

一个新类 Lorenz 混沌系统的动力学分析及电路仿真*

李险峰¹ 张建刚² 褚衍东¹ 常迎香²

(1. 兰州交通大学非线性研究中心, 兰州 730070) (2. 兰州交通大学数理与软件工程学院, 兰州 730070)

摘要 提出了一个新的三维自治类 Lorenz 系统. 理论分析了该系统的动力学特性, 并通过数值计算分析了系统在平衡点处的稳定性, 以及产生 Hopf 分岔的条件. 通过计算系统的时间序列的 Lyapunov 指数谱、Lyapunov 维数、分岔图、Poincaré 截面图等研究了系统的动力学特性. 最后对该系统的一个混沌吸引子进行了实际电路的设计与仿真模拟.

关键词 新类 Lorenz 系统, Lyapunov 指数, 分数维数, Poincaré 截面图, 电路仿真

引言

混沌振动是存在于自然界中的一种普遍运动形式, 是在确定系统中产生的不规则运动, 其基本特征是具有对初始条件的敏感性^[1]. 人们在认识和研究混沌理论和应用的过程中, 逐步认识到混沌的研究价值和应用价值. 随着对混沌的深入研究和实际工程需要, 各种非线性混沌系统也被相继提出, 并得到了广泛的研究. 特别是自从上世纪 60 年代提出 Lorenz 系统^[2]以来, 许多新的自治混沌系统也相继提出并得到了广泛的研究^[3-8]. 其中最为著名的是 Rossler 系统^[3], 在 Lorenz 混沌系统反控制中被发现的 Chen 系统^[4, 5]、Lü 系统^[6]、统一混沌系统^[7]、Liu 系统^[8]以及 Qi 系统^[9-11]等, 特别是 Lü 系统在 Lorenz 系统和 Chen 系统之间架起了一道桥梁, 实现了从一个系统到另一个系统的过渡^[6, 7].

本文提出了一个新的类 Lorenz 系统, 该系统含有 2 个非线性项, 文中利用理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数谱、Lyapunov 维数、分岔图、Poincaré 截面图等分析了该系统的基本动力学特性, 从数值和理论上分析了系统的混沌特性. 结果表明该系统和 Lorenz 系统族中^[12-14]每一个系统有着类似的性质, 并且奇怪吸引子都具有较低分数维数. 最后设计了模拟该混沌系统的实际电路, 同时基于 EWB 软件平台及电子仪器进行了实际电路仿真验证.

1 新的类 Lorenz 系统的模型及基本动力学特性

该系统是根据 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子线性部分系数的特征, 构造了一个三维非线性动力学系统. 系统的模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = abx - axz \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x = (x, y, z)^T \in R^3$ 为系统的状态变量, a, b, c 为参数, 且 $a \neq 0$. 系统(1)中共含有 2 个非线性项, 分别是 xz, xy . 可以通过严格的数学证明系统(1)与上述 Lorenz 系统族中每一个系统都不具有拓扑等价性, 是一个完全新的类 Lorenz 系统. 由于严格证明拓扑等价性是十分困难和繁琐的, 故在此略去.

1.1 几条最基本的性质

(1) 对称性和不变性

首先, 注意到系统(1)在变换 $S: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 下对于所有的参数 a, b, c 具有不变性, 则此变换表明系统关于 z 轴是对称的, 即若 ψ 是系统的解, 则在此意义下, $S\psi$ 也是系统的解. 显然, z 轴本身也是系统的一条解轨线, 也就是说, 若 $t = 0$ 时有 $x = 0, y = 0$, 则对于所有的 $t > 0$, 仍然有 $x = 0, y = 0$. 更进一步说, 对于 $t \rightarrow 0, z$ 轴上所有的解轨线都趋向于原点.

2007-03-23 收到第 1 稿, 2007-05-13 收到修改稿.

* 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZS042-B25-049); 兰州交通大学科研基金(DXS-2006-74, DXS-2006-75)

(2) 耗散性和吸引子的存在性

可以验证,系统(1)在 $a > 0, b < 0, c > 0$ 时是关于原点是全局,一致渐近稳定的. 可以构造如下的正定的 Lyapunov 函数

$$V(x, y, z) = -bx^2 + y^2 + az^2 \quad (2)$$

容易验证

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= -2bx\dot{x} + 2y\dot{y} + 2az\dot{z} = -2bx(a(y-x)) + 2y(ax(b-z)) + 2az(xy-cz) = \\ &2a(bx^2 - cz^2) < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

同时,考虑系统(1)的向量场散度(4),也就是系统的 Jacobin 矩阵(5)的迹(6)

$$\nabla V = \frac{1}{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \text{div} \vec{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \quad (4)$$

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a(b-z) & 0 & -ax \\ y & x & -c \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{Tr}(J) = -(a+c) \quad (6)$$

又由于所有 Lyapunov 特征指数之和反映相空间体积元随时间演化的变化率,根据 Liouville 定理,变化率反映为系统的 Jacobin 矩阵的迹,则有

$$\begin{aligned} \nabla V = \frac{1}{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \text{div} \vec{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \text{Tr}(J) = \\ -(a+c) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = \sum LES \end{aligned} \quad (7)$$

$$V(t) = V(0)e^{-(a+c)t} \quad (8)$$

其中, $\lambda_i (i=1,2,3)$ 为矩阵(5)的特征根, LES 为系统的 3 个 Lyapunov 特征指数.

所以只要 $a+c > 0$, 则系统(1)始终是耗散的, 并以指数形式收敛. 即

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = e^{-(a+c)t} \quad (9)$$

也就是说,一个初始体积为 $V(0)$ 的体积元在时间 t 时收缩为体积元 $V(0)e^{-(a+c)t}$. 这就意味着,当 $t \rightarrow \infty$ 时,包含系统轨线的每一个体积元都以指数的速率 $-(a+c)$ 收缩到 0. 因此,系统的所有轨线最终都会被限制在一个体积为 0 的点集合上,并且他的渐近动力学行为会被固定在一个吸引子上,这就说明了吸引子的存在性. 并且当且仅当 $a+c=0$, 系统(1)是保守的,由 Liouville 定理可知,保守系统在运动过程中其相体积保持不变^[15]. 当参数 $a=5, b=4, c=2$ 时,系统是耗散的, $-(a+c) = -7 < 0$, 有一个混沌吸引子,如图 1 和图 2 所示,经计算得

该混沌吸引子的三个 Lyapunov 指数分别为 $LEs = (0.6263, 0, -7.6263)$, 和 $\sum LEs = -7 = -(a+c)$, 由 Kaplan-Yorke 猜想公式可求得 Lyapunov 维数 $D_{KY} = 2.0821$.

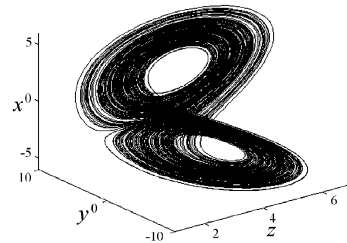


图 1 3 维相空间中的一个典型混沌吸引子

Fig. 1 Phase trajectory of a typical chaotic attractor in 3-D space

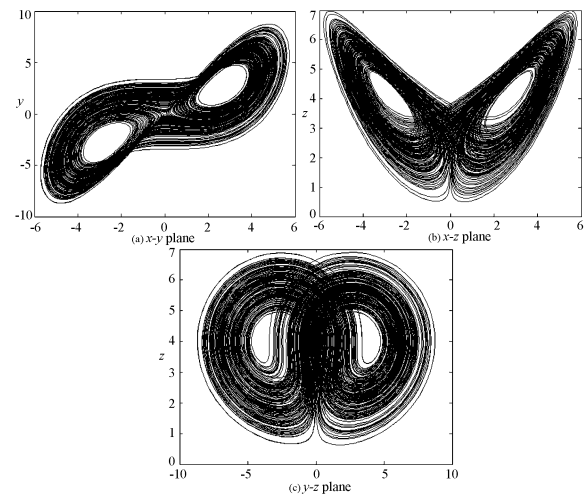


图 2 图 1 中的混沌吸引子在不同平面上的投影

Fig. 2 Various projections of the chaotic attractor shown in Fig. 1

1.2 平衡点稳定性分析

如果 $bc > 0$ 系统的三个平衡点为 $O(0,0,0), P_+(\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, b), P_-(-\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, b)$, 如果 $bc < 0$, 系统只有一个平衡点 $O(0,0,0)$. 对于 $bc = 0$, 有唯一的平衡点,形式为 $(0,0,b), b \in R$.

这里只考虑 $bc > 0$ 的条件下的三个平衡点为 O, P_+, P_- 的稳定性的情况,其中不动点 P_+ 和 P_- 对称的落在 z 轴的两侧.

命题 1 如果 $a \neq 0, b > 0$, 则平衡点 O 都是不稳定的.

证明:根据系统(1)的 Jacobin 矩阵(5),可得系统(1)在平衡点 O 处的线性化后的 Jacobin 矩阵(10)和特征多项式(11)分别为

$$J_o = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ ab & 0 & -ax \\ y & x & -c \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\lambda^3 + (a+c)\lambda^2 + (ac - a^2b)\lambda - a^2bc = 0$$

$$(\lambda + c)(\lambda^2 + a\lambda - ba^2) = 0 \quad (11)$$

三个特征值分别为

$$\lambda_1 = -c, \lambda_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{ba^2 + \frac{a^2}{4}}$$

所以对于 $a > 0$ 有 $\lambda_2 = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{4b+1}) > 0, a < 0$

有 $\lambda_3 = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{4b+1}) > 0$, 得证.

下面来讨论平衡点 P_+ 和 P_- 的稳定性. 由于系统(1)在变换 $S: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 下对于所有的参数 a, b, c 具有不变性, 系统关于 z 轴对称, 而且平衡点 P_+ 和 P_- 也关于 z 轴对称, 所以二者的性质完全相同, 只需分析其中之一即可.

考虑线性变换 $T: (x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$

$$T: \begin{cases} x = X + \sqrt{bc} \\ y = Y + \sqrt{bc} \\ z = Z + b \end{cases} \quad (12)$$

于是系统(1)就化为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(Y - X) \\ \dot{y} = -a(X + \sqrt{bc})Z \\ \dot{z} = (X + \sqrt{bc})(Y + \sqrt{bc}) - c(Z + b) \end{cases} \quad (13)$$

经过坐标平移变化以后, 原系统(1)的不动点 P_+ 在线性变换 T 的作用下新的系统(13)的坐标原点 $O'(0, 0, 0)$. 下面讨论新的平衡点 $O'(0, 0, 0)$ 的稳定性.

系统(13)在平衡点 O' 处的线性化后的 Jacobin 矩阵(14)和特征多项式(15)分别为

$$J_o' = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -az & 0 & -a\sqrt{bc} \\ Y + \sqrt{bc} & X + \sqrt{bc} & -c \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & -a\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -c \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\lambda^3 + (a+c)\lambda^2 + (ac + abc)\lambda + 2a^2bc > 0 \quad (15)$$

由 Routh-Hurwitz 判据, 当且仅当满足下列条件时

$$\begin{cases} a+c > 0 \\ (a+c)(ac + abc) - 2a^2bc > 0 \end{cases} \quad (16)$$

特征方程(15)的根都有负实部.

所以当且仅当条件(16)满足时, 系统(1)的平衡点 P_+ 和 P_- 才是渐近稳定的. 并且还可以推证特征根方程(15)有一对纯虚根, 另一个根具有负实

部当且仅当以下条件成立

$$\begin{cases} a+c > 0 \\ ac(b+1) > 0 \\ a+c+bc = ab \end{cases} \quad (17)$$

并且其中的一个实特征根 $\lambda_1 = -(a+c)$, 一

对纯虚根 $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{ac(b+1)}$.

于是可以得到下面的结论

命题 2 如果条件(17)满足时, 系统(1)有一个负实根 $\lambda_1 = -(a+c)$ 和一对共轭的纯虚根 $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\frac{2a^2c}{a-c}}$, 并且 $Re(\lambda_c'(c)) \neq 0$, 所以此时平衡点 P_+ 失稳, 发生 Hopf 分岔.

证明: 令 $\Theta = (X, Y, Z)^T$, 则有

$$\dot{\Theta} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a(Y-X) \\ -a(X + \sqrt{bc})Z \\ (X + \sqrt{bc})(Y + \sqrt{bc}) - c(Z + b) \end{pmatrix} = f(\Theta, a, b, c) \quad (18)$$

容易验证对于 $\forall a, b, c \in R$, 有 $f(0, a, b, c) = 0$ 恒成立.

并且由条件(17)可知, $b \neq \pm 1$, 且参数 a, b 与 c 之间的相互关系为

$$a = \frac{c(b+1)}{b-1}, c = \frac{a(b-1)}{b+1}, b = \frac{a+c}{a-c} \quad (19)$$

于是从特征方程(15), 可以得到

$$\lambda_c' = -\frac{\lambda^2 + a(b+1)\lambda + 2a^2b}{3\lambda^2 + 2(a+c)\lambda + ac(b+1)} \quad (20)$$

$$\lambda_c' = -\frac{\lambda^2 + a(b+1)\lambda + 2a^2b}{3\lambda^2 + 2(a+c)\lambda + ac(b+1)} \Big|_{c=\frac{a(b-1)}{b+1}} = -\frac{(b+1)\lambda^2 + a(b+1)^2\lambda + 2a^2b(b+1)}{3(b+1)\lambda^2 + 4ab\lambda + a^2(b^2-1)} \quad (21)$$

将 $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{ac(b+1)}$ 代入(21)中有

$$Re(\lambda_c'(c)) = -\frac{b^3 + b^2 - b - 1}{2b^3 + 10b^2 - 2b - 2} =$$

$$-\frac{(b^2-1)(b+1)}{2b^3 + 10b^2 - 2b - 2} \neq 0$$

$$Im(\lambda_c'(c)) = \frac{\sqrt{b-1}(b^4 - 2b^2 + 1)}{2b^4 + 8b^3 - 12b^2 + 2} =$$

$$\frac{\sqrt{b-1}(b+1)^2(b-1)^2}{2b^4 + 8b^3 - 12b^2 + 2} \neq 0$$

于是可以得出, 系统(13)在平衡点 $O'(0, 0, 0)$ 处发生了 Hopf 分岔, 所以系统(1)在平衡点 P_+ (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, b) 处发生了 Hopf 分岔, 并且经过一系

列复杂的推导之后,可得 Hopf 分岔是亚临界的.

2 数值仿真与电路实现

2.1 分岔图、Lyapunov 指数谱、Lyapunov 维数、Poincaré 截面图

下面考虑系统(1)在特定参数下的动力学行为仿真

情形 1 考虑固定参数 $b = 4, c = 2$, 改变控制参数 a 在区间 $[0, 60]$ 内连续变化. 图 3 为系统(1)关于 z 轴的分岔图以及所对应的 Lyapunov 指数谱.

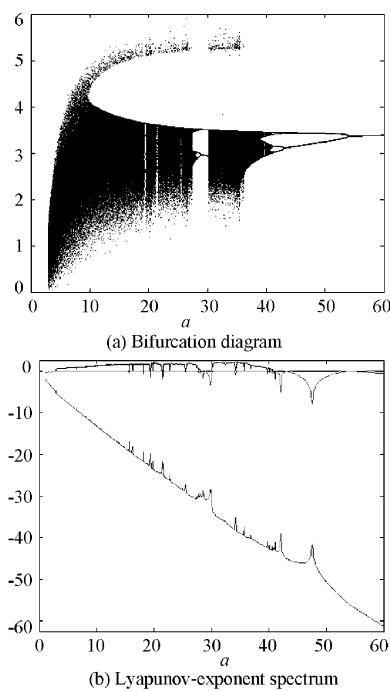


图 3 控制参数 a 变化时的关于 z 轴的分岔图及 Lyapunov 指数谱

Fig. 3 Bifurcation diagram and Lyapunov - exponent spectrum for specific values set ($b = 4, c = 2$) versus the control parameter a

情形 2 固定参数 $b = 4, a = 5, c$ 作为分岔参数, $c \in [0.1, 0.6]$ 系统关于 z 轴的分岔图以及所对应的 Lyapunov 指数谱如图 4 所示. 沿着控制参数增大的方向, 系统由倍周期分岔通向混沌, 混沌区域内含有数个较窄的周期窗口, 并且每一个周期窗口又都是经由倍周期分岔走向混沌. 并且通过 Kaplan - Yorke 猜想计算系统的吸引子的 Lyapunov 维数可知, 系统(1)在这组参数下, 随着控制参数的变化, 分数维数数值都很小, $D_{KY} < 2.1$, 如图 4 (c) 所示. 图 4(d) 为 $c = 0.3$ 时, 在 $x - y (z = 0)$ 平面上的 Poincaré 映像, 其中吸引子的叶片清晰可见, 并且吸引子的叶片被折叠, 这就导致了系统复杂的动

力学行为.

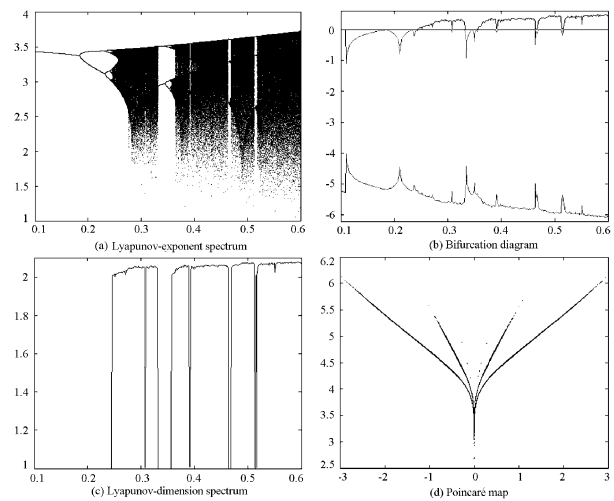


图 4 系统(1)在控制参数 c 变化时的动力学仿真

Fig. 4 Dynamics simulations for specific values set ($a = 5, b = 4$) versus the control parameter a

情形 3 考虑固定参数 $a = 5, c = 2$, 改变参数 $b, b \in [1, 20]$, 系统关于 z 轴的分岔图以及所对应的 Lyapunov 指数谱如图 5 所示. 随着分岔控制参

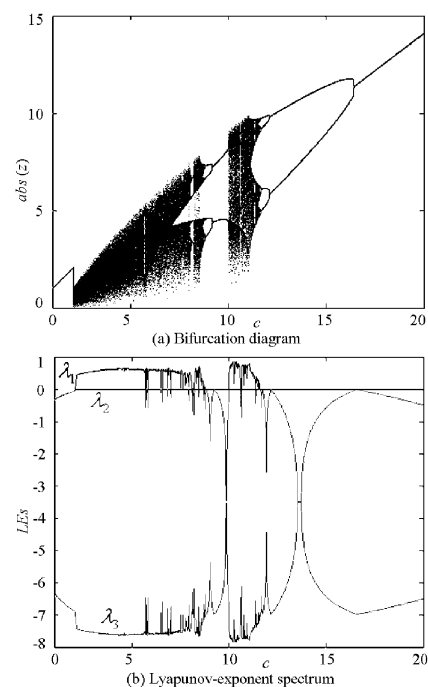


图 5 控制参数 b 变化的关于 z 轴的分岔图及 Lyapunov 指数谱

Fig. 5 Bifurcation diagram and Lyapunov - exponent spectrum for specific values set ($a = 5, b = 2$) versus the control parameter a

数 b 的逐渐增大, 系统由不动点突然直接进入一个较长的含有数个周期窗口的混沌区域, 在每一个区域长短不等的周期窗口内都内嵌着倍周期分岔序

列,并且都是从周期到混沌的阵发过渡.最后,系统历经了一段较长的逆倍周期分岔,并且由 Kaplan - Yorke 猜想公式确定的系统吸引子的分数维数也很低,以上这两个特征与 Lorenz 系统特别类似.

2.2 电路实现

下面设计一个电路来实现这个新的混沌系统的吸引子.这里设计的电路由三个部分组成,可实现系统(1)在确定参数下的吸引子,如图6所示.这三部分将三个状态标量连接成一个整体.运动放大器,模拟乘法器,线性电阻和电容器等来执行加、减、乘运算,为了明晰起见,各个电子元件参数标示在图上.图7为采用 EWB 软件平台对电路进行仿真实验的结果.比较图2,图7,不难发现数值仿真与电路试验观测得到的不同平面上的相图是基本一致的.

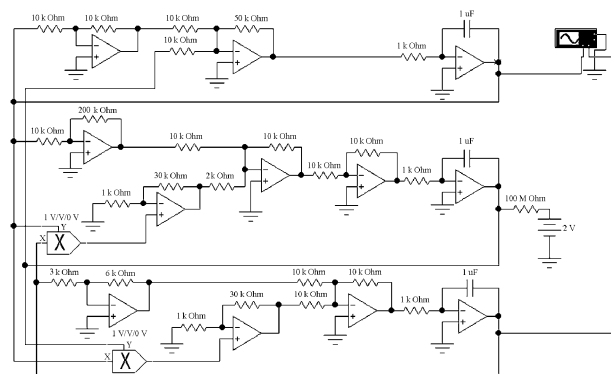


图6 基于 EWB 软件平台的电路图
Fig.6 Circuit diagram for realizing the chaotic attractor of system based on EWB software

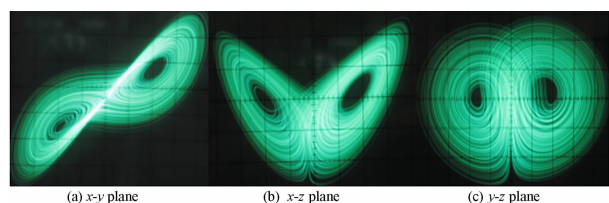


图7 实际电路仿真实验图

Fig.7 Experimental observations of the chaotic attractor in different planes

3 结论

本文构造并研究了一类新的类 Lorenz 系统.较为细致地研究了该系统的一些非线性动力学行为,其中包括一些基本的动力学特征、分岔、周期窗口和通向混沌道路等,并对该系统的一个混沌吸引子设计了实际电路来仿真验证.但是需要指出的是该混沌系统仍然有许多复杂的动力学行为没有被揭

示出来,因此该系统值得更进一步的研究.

参 考 文 献

- 1 刘延柱,陈立群.非线性振动.北京:高等教育出版社,2001(Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear vibration. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese))
- 2 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, 20: 130 ~ 141
- 3 Rossler, O E. An equation for continuous chaos. *Physics Letter A*, 1976, 57: 397 ~ 398
- 4 Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9: 1465 ~ 1466
- 5 Celikovsk ý S, Chen G R. On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems via a nonlinear observed approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 8: 1789 ~ 1812
- 6 Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 3: 659 ~ 661
- 7 Lü J H, Chen G R, Cheng D Z et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 2917 ~ 2926
- 8 Liu C X, Liu T, Liu L. A new chaotic attractor. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 5: 1031 ~ 1038
- 9 Qi G Y, Chen G R, Du S Z, Chen Z Q, Yuan Z Z. Analysis of a new chaotic system. *Physica A*, 2005, 352(2-4): 295 ~ 308
- 10 Qi G Y, Chen G R. Analysis and circuit implementation of a new 4D chaotic system. *Physics Letters A*, 2006, 352: 386 ~ 397
- 11 王琳,倪樵,黄玉盈. Qi 四维系统的暂态混沌现象. *动力学与控制学报*, 2007, 5(1): 18 ~ 22 (Wang Lin, Ni Qiao, Huang Yuying. Chaotic transients in Qi's 4D system. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 18 ~ 22 (in Chinese))
- 12 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步.北京:科学出版社,2003(Chen G R, Lü J H. Dynamics of the Lorenz system family: analysis, control and synchronization. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 13 王琳,倪樵,刘攀,黄玉盈.一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (Wang Lin, Ni Qiao, Liu pan, Huang Yuying. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz - like system.

- Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 14 严艳,张隆阁. Lorenz 系统的分数阶控制算法. 动力学与控制学报, 2006, 4(2): 132 ~ 135 (Yan Yan, Zhang Longge. Fractional control algorithm of Lorenz system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(2): 132 ~ 135 (in Chinese))
- 15 刘秉正,彭解华. 非线性动力学. 北京:高等教育出版社, 2004 (Liu Bingzheng, Peng Jiehua. *Nonlinear Dynamics*. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese))

DYNAMICS ANALYSIS AND CIRCUIT EXPERIMENT SIMULATION FOR A NEW LORENZ-LIKE CHAOTIC SYSTEM*

Li Xianfeng¹ Zhang Jiangan² Chu Yandong¹ Chang Yingxiang²

(1. *Nonlinear Science Research Center, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

(2. *School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

Abstract A new Lorenz-like chaotic system was presented. The nonlinear characteristic and basic dynamic properties of this three-dimensional autonomous system were studied by means of nonlinear dynamics theory, numerical simulation, Lyapunov-exponent spectrum, Lyapunov dimension, bifurcation diagram and Poincaré section map. The oscillator circuit of the new chaotic system was designed by using EWB software, and a typical chaotic attractor was demonstrated by circuit experiment.

Key words new Lorenz-like system, Lyapunov exponent, fractal dimension, Poincaré section map, circuit simulation