

# 两个不同 Sprott 混沌系统的控制与同步研究

徐登国

(云南楚雄师范学院数学系, 楚雄 675000)

**摘要** 首先采用线性反馈方法来控制混沌的 Sprott C 系统和混沌的 Sprott F 系统,使这两个混沌系统的轨道被控制到他们各自的每一个平衡点. 然后使用主动控制方法来同步这两个不同的混沌系统,使混沌的 Sprott C 系统和 Sprott F 系统的轨道重合. 并用数值模拟证实了理论的正确性.

**关键词** Sprott 系统, 混沌控制, 线性反馈, 混沌同步, 主动控制

## 引言

混沌的基本特征之一是运动轨道的不稳定性,表现为对初始条件的敏感依赖性,又称为蝴蝶效应<sup>[1]</sup>. 混沌有什么可利用之处和怎样用它来为人类服务,这是人们普遍关注的问题,也是科学工作者需要不断探索和深入研究的新问题. 利用混沌的前提是驾驭它,也就是控制混沌. 1989年 A. Hubler 在他发表的一篇文章中首次提到混沌可以被控制的现象<sup>[2]</sup>. 次年 E. Ott、G. Grebogi 和 J. Yorke 提出控制混沌的思想,并基于混沌轨道是由无穷多不稳定周期轨道构成的基本性质,提出了一种参数微扰法控制混沌运动的具体实施办法,现在称之为 OGY 方法<sup>[3]</sup>. 随后的 10 多年中,有关混沌控制的研究得到了蓬勃的发展. 人们提出各式各样控制混沌的方法及其理论,如:自适应控制法<sup>[4]</sup>、延迟反馈控制法<sup>[5]</sup>、脉冲控制法<sup>[6]</sup>等,并在自然科学的众多实际领域内的实验和应用中得到证实. 近年来,这一研究方向的理论和实验以及应用上的工作进展异常迅速. 在研究控制混沌工作的同时, T. M. Carroll 和 L. M. Pecora 提出在混沌信号驱动下,两条不同初始值的混沌轨道可以同步化<sup>[7]</sup>. 研究者们同样提出了各种各样的混沌同步方法<sup>[8-9]</sup>.

本文用 Sprott 系列系统中的 C 系统和 F 系统进行混沌控制与同步研究<sup>[10]</sup>,由于这两个系统的右边各项系数都是常数,故在系统的右边加上可变化的系数参数来进行研究,右边每一项都可以加上可变的系数,但经过尺度变换<sup>[11]</sup>,可将一些系数化

为 1, Sprott C 系统只有一个系数不能化为 1,而 Sprott F 系统只有两个系数不能化为 1. 在下面的研究中,把带参数的系统称为其对应的推广系统.

## 1 使用线性反馈方法来控制混沌

### 1.1 Sprott C 类推广系统的线性反馈控制

考虑如下的 Sprott C 类推广系统

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = ax - y \\ \dot{z} = 1 - x^2 \end{cases} \quad (1)$$

当  $a=1$  时,该系统就是混沌的 Sprott C 系统. 我们将使用线性反馈控制方法来控制该系统,动力学系统(1)的混沌行为可以被控制到两个平衡点中的任何一个,为此,考虑如下带有控制项的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = yz + u_{1(t)} \\ \dot{y} = ax - y + u_{2(t)} \\ \dot{z} = 1 - x^2 + u_{3(t)} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $u_{1(t)}, u_{2(t)}, u_{3(t)}$  是外加的控制输入项,它们将被适当的设计来使系统的混沌轨道被控制到系统(1)的任何一个平衡点. 为了实际应用,我们应该设计更为简单的控制器,于是我们考虑以下的控制律

$$\begin{pmatrix} u_{1(t)} \\ u_{2(t)} \\ u_{3(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix}$$

其中,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  是系统(1)的平衡点,  $k_1, k_2$  和  $k_3$  是反馈项系数,通过选择这些常数使得控制系统(2)

的轨道被稳定到混沌系统(1)的平衡点,因此,控制系统(2)可以变为

$$\begin{cases} \dot{x} = yz - k_1(x - \bar{x}) \\ \dot{y} = ax - y - k_2(y - \bar{y}) \\ \dot{z} = 1 - x^2 - k_3(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (3)$$

控制系统(3)有一个平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . 下面讨论控制系统(3)平衡解的稳定性:

控制系统(3)在平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  的线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} = \begin{pmatrix} -k_1 & \bar{z} & \bar{y} \\ a & -(1+k_2) & 0 \\ -2\bar{x} & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4)$$

通过讨论线性化系统(4)的平衡解的稳定性,我们可以得到控制系统(3)的稳定性.

**命题1** 控制系统(3)的平衡解是渐近稳定的,如果成立条件:

$$k_2 > -1, k_1 + k_3 > 0, k_1 k_3 + 2a > 0$$

证明:很容易求出线性化系统(4)在  $E_1(1, a, 0)$  的特征多项式为

$$(\lambda + 1 + k_2)[\lambda^2 + (k_1 + k_3)\lambda + k_1 k_3 + 2a] = 0$$

当  $k_2 > -1, k_1 + k_3 > 0, k_1 k_3 > 2a$  成立时,可得以上特征方程的根

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{-(k_1 + k_3) \pm \sqrt{(k_1 + k_3)^2 - 8a}}{2}$$

均具有负实部,所以平衡解  $E_1(1, a, 0)$  是渐近稳定的. 命题得证.

由于平衡点  $E_2(-1, -a, 0)$  与  $E_1(1, a, 0)$  对称,容易得到线性化系统(4)在  $E_2(-1, -a, 0)$  的特征值与  $E_1(1, a, 0)$  一样,所以只要命题1的条件成立,控制系统(3)在平衡点  $E_2(-1, -a, 0)$  也是稳定的.

### 1.2 Sprott F 类推广系统的线性反馈控制

下面考虑如下的 Sprott F 类推广系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = ax + by \\ \dot{z} = x^2 - z \end{cases} \quad (5)$$

当  $a = -1, b = 0.5$  时,该系统就是混沌的 Sprott F 系统. 与前面的做法类似,我们考虑如下的控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z - k_1(x - \bar{x}) \\ \dot{y} = ax + by - k_2(y - \bar{y}) \\ \dot{z} = x^2 - z - k_3(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (6)$$

控制系统(6)的线性化 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 1 \\ a & b - k_2 & 0 \\ 2x & 0 & -1 - k_3 \end{pmatrix}$$

Jacobian 矩阵  $J$  在平衡点  $S_0(0, 0, 0)$  的特征方程为

$$(\lambda + k_3 + 1)[\lambda^2 + (k_1 + k_2 - b)\lambda + k_1 k_2 - k_1 b - a] = 0$$

解得

$$\lambda_1 = -k_3 - 1, \lambda_{2,3} = \frac{b - (k_1 + k_2) \pm \sqrt{(k_1 - k_2 + b)^2 + 4a}}{2}$$

**命题2** 控制系统(6)的平衡点  $S_0(0, 0, 0)$  是渐近稳定的,如果成立以下条件:

$$k_3 > -1, k_1 + k_2 > b, k_1 k_2 - k_1 b - a > 0$$

同样我们可以求出 Jacobian 矩阵  $J$  在平衡点

$S_1(\frac{a}{b}, -\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^2}{b^2})$  的特征方程为

$$(\lambda + k_1)(b - k_2 - \lambda)(\lambda + k_3 + 1) - \frac{2a}{b}(b -$$

$$k_2 - \lambda) + a(\lambda + k_3 + 1) = 0$$

当  $k_2 - k_3 = b + 1$  时,  $\lambda_1 = b - k_2$ ,

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(k_1 + k_3 + 1) \pm \sqrt{(k_1 + k_3 + 1)^2 - 4(k_1 k_3 + k_1 - \frac{2a}{b} - a)}}{2}$$

**命题3** 若以下条件成立时,控制系统(6)的

平衡点  $S_1(\frac{a}{b}, -\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^2}{b^2})$  是渐近稳定的:

$$k_2 - k_3 = b + 1, k_2 > b, k_1 + k_3 + 1 > 0,$$

$$k_1 k_3 + k_1 - \frac{2a}{b} - a > 0$$

### 1.3 数值模拟

用四阶五级 Runge-Kutta-Fehlberg 法来解微分方程(3)、(6),使用 MATLAB 语言来进行数值模拟,在(3)中取  $a = 1$ ,此时系统(1)出现混沌行为,

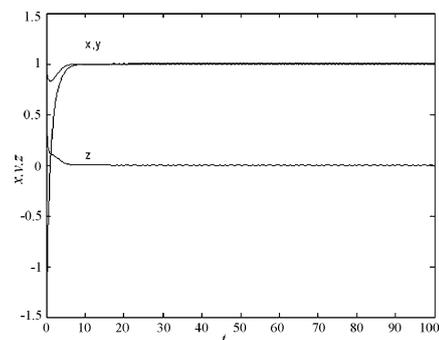


图1 系统(1)混沌轨线被稳定到平衡点  $S_1(1, 1, 0)$

Fig. 1 Stabilizing chaotic orbit of system (1) to equilibrium  $S_1(1, 1, 0)$

而在(6)中取  $a = -1, b = 0.5$  此时系统(5)出现混沌行为,图1,2 控制参数按顺序分别取为  $k_1 = k_2 = 0, k_3 = 0; k_1 = -1, k_2 = k_3 = 0; k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 0$ .

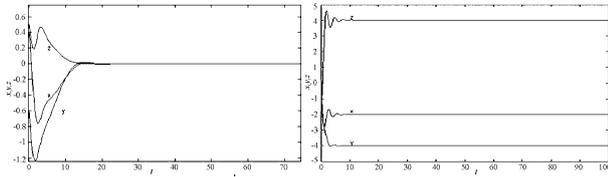


图2 系统(5)混沌轨线分别  
被稳定到平衡点  $S_0(1,1,0)$  和  $S_1(-2, -4, 4)$

Fig. 2 Stabilizing chaotic orbit of  
system (5) to equilibrium  $S_0(1,1,0)$  and  $S_1(-2, -4, 4)$

## 2 不同系统的混沌同步

### 2.1 使用主动控制使两个不同的混沌系统同步

假设 Sprott C 类推广系统驱动 Sprott F 类推广系统,因此我们定义驱动和响应系统如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 z_1 \\ \dot{y}_1 = ax_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = 1 - x_1^2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = y_2 + z_2 + u_{1(t)} \\ \dot{y}_2 = bx_2 + cy_2 + u_{2(t)} \\ \dot{z}_2 = x_2^2 - z_2 + u_{3(t)} \end{cases} \quad (8)$$

我们在(8)中加入了三个控制函数  $u_{1(t)}, u_{2(t)}$  和  $u_{3(t)}$ ,目的是要确定这三个控制函数以便使得系统(7)和系统(8)同步,为了确定这些控制函数,把(8)减去(7)得差变量方程

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 + e_3 + y_1 + z_1 - y_1 z_1 + u_{1(t)} \\ \dot{e}_2 = be_1 + ce_2 + (b-a)x_1 + (c+1)y_1 + u_{2(t)} \\ \dot{e}_3 = -e_3 - 1 + x_1^2 + x_2^2 + u_{3(t)} \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1$  为两个系统状态变量之差. 令

$$\begin{aligned} u_{1(t)} &= v_{1(t)} - y_1 - z_1 + y_1 z_1, \\ u_{2(t)} &= v_{2(t)} - (b-a)x_1 - (c+1)y_1, \\ u_{3(t)} &= v_{3(t)} + 1 - x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

故系统(9)变为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 + e_3 + v_{1(t)} \\ \dot{e}_2 = be_1 + ce_2 + v_{2(t)} \\ \dot{e}_3 = -e_3 - 1 + v_{3(t)} \end{cases} \quad (10)$$

控制系统(10)是一个有控制输入  $v_{1(t)}, v_{2(t)}$  和  $v_{3(t)}$  的线性化系统,只要这些反馈输入能使系统(10)

渐进稳定,则当时间  $t$  趋于无穷大时,  $e_1, e_2$  和  $e_3$  将趋于 0. 这就意味着系统(7)和系统(8)在反馈控制下是同步的. 控制输入  $v_{1(t)}, v_{2(t)}$  和  $v_{3(t)}$  有很多种选择,我们选择

$$\begin{pmatrix} v_{1(t)} \\ v_{2(t)} \\ v_{3(t)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

其中  $A$  是一个  $3 \times 3$  的常数矩阵,为了使上面的条件得到满足,应该适当选择矩阵  $A$  的元素使得反馈系统(10)的所有特征值具有负实部. 选择如下的形式

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -b & -c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在这种特定选择下,闭环系统(10)有特征值  $-1, -1$  和  $-1$ ,这时,当时间  $t$  趋于无穷时,差状态变量  $e_1, e_2$  和  $e_3$  趋于 0,因此 Sprott C 系统和 Sprott F 系统之间的同步就达到了.

### 2.2 数值模拟

在这一节,使用 MATLAB 语言来进行数值模拟,用四阶五级 Runge-Kutta-Fehlberg 法解微分方程(7)、(8)和(10),参数的值分别选为  $a = 1, b = -1, c = 0.5$ . 这时,两个系统都出现混沌行为. 驱动和响应系统的初始条件分别为  $x_1(0) = 1.5, y_1(0) = 0, z_1(0) = 1.5$  和  $x_2(0) = 0, y_2(0) = 1, z_2(0) = 1$ , Sprott F 系统被控制到 Sprott C 系统,如图3所示.

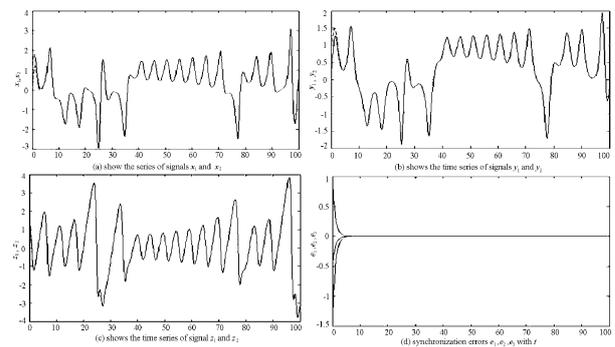


图3 两个不同的 Sprott 混沌系统的同步图

Fig. 3 The diagram of  
synchronization between two different Sprott systems

## 3 结论

通过对 Sprott C 系统和 Sprott F 系统进行混沌控制与同步的研究,使用线性反馈方法把两个混沌系统的轨线控制到各自的每一个平衡点,并用数值

模拟的方法进行证实;用主动控制的方法使这两个不同的混沌系统达到完全同步,同样用数值模拟证明了该方法的有效性.

### 参 考 文 献

- 1 王琳,倪樵,刘攀,黄玉盈. 一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 1~6 (Wang Lin, Ni Qiao, Liu Pan, Huang Yuying. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz-like system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 1~6 (in Chinese))
- 2 Hubler A, Luscher E. Resonant stimulation and control of nonlinear oscillators. *Nature*, 1989, 76: 67~71
- 3 Ott E, Grebogi C, Yorke J. Controlling chaos. *Physics Review Letters*, 1990, 64: 1196~1199
- 4 Teh Lu Liao, Sheng Hung Lin. Adaptive control and synchronization of Lorenz systems. *Journal of the Franklin Institute*, 1999, 336: 925~937
- 5 Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letter*, 1992, A170: 421~428
- 6 Sun J T, Zhang Y P, Wu Q D. Impulsive control for the stabilization and synchronization of Lorenz systems. *Physics letters A*, 2002, 298: 153~160
- 7 Pecora LM, Carroll TM. Synchronization of chaotic systems. *Phys Rev Lett*, 1990, 64(8): 821~824
- 8 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. 动力学与控制学报, 2006, 1~4 (Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1~4 (in Chinese))
- 9 Yassen MT. Adaptive control and synchronization of a modified Chua's circuit system. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 135: 113~128
- 10 Sprott JC. Some simple chaotic flows. *Physics Review*, 1994, E50: 647~671
- 11 Zhang F, Heidel J. Non-chaotic behavior in three-dimensional quadratic systems. *Nonlinearity*, 1997, 5(10): 1289~1303

## CONTROLLING AND SYNCHRONIZATION OF TWO DIFFERENT SPROTT CHAOTIC SYSTEMS

Xu Dengguo

(Department of Mathematics, Chuxiong Normal University, Chuxiong 675000, China)

**Abstract** Firstly, the chaotic Sprott C system and Sprott F system were controlled by using linear feedback. And the chaotic orbits of the two systems were stabilized to equilibrium. Secondly, the synchronization between the two different Sprott chaotic systems was achieved by using active control. And their orbits were completely identical. Thirdly, simulation results were given to demonstrate the effectiveness of the proposed methods.

**Key words** Sprott system, chaotic control, linear feedback, chaotic synchronization, active control