第 5 卷第 4 期 2007 年 12 月
1672-6553/2007/05(4)/339-7

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 5 No. 4
Dec. 2007

LQ 终端控制器设计的生成函数方法及其应用*

吴志刚　谭述君

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连　116023)

摘要　利用哈密顿系统生成函数的性质求解 LQ 终端控制问题,并给出了相应的数值方法. 针对现有文献中此类问题的最优控制律在终端时刻存在无穷大增益的情况,利用第二类生成函数的性质求解哈密顿系统两端边值问题并构造了无终端奇异性的时变最优控制律. 然后根据哈密顿系统状态的正则变换性质导出了求解生成函数系数矩阵微分方程和计算时变控制律的矩阵递推格式. 最后用所提出的方法研究了以能量均衡消耗为约束条件的卫星编队重构问题,设计了符合要求的闭环控制系统并给出了数值仿真结果.

关键词　最优控制,　生成函数,　哈密顿系统,　编队重构,　卫星

引 言

LQ 控制是多变量线性系统最优控制的基本方法,其中 LQ 调节器(LQ Regulator)的应用最为广泛. 但是某些系统的最优控制则需要通过设计 LQ 终端控制器(LQ Terminal Controller)来实现,例如导弹拦截[1]、机械臂定位[2]、卫星编队重构等[3]. 根据系统终端状态约束的不同,可以将 LQ 终端控制分为"软终端约束"(soft terminal constraints, STC)和"硬终端约束"(hard terminal constraints, HTC)两类[1]. 与 LQ 调节器问题不同,定常系统 LQ 终端控制问题的控制律是随时间变化的. 设计 LQ 终端控制器的方法包括 Riccati 变换方法[1],解析方法[3][4],及最近提出的生成函数方法[5]等. 但是,上述文献中所得到的硬终端约束时变控制律在末端时刻的反馈增益矩阵为无穷大,因此不得不在末端时刻前的一小段时间内采用开环最优控制,文献[1]将这小段时间称为"blind time".

构造 LQ 终端控制问题的控制律不仅需要求解矩阵 Riccati 微分方程,还要求解另外两个与之耦合的矩阵微分方程组,通常可以利用 Runge - Kutta 法及文献[4]中所介绍的变量代换方法等求解这类微分方程组. 但是,利用哈密顿系统的正则变换性质可以构造更为精确和简洁的数值算法,基于最优控制和结构力学模拟关系的精细积分方法就属于这类方法[6]. 文献[6]中所定义的混合能函数与本文中所讨论的第二类生成函数是一致的.

基于文献[5]的方法,本文利用分析力学中哈密顿系统的生成函数来求解 LQ 终端控制问题,但是本文利用的是第二类生成函数而不是文献[5]所采用的第一类生成函数,并因此而避免了文献[5]中控制增益在终端时刻变成无穷大的情况. 需要指出的是,通过 Riccati 变换也可以得到不存在无穷大反馈增益矩阵的时变控制律,对此问题作者将另外撰文阐述. 文中将首先介绍 LQ 终端控制所导出的哈密顿系统两端边值问题,然后基于生成函数的性质求解这一边值问题,并构造了 LQ 软终端约束控制律和硬终端约束控制律. 随后基于哈密顿系统的正则变换导出一组矩阵递推计算公式,由这组递推公式可以求解哈密顿系统生成函数系数矩阵所满足的微分方程组,进而计算时变控制律. 文献[6]中是通过定义混合能由变分原理导出这组公式的,并建立了相应的精细积分算法体系. 本文中卫星编队重构问题的计算和仿真工作都是在基于精细积分算法的控制系统设计与仿真 MATLAB® 程序库(PIM - CSD)[6]基础上完成的.

1　LQ 终端控制与哈密顿系统两端边值问题

考虑线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

系统满足可控和可观条件,系统的初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. *LQ* 软终端约束控制的目标是极小化指

2007-04-05 收到第 1 稿,2007-06-30 收到修改稿.
* 国家自然科学基金(10632030)资助项目

标泛函

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{tf}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}[\boldsymbol{x}(t_f) - \hat{\boldsymbol{x}}_f]^T\boldsymbol{Q}_f[\boldsymbol{x}(t_f) - \hat{\boldsymbol{x}}_f] \tag{2}$$

式中的 $\hat{\boldsymbol{x}}_f$ 是希望达到的系统终端状态，加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{Q}_f$ 为半正定实对称矩阵，$\boldsymbol{R}$ 是正定实对称矩阵，J 也称作代价函数. 这种情况下系统的终端状态会存在一些小的误差，而采用 LQ 硬终端约束控制则可以实现系统终端状态的零误差，即要求

$$\boldsymbol{x}(t_f) = \hat{\boldsymbol{x}}_f \tag{3}$$

这就需要在代价函数(2)中再引入上述约束，构成新的泛函

$$\bar{J} = J + v[\boldsymbol{x}(t_f) - \hat{\boldsymbol{x}}_f] \tag{4}$$

文献[1]通过给出了求解这两类最优控制问题的转移矩阵方法和 Riccati 方程方法. 文献[5][7]基于 Hamilton－Jacobi 理论和生成函数方法来求解最优控制问题. 但是，对于硬终端约束控制，这些方法给出的时变控制律在末端时刻都存在反馈增益矩阵无穷大的现象. 本文将通过利用第二类生成函数构造控制律来避免末端时刻出现无穷大反馈增益矩阵，还需要指出的是，生成函数方法所得到的控制律形式可以最大限度地减少计算量，这一点与文[6]中的结论一致.

下面介绍这两类 LQ 终端控制所导出的哈密顿系统两端边值问题. 引入 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\lambda}(t)$，并定义哈密顿函数

$$\bar{H}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\lambda(t),t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + \lambda^2(t)[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)] \tag{5}$$

由最优性的必要条件得到最优控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 与 $\lambda(t)$ 的关系

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\lambda(t) \tag{6}$$

及 $\lambda(t)$ 所满足的微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}^T\lambda(t) \tag{7}$$

将式(6)代入式(5)可得哈密顿函数

$$H(\boldsymbol{x},\lambda,t) = \lambda^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\lambda^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\lambda + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

及哈密顿正则微分方程

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\\ -\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{A}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} = H\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中矩阵

$$H = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\\ -\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{A}^T\end{bmatrix} \tag{10}$$

软终端约束 LQ 控制导出的哈密顿两端边值问题的边界条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\quad \lambda(t_f) = \boldsymbol{Q}_f[\boldsymbol{x}(t_f) - \hat{\boldsymbol{x}}_f] \tag{11}$$

而硬终端约束 LQ 控制导出的哈密顿两端边值问题的边界条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\quad \lambda(t_f) = \boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{x}(t_f) + v \tag{12}$$

并且应注意有 $\boldsymbol{x}(t_f) = \hat{\boldsymbol{x}}_f$，下面介绍如何利用哈密顿系统生成函数方法求解这两个边值问题并构造控制律.

2 生成函数方法构造 LQ 终端控制律

首先介绍文中所涉及的哈密顿系统生成函数和正则变换的概念，然后利用生成函数求解 LQ 终端控制问题.

2.1 哈密顿系统的生成函数和正则变换

线性哈密顿系统(9)的状态变量之间的正则变换关系为

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \lambda(t)\end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \lambda(t_0)\end{Bmatrix} \tag{13}$$

上式中状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 是辛矩阵，即

$$\boldsymbol{\Phi}^T(t,t_0)J\boldsymbol{\Phi}(t,t_0) = J \tag{14}$$

其中

$$J = \begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix} \tag{15}$$

对于线性定常系统，$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 的值可以由矩阵指数来计算

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0) = e^{H(t-t_0)} \tag{16}$$

现在从生成函数的角度考察上述正则变换，将式(8)中的哈密顿函数表示成矩阵二次型形式

$$H(\boldsymbol{x},\lambda,t) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{A}^T\\ \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda\end{Bmatrix} \tag{17}$$

考虑到哈密顿函数的形式，这个系统的第二类生成函数的可定义为[5]

$$F_2(\boldsymbol{x},\lambda_0,t;t_0) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0) & \boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)\\ \boldsymbol{F}_{\lambda x}(t;t_0) & -\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda_0\end{Bmatrix} \tag{18}$$

需要注意的是，为了方便地利用精细积分程序库，这个定义与文献[5]中 $\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)$ 的符号不同. 生成函数的系数矩阵 $\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)$，$\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0) = \boldsymbol{F}_{\lambda x}^T(t;t_0)$

和 $\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)$ 是时间的函数,准确地讲是时间差 $t-t_0$ 的函数. 根据第二类生成函数的性质[8]可得

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{\partial F_2}{\partial\lambda_0}=[\boldsymbol{F}_{\lambda x}(t;t_0)\quad -\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda_0\end{Bmatrix}\tag{19}$$

$$\lambda=\frac{\partial F_2}{\partial x}=[\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)\quad \boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda_0\end{Bmatrix}\tag{20}$$

由此可以将哈密顿函数(17)表示成

$$H(\boldsymbol{x},\lambda,t)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda_0\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}I & \boldsymbol{F}_{xx}\\ 0 & \boldsymbol{F}_{\lambda x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{A}^T\\ \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{F}_{xx} & \boldsymbol{F}_{\lambda x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda\end{Bmatrix}\tag{21}$$

按照分析力学的理论,第二类生成函数 $F_2(\boldsymbol{x},\lambda_0,t;t_0)$ 满足下列 Hamilton－Jacobi 方程[8]

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+H(\boldsymbol{x},\frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{x}},t)=0\tag{22}$$

将式(18)和(21)代入 Hamilton－Jacobi 方程(22)中,并考虑到向量可$[\boldsymbol{x}^T\quad \lambda_0^T]^T$ 的任意性,得到一组矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{F}}_{xx}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}_{xx}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{F}_{xx}-\boldsymbol{F}_{xx}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{xx}=0\tag{23}$$

$$\dot{\boldsymbol{F}}_{x\lambda}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}-\boldsymbol{F}_{xx}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}=0\tag{24}$$

$$\dot{\boldsymbol{F}}_{\lambda\lambda}+\boldsymbol{F}_{\lambda x}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}=0\tag{25}$$

当 $t=t_0$ 时,第二类生成函数描述的是一个单位变换,即 $F_2(\boldsymbol{x},\lambda_0,t=t_0,t_0)=\boldsymbol{x}^T\lambda_0$,从而上述微分方程组的初始条件为

$$\boldsymbol{F}_{xx}(t_0;t_0)=0,\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t_0;t_0)=\boldsymbol{I},\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_0;t_0)=0\tag{26}$$

利用 Legendre 变换及式,可将第一类生成函数表示为

$$F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0,t;t_0)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_0\end{Bmatrix}^T\times$$

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{F}_{xx}+\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t;t_0) & -(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)\\ -(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t;t_0) & \boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t;t_0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_0\end{Bmatrix}\tag{27}$$

根据第一类生成函数的性质[8]可得

$$\lambda_0=-\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}_0}=[(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t;t_0)\quad -\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t;t_0)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_0\end{Bmatrix}\tag{28}$$

$$\lambda=\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}}=$$

$$[(\boldsymbol{F}_{xx}+\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t;t_0)\quad -(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_0\end{Bmatrix}\tag{29}$$

如果令上式中的 $t=t_f$,可以得到下列初始和末端时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 与协态 $\lambda(t)$ 的关系

$$\lambda_0=\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)\cdot[\boldsymbol{F}_{\lambda x}(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_f-\boldsymbol{x}_0]\tag{30}$$

$$\lambda_f=-(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{F}_{xx}+\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_f\tag{31}$$

2.2　LQ 软终端约束控制

将边界条件 $\lambda(t_f)=\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{x}(t_f)-\hat{\boldsymbol{x}}_f]$ 代入(31)后可以把 $\boldsymbol{x}_f$ 表示为 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_f$ 的函数

$$\boldsymbol{x}_f=-\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\cdot(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\boldsymbol{Q}_f\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_f\tag{32}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{S}}(t_f;t_0)=\boldsymbol{Q}_f-\boldsymbol{F}_{xx}(t_f;t_0)-(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\tag{33}$$

将式(30)代入第二类生成函数所满足的性质(20),可得

$$\lambda(t)=\boldsymbol{F}_{xx}(t_f;t_0)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)\{\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)[\boldsymbol{F}_{\lambda x}(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_f-\boldsymbol{x}_0]\}\tag{34}$$

再将式(32)代入式(34)就得到了协态 $\lambda(t)$ 的表达式

$$\lambda(t)=\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)\{\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)\}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\boldsymbol{Q}_f\hat{\boldsymbol{x}}_f\tag{35}$$

这样 LQ 软终端约束的控制律可以表示成

$$\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)\{\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)\}\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\boldsymbol{Q}_f\hat{\boldsymbol{x}}_f\tag{36}$$

另外,也可以用第一类生成函数所满足的关系式(30)(即式(28))来导出控制律,将式(32)代入到式(30)中,得到

$$\lambda_0=-[\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}\times(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})\times(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\boldsymbol{Q}_f\hat{\boldsymbol{x}}_f\tag{37}$$

由于上述公式对任意 $t<t_f$ 都成立,因此

$$\lambda(t)=-[\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}\times(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})\times(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\boldsymbol{Q}_f\hat{\boldsymbol{x}}_f\tag{38}$$

而其中的

$$\bar{\boldsymbol{S}}(t_f;t)=\boldsymbol{Q}_f-\boldsymbol{F}_{xx}(t_f;t)-(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t)\tag{39}$$

由此得到的 *LQ* 软终端约束的控制律为

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T[\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\times\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\times$$

$$(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\boldsymbol{Q}_f\hat{\boldsymbol{x}}_f \tag{40}$$

由于在 $t=t_f$ 时刻 $F_{\lambda\lambda}(t_f,t_f)=0$,使得这种形式的控制律在终端时刻不可避免地存在无穷大反馈增益,而控制律(36)则不存在这种现象. 不过这与所利用的生成函数方法有关,如果采用文献[1]中的 Riccati 变换方法,则上述 LQ 软终端约束控制不会出现无穷大的反馈增益.

2.3 LQ 硬终端约束控制

将边界条件 $\lambda(t_f)=\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{x}(t_f)+v$ 代入(31)后可以把 $\boldsymbol{x}_f$ 表示为 $\boldsymbol{x}_0$ 和 v 的函数

$$\boldsymbol{x}_f=-\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_0-\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)v \tag{41}$$

协态 $\lambda(t)$ 的表达形式可以通过把关于 $\boldsymbol{x}_f$ 的公式(41)代入式(34)而得到

$$\begin{aligned}\lambda(t)=&\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)\{\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+\\&(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)\}\boldsymbol{x}_0-\\&\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)v\end{aligned} \tag{42}$$

这样 LQ 硬终端约束的控制律可以表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)=&-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)\{\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+\\&(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)\}\boldsymbol{x}_0+\\&\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)v\end{aligned} \tag{43}$$

其中

$$v=-(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\boldsymbol{x}_0-\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)\hat{\boldsymbol{x}}_f \tag{44}$$

类似于 2.2 节中的 LQ 软终端控制问题,也可以利用第一类生成函数所满足的关系式(30)导出控制律,将式(41)代入到式(30)中,得到

$$\begin{aligned}\lambda_0=&-[\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}\times\\&(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\boldsymbol{x}_0-(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})\times\\&(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)v\end{aligned} \tag{45}$$

由于上述公式对任意 $t<t_f$ 都成立,因此

$$\begin{aligned}\lambda(t)=&-[\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\times\\&\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\boldsymbol{x}(t)-\times\\&(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)v\end{aligned} \tag{46}$$

LQ 硬终端约束控制律为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)=&\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T[\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}(t_f;t_0)+(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\times\\&\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)(\boldsymbol{F}_{x\lambda}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1})(t;t_0)]\boldsymbol{x}(t)+\\&\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda x})(t_f;t_0)\bar{\boldsymbol{S}}^{-1}(t_f;t_0)v\end{aligned} \tag{47}$$

由于在 $t=t_f$ 时刻 $F_{\lambda\lambda}(t_f,t_f)=0$,使得这种形式的控制律在终端时刻也不可避免地存在无穷大反馈增益,而控制律(36)则不存在这种现象. 对于硬终端约束问题,采用文献[1]的 Riccati 变换导出的 LQ 控制律在末端时刻也会出现无穷大的反馈增益,需要根据 Lagrange 乘子的性质及系统的初值条件方可得到不包含无穷大反馈增益的 LQ 控制律,对此问题我们将另外撰文讨论.

至此已经通过生成函数方法得到了本文开始所提出的两类 LQ 终端约束控制问题. 构成控制律增益矩阵的生成函数系数矩阵 $\boldsymbol{F}_{xx(t;t_0)}$,$\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)$和 $\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)$满足微分方程组(23)~(25),这组矩阵微分方程可以通过精细积分方法来求解,算法及其所依据的理论在文献[6]中都有详细的介绍,这里不再赘述. 下面将直接基于哈密顿系统状态变量的正则变换性质导出与文献[6]中的区段合并公式完全相同的公式.

3 生成函数系数矩阵微分方程的离散和数值求解

由式(19)和(20)可知,生成函数描述了状态变量之间的变换关系,状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 反映的也是状态变量之间的变换关系,将哈密顿系统的状态转移矩阵写成分块形式

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{xx}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{\lambda\lambda}(t,t_0)\end{bmatrix} \tag{48}$$

在 $\boldsymbol{\Phi}_{11}(t,t_0)$可逆的前提下(若不满足此条件,可以定义第三类生成函数并利用 $\boldsymbol{\Phi}_{22}^{-1}(t,t_0)$计算),可将式(13)转换为下列形式

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \lambda(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t,t_0) & -\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{\lambda\lambda}(t,t_0)-\boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}^{-1}(t,t_0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \lambda(t_0)\end{Bmatrix} \tag{49}$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$是辛矩阵,将其分块矩阵式(48)代入 $\boldsymbol{\Phi}^T(t,t_0)J\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=J$ 到中可以导出

$$\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-T}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}_{\lambda\lambda}(t,t_0)-\boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}^{-1}(t,t_0) \tag{50}$$

这样式(49)可以写成更简洁的形式

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \lambda\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t,t_0) & -\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-T}(t,t_0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda_0\end{Bmatrix} \tag{51}$$

将式(51)与式(19)~(20)对比可得,

$$\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)=\boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t;t_0)\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t;t_0),$$
$$\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)=\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-T}(t;t_0),\boldsymbol{F}_{\lambda x}(t;t_0)=\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t;t_0),$$
$$\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)=\boldsymbol{\Phi}_{xx}^{-1}(t;t_0)\boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}(t;t_0) \tag{52}$$

由上述公式及辛矩阵的性质还可得到与其互逆的函数关系,

$$\boldsymbol{\Phi}_{xx}(t;t_0)=\boldsymbol{F}_{\lambda x}^{-1}(t;t_0),\boldsymbol{\Phi}_{x\lambda}(t,t_0)=(\boldsymbol{F}_{\lambda x}^{-1}\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda})(t;t_0),$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{\lambda x}(t,t_0)=(\boldsymbol{F}_{xx}\boldsymbol{F}_{\lambda x}^{-1})(t;t_0),$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{\lambda\lambda}(t,t_0)=(\boldsymbol{F}_{x\lambda}+\boldsymbol{F}_{xx}\boldsymbol{F}_{\lambda x}^{-1})(t;t_0) \tag{53}$$

文献[9]中也给出了上述关系式.

如果矩阵指数计算中的 Δt 比较大,则直接根据式(53)来求解微分方程(23)~(25)将无法保证计算结果的可靠性. 但是利用哈密顿系统的正则变换性质可以构造生成函数系数矩阵的计算格式. 需要指出的是,通常哈密顿系统辛积分算法指的是对系统状态向量的保辛计算,而本文所关注的是利用两个状态向量之间的正则变换矩阵,即状态转移矩阵,进行计算. 矩阵的计算结果要确保系统任意两个不同时刻的状态向量之间满足正则变换关系,这也是生成函数的性质[8].

将区间$[t_0,t_f]$离散为$[t_0,t_1,t_2,L,t_{k-1},t_k,t_{k+1},L,t_f]$,考虑任意三个时刻 $t_{k-1}<t_k<t_{k+1}$(并不要求等步长离散). 哈密顿系统从状态$[\boldsymbol{x}_{k-1}^T,\ \lambda_{k-1}^T]^T=[\boldsymbol{x}(t_{k-1})^T,\lambda(t_{k-1})^T]^T$ 变换到另一个状态$[\boldsymbol{x}_k^T,\ \lambda_k^T]^T=[\boldsymbol{x}(t_k)^T,\lambda(t_k)^T]^T$ 的过程是正则变换 ,对应的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t_k,t_{k-1})$是辛矩阵;设由此状态再到下一个状态$[\boldsymbol{x}_{k+1}^T,\lambda_{k+1}^T]^T=[\boldsymbol{x}(t_{k+1})^T,\lambda(t_{k+1})^T]^T$ 的转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)$,则从$[\boldsymbol{x}_{k-1}^T,\lambda_{k-1}^T]^T$ 到$[\boldsymbol{x}_{k+1}^T,\lambda_{k+1}^T]^T$ 的状态转移矩阵可以表示为 $\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_{k-1})=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)\boldsymbol{\Phi}(t_k,t_{k-1})$,辛矩阵的乘积仍然是辛矩阵. 根据

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ \lambda_k\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(t_k,t_{k-1})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k-1}\\ \lambda_{k-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k+1}\\ \lambda_{k+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ \lambda_k\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k+1}\\ \lambda_{k+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_{k-1})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k-1}\\ \lambda_{k-1}\end{bmatrix} \tag{54}$$

及状态变换关系,再利用 $\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_{k-1})=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t_k)\boldsymbol{\Phi}(t_k,t_{k-1})$,可得

$$\boldsymbol{F}_{xx}(t_{k+1};t_{k-1})=\boldsymbol{F}_{xx}(t_{k+1};t_k)+\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t_{k+1};t_k)[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_{xx}(t_k;t_{k-1})\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_{k+1};t_k)]^{-1}\boldsymbol{F}_{xx}(t_k;t_{k-1})\times\boldsymbol{F}_{x\lambda}^T(t_{k+1};t_k) \tag{55}$$

$$\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_{k+1};t_{k-1})=\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_k;t_{k-1})+\boldsymbol{F}_{x\lambda}^T(t_k;t_{k-1})\times\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_{k+1};t_k)[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_{xx}(t_k;t_{k-1})\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_{k+1};t_k)]^{-1}\times\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t_k;t_{k-1}) \tag{56}$$

$$\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t_{k+1};t_{k-1})=\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t_{k+1};t_k)[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_{xx}(t_k;t_{k-1})\times\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t_{k+1};t_k)]^{-1}\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t_k;t_{k-1}) \tag{57}$$

由于 t_{k-1},t_k,t_{k+1}是任意三个相邻的离散时刻,所以上述公式是计算生成函数系数矩阵的递推公式,即求解矩阵微分方程组(23)~(25)的递推计算公式. 注意三个递推公式中矩阵求逆部分是相同的.

文献[6]中基于结构力学与最优控制的模拟关系,利用混合能变分原理导出了上述公式,其中的各系数矩阵称为混合能矩阵,混和能与分析力学中的生成函数是一致的. 而本文是根据哈密顿系统状态转移矩阵与生成函数之间的关系,以及辛矩阵的性质来导出上述矩阵递推计算公式的,这是两者的不同之处. 按公式(55)~(57)进行递推运算就可以求解矩阵微分方程组(23)~(25),获得第二类生成函数 $F_2(\boldsymbol{x},\lambda_0,t,t_0)$的系数矩阵随时间的变化值,从而可以确定该生成函数,并用于构造最优反馈控制律随时间而变化的增益矩阵. 当然,按递推公式(55)~(57)进行计算需要一个初始值,也就是要首先计算一个比较小的 Δt 时间段上的矩阵 $\boldsymbol{F}_{xx}(t;t_0)$,$\boldsymbol{F}_{x\lambda}(t;t_0)$和 $\boldsymbol{F}_{\lambda\lambda}(t;t_0)$作为递推计算的初始值. 由于 Δt 比较小,可以按文献[9]的方法通过状态转移矩阵的计算来实现;也可以按照文献[6]中的步骤,利用 Taylor 级数展开来计算,并注意只计算增量以保持有效数字. 当问题的边界条件发生变化时,利用已有的生成函数计算结果可以很容易地重新计算系统的最优控制律.

4　LQ 终端控制器的应用 – 卫星编队重构

在卫星编队控制中,以节省能量和能量的均衡消耗为目标的优化控制是其中一个重要的问题. 文献[3]研究了深空环境中的卫星编队重构问题,并给出了简单的编队重构开环最优控制律解析表达式. 对于比较复杂的编队飞行控制问题,则只能用数值方法求解.

作为 LQ 终端控制器生成函数设计方法的一个应用,本节考虑在近地圆轨道运行的两颗卫星所组成的编队的重构控制问题,为便于比较计算结果,采用了文献[3]中给出的例题,并给出了开环最优控制的仿真结果. 两颗卫星的相对运动由 Hill 方程来描述,其状态方程形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

式中向量 $\boldsymbol{x}\in R^6$ 表示相对位置和相对速度,向量 $\boldsymbol{u}\in R^6$ 代表输入的控制力. 为实现最少能量消耗和

平衡能量消耗的目标，定义

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{tf}[\boldsymbol{u}_1^T(t)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{u}_1(t) + \boldsymbol{u}_2^T(t)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{u}_2(t) + [\boldsymbol{u}_2(t) - \boldsymbol{u}_1(t)]^T\hat{\boldsymbol{R}}[\boldsymbol{u}_2(t) - \boldsymbol{u}_1(t)]]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{tf}\boldsymbol{u}^T(t) \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 + \hat{\boldsymbol{R}} & -\hat{\boldsymbol{R}} \\ -\hat{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{R}_2 + \hat{\boldsymbol{R}} \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{tf}\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \quad (58)$$

此 LQ 控制开环控制律的解析表达式为[3]

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T e^{-A^T t}\left[\int_{t_0}^{tf} e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T e^{-A^T(t_f-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]^{-1} \times [\boldsymbol{x}_f - e^{A(t_f-t_0)}\boldsymbol{x}_0] \quad (59)$$

在计算中取参考轨道高度为 300km，仿真算例取 $m_1 = 200\mathrm{kg}$，$m_2 = 100\mathrm{kg}$，初始相对位移和速度 $x_0 = [100,100,100,0,0,0]^T$，控制目标是使末端时刻相对位移和速度 $x_f = [0,20,40,0,0,0]^T$，即初始时刻和末端时刻两颗卫星的相对速度均为 0，$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2 = I$，$\hat{\boldsymbol{R}} = 350 \times I$，编队重构过程时间取 300s. 这里可以按 LQ 硬终端约束控制问题来考虑编队重构控制律的设计计算.

在没有模型误差和初始相对位置误差干扰的情况下，仿真结果表明开环最优控制可以很好地完成编队重构，如图 1 和图 2 所示，控制结束时刻的

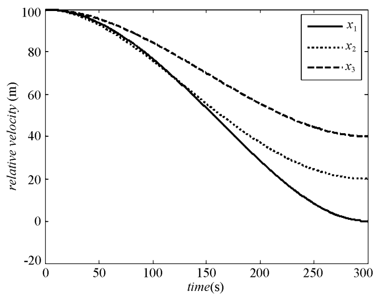

图 1　无干扰开环控制时相对位置的变化

Fig. 1　Time history of relative distance of open - loop control system without disturbance

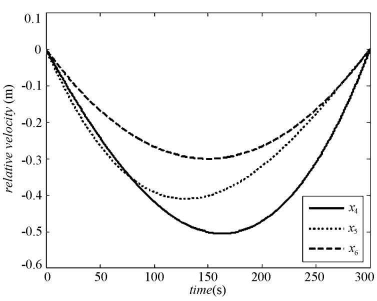

图 2　无干扰开环控制时相对速度的变化

Fig. 2　Time history of relative velocity of open - loop control system without disturbance

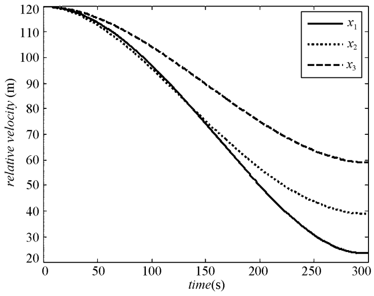

图 3　有干扰开环控制时相对位置的变化

Fig. 3　Time history of relative distance of open - loop control system with disturbance

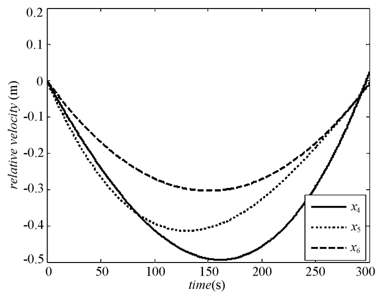

图 4　有干扰开环控制时相对速度的变化

Fig. 4　Time history of relative velocity of open - loop control system with disturbance

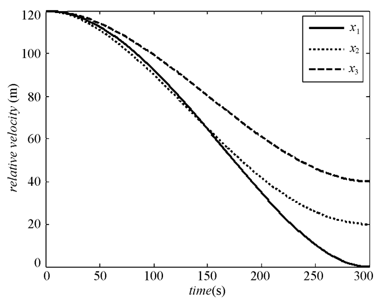

图 5　有干扰闭环控制时相对位置的变化

Fig. 5　Time history of relative distance of closed - loop control system with disturbance

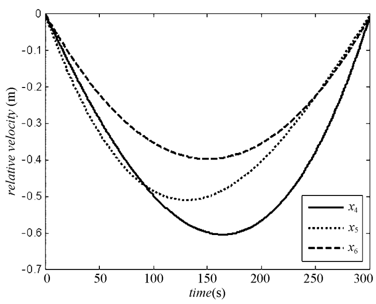

图 6　有干扰闭环控制时相对速度的变化

Fig. 6　Time history of relative velocity of closed - loop control system with disturbance

相对位置和相对速度都符合要求. 但是如果存在某些干扰因素，例如：参考轨道高度和初始位置存在

一些偏差,设实际参考轨道高度为 360km 而不是系统设计时取的 300km,初始相对位置为 $x_0 = [120,120,120,0,0,0]^T$,则按原参数设计的开环控制将无法实现预定的编队重构位置,如图 3 和图 4 所示,末端时刻相对位置的误差比较大,相对速度也存在明显的误差. 但如果采用闭环控制,例如用 LQ 硬终端约束控制来实现编队重构,则系统对上述误差干扰不敏感,能够准确地到达预定的相对位置,在结束时刻的相对速度也满足要求. LQ 硬终端约束控制的仿真结果见图 5 和图 6.

参 考 文 献

1 A. E. Bryson. Dynamic optimization. Addison Wesley, Menlo Park, California, 1999

2 A. V. Savkin and I. R. Petersen. Robust control with a terminal state constraint. *Automatica*, 1996, 32(7): 1001 ~ 1005

3 A. Rahmani, M. Mesbahi and F. Y. Hadaegh. On the optimal balanced – energy formation flying maneuvers. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, San Francisco, California, 2005 – 5836: 15 ~ 18

4 J. N. Juang, J. D. Turner, and H. M. Chun. Closed – form solutions for a class of optimal quadratic regulator problems with terminal constraints. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1986, 108: 44 ~ 48

5 C. Park, V. Guibout, and D. J. Scheeres. Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2006, 29(2): 321 ~ 331

6 钟万勰,吴志刚,谭述君. 状态空间控制理论与计算. 科学出版社,北京,2007 (Wanxie Zhong, Zhigang Wu, Shujun Tan. Theory and computation of state space control systems. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese))

7 V. M. Guibout, D. J. Scheeres. Solving relative two – point boundary value problems: spacecraft formation flight transfers application. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2004, 27(4): 693 ~ 704

8 H. Goldstein, Classical Mechanics. Addison – Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, 1980

9 S. W. Gao, Z. G. Wu, B. L. Wang, X. R. Ma. A computational method for interval mixed variable energy matrices in precise integration. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22 (5): 557 ~ 563

GENERATING FUNCTION APPROACH FOR LQ TERMINAL CONTROLLERS WITH APPLICATIONS *

Wu Zhigang　Tan Shujun

(*State Key Lab of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract This paper presented a generating function approach to LQ control problems with terminal constraints and the corresponding numerical methods. Different from other existing methods, the presented time – varying optimal control law does not have singularity at terminal time. The time – varying control law was constructed by solving associated Hamiltonian two – point boundary value problems via the second type generating function. Then, motivated by practical applications and computational requirements, a recursive algorithm for solving matrix differential equations of the generating function and computing optimal terminal control laws was also derived by using canonical transformation of Hamiltonian systems. As an example, a closed – loop optimal terminal controller for balanced – energy reconfiguration of formation flying satellites was designed and simulated by the proposed approaches.

Key words optimal control, generating function, Hamiltonian system, formation reconfiguration, satellite

Received 5 April 2007, revised 30 June 2007.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10632030)