac{\Phi^2}{\beta \Omega_n^2 - \Phi^2} \right) \right] + M \psi_0 \phi^2 \sin \phi t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M} \left( \frac{H_n \phi^2 / \eta + a}{\beta \Omega_n^2 - \phi^2} \right)$$

壁上的作用力一般会有一定的减少,但减少程度无法直接判断.下面用具体的算例来分析变化的具体数值.

### 3 算例分析

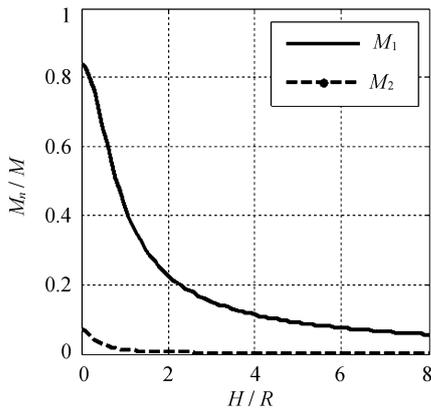


图2 晃动质量  
Fig. 2 Sloshing mass

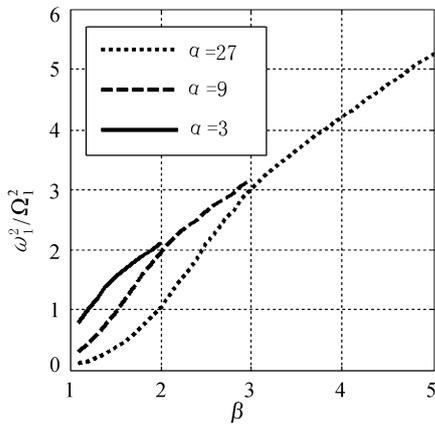


图3  $\omega_1^2/\Omega_1^2$  随  $\beta$  的变化率  
Fig. 3  $\omega_1^2/\Omega_1^2$  varying with  $\beta$

设  $M = 1000\pi \text{Kg}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $H = 1\text{m}$ . 图2为单个圆柱形贮箱晃动质量随高度底面半径比值的变化情况,其中  $M_1, M_2$  分别为一阶和二阶晃动质量.图3为多个贮箱时,对于不同的贮箱数,一阶晃动频率随比例尺寸的变化情况.当考虑同样质量的充液时,有关系  $\alpha = \beta^2 \eta$ ,三者只有两个独立.可见,多个贮箱时大部分情况晃动频率会减少数倍,但极端情况可能也会增加.图4为只存在不同频率的横向运

动时的贮箱壁上的反作用力的比值随  $\beta$  的变化率 ( $\alpha = 27$ ),其中  $F$  为单个贮箱时的作用力,  $f$  为同量液体分散到多个贮箱时的作用力.可见一般情况下单一贮箱的总作用力要比多个贮箱大数倍,  $\Phi = 1.3$  接近大贮箱的共振频率(1.323),此时大贮箱的作用力较大.图5表示单个大贮箱和27( $\beta = \eta = 3$ )个小贮箱的晃动反作用力随横向运动频率的变化,可见除小贮箱的共振频率(2.292)附近以外,大贮箱的反作用力更大.从图4和5都说明大贮箱的反作用力更大,但激励频率接近小贮箱的共振频率时小贮箱的反作用力更大,这个结论从定性也吻合实际情况.

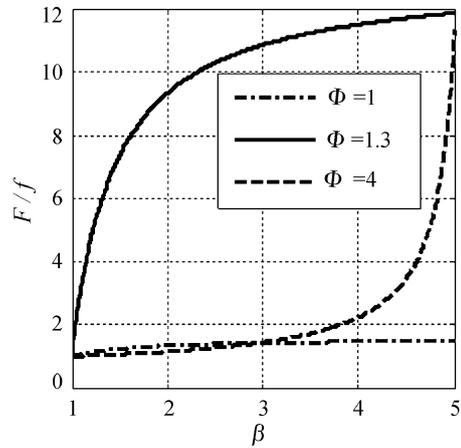


图4  $F/f$  随  $\beta$  的变化率  
Fig. 4  $F/f$  varying with  $\beta$

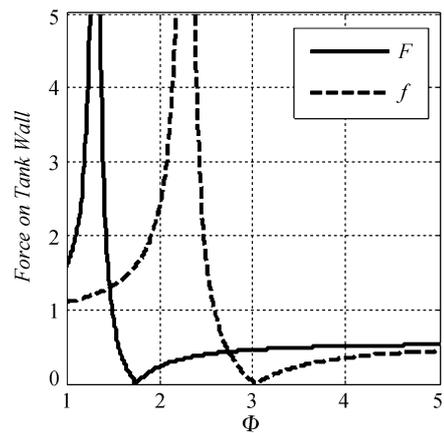


图5 作用力的比较  
Fig. 5 Comparison of the acting force

### 4 结论

本文用等效模型研究了多贮箱充液晃动特性.结果表明多个贮箱会提高晃动频率,从而飞行器携带大量液体时对避免耦合作用具有积极的作用.另

外,也大幅减少充液体对飞行器的作用力,从而减少控制能力的要求。

### 参 考 文 献

- 1 R. A. Ibrahim. Liquid sloshing dynamics. Cambridge, Cambridge University Press, 2005
- 2 N. N. Moiseyev and V. V. Rumyantsev. Dynamics stability of bodies containing fluid. Berlin, Springer - Verlag, 1968
- 3 屠善澄等. 卫星姿态动力学与控制(1). 北京: 中国宇航出版社, 2005 (Tu Shancheng et al. Satellite attitude dynamics and control (1). Beijing: Astronautical Press of China, 2005 (in Chinese))
- 4 E. W. Graham and A. M. Rodriguez. The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1952, 19(3): 381 ~ 388
- 5 Baoyin Hexi, LI Junfeng et al. Damping computation of liquid sloshing in containers aboard spacecraft, *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 19(12): 189 ~ 192
- 6 Wei Wang, Junfeng Li, and Tianshu Wang. Damping computation of liquid sloshing with small amplitude in rigid container using FEM. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22(1): 93 ~ 98
- 7 吕敬, 李俊峰, 王天舒, 岳宝增. 充液箱位置对航天器耦合特性影响分析. *动力学与控制学报*, 2007, 5(2): 159 ~ 164 (Lu Jing, Li Junfeng, Wang Tianshu, Yue Baozeng. Analysis on Effects of Fuel Position on the Attitude of Spacecraft With Elastic Appendages. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2): 159 ~ 164 (in Chinese))
- 8 贺元军, 王萍萍, 王本利, 马兴瑞. 谐波平衡法求解俯仰运动矩形贮箱中液体非线性晃动. *动力学与控制学报*, 2004, 2(4): 29 ~ 34 (He Yuanjun, Wang Pingping, Wang Benli, Ma Xingrui. Nonlinear Sloshing of Liquid in Rectangular Container Under Pitching Excitation by Harmonic Balance Method. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 29 ~ 34 (in Chinese))

## EQUIVALENT CHARACTERISTICS OF LIQUID SLOSHING IN MULTI-TANK

Xia Hengxin<sup>1</sup> Baoyin Hexi<sup>2</sup> Zheng Ya<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210000, China)

(2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** Using the equivalent mechanical model, this paper investigated multi-tank liquid sloshing problem. The multi-tank equivalent mechanical model was presented based on the single tank equivalent model, and the mechanical effects of the multi-tank sloshing on spacecraft were analyzed. The results show that the frequency and mechanical characteristics of the multi-tank system are usually better than its single counterpart for dynamics and control design of a spacecraft.

**Key words** multi-tank liquid, sloshing, equivalent mechanical model