

具有双面约束单点摩擦多体系统的数值计算方法*

王晓军¹ 彭慧莲² 王琪²

(1. 常州工学院机电工程学院, 常州 213002) (2. 北京航空航天大学理学院, 北京 100083)

摘要 研究了一类具有双面约束单点摩擦的单自由度多体系统动力学方程的算法问题. 首先给出了系统的动力学方程, 该方程具有很强的非光滑性, 不能应用已有的一些光滑系统的数值方法研究系统的动力学特性. 因此, 本文利用方程的特点和所求变量的物理含义, 给出了一种简便的数值计算方法. 该方法的计算效率和精度与迭代法相比均较高.

关键词 多体系统, 双面约束, 摩擦

引言

考虑干摩擦多体系统动力学的研究属于非光滑多体系统动力学的研究范畴, 已有十多年的历史. 所谓非光滑多体系统是指其动力学方程关于状态变量或时间不连续. 产生不连续的原因主要有: 摩擦、碰撞、控制器等^[1-3]. 由于方程的不连续, 给数值计算带来很多困难, 已有的一些光滑系统的数值方法不能直接应用到非光滑多体系统.

为研究含摩擦多体系统动力学的数值算法, 人们首先研究具有单面约束的多体系统^[4], 如文献[3]应用线性互补方法给出了考虑干摩擦多体系统的数值算法, 文献[5]应用第一类 Lagrange 方程建立了含摩擦单面约束的多体系统动力学方程, 并给出了相应的算法; 由于系统含摩擦的约束面是单面, 因此可以将用于光滑系统的数值算法推广到非光滑系统. 文献[1, 6]研究了具有含摩擦双面约束多体系统, 给出了一种迭代方法, 可分析系统的动力学特性; 但是该方法在数值迭代时会出现不收敛, 特别是在不连续点处不收敛或收敛速度慢. 本文对一类具有双面约束单点摩擦的单自由度多体系统动力学方程的结构进行了分析, 利用方程的特点, 给出了一种计算方法; 该方法可以避免迭代, 提高计算效率和计算精度.

1 动力学方程的特点与算法

对于具有双面约束单点摩擦的单自由度多体

系统动力学方程, 可用质点系动力学普遍定理建立. 该方程可表示成:

$$A\ddot{q} + B + |a\ddot{q} + b| C \operatorname{sgn}(x) = 0 \quad (1)$$

其中: A, B, C, a, b, x 均是广义坐标 q 和广义速度的函数, $\operatorname{sgn}(x)$ 为 x 的符号函数. 方程(1)是非线性常微分方程, 由于方程中含有绝对值, 因此不能用现有的数值方法求解. 若系统中没有奇异位置, 或不在奇异位置附近运动, 则方程(1)有: $A > 0, a > 0$, 利用该性质, 可以将方程(1)简化. 设:

$$y = a\ddot{q} + b \quad (2)$$

则方程(1)可表示成:

$$A_1 y + A_2 |y| + A_3 = 0 \quad (3)$$

其中: $A_1 = A/a, A_2 = C \operatorname{sgn}(x), A_3 = B - Ab/a$. 由于方程(3)中的 y 的物理含义为约束面的法向力, 因为是双面约束, 因此当 $y > 0$ 时表示滑块与约束面的一侧接触, 当 $y < 0$ 时, 表示滑块与约束面的另一侧接触, 当 $y = 0$ 时表示滑块不与约束面接触. 因此方程(3)的解是单值的. 方程(3)的算法如下:

If $A_1 + A_2 \neq 0$ and $A_3 / (A_1 + A_2) < 0$ then

$$y = -A_3 / (A_1 + A_2) > 0$$

If $A_1 - A_2 \neq 0$ and $A_3 / (A_1 - A_2) \geq 0$ then

$$y = -A_3 / (A_1 - A_2) \leq 0$$

根据上述算法可计算出 y 值, 再根据式(2)求出广义加速度

$$\ddot{q} = (y - b) / a = f(\dot{q}, q, t) \quad (4)$$

然后再应用常微分方程的数值计算方法求解方程(4). 值得指出的是, 应用第一类 Lagrange 方程求

解该类问题时,也会遇到求解方程(3)的问题,那时方程(3)中的代表具有摩擦约束的 Lagrange 乘子.关于这方面的问题将另文讨论.

2 算例

具有双面约束单点摩擦的单自由度多体系统如图1所示.设圆盘对O轴的转动惯量为 J ,半径为 R ,其上作用有力偶,力偶矩为 $M = M_{\max} \sin \omega t$;滑块B的质量为 m_1 (视为质点),质量为 m_2 长为 R 的均质杆用铰链与其他物体连接,系统在铅垂平面内运动,其惯性坐标系的建立如图1所示, y 轴铅垂向上.弹簧的刚度系数为 k , $\theta = 0$ 时,弹簧未变形.滑块与滑道间的滑动摩擦系数为 μ ,滑块与滑道之间有微小间隙. y_1 为滑块B的坐标, x_2, y_2 为杆AB的质心坐标, J_2 为杆AB相对质心的转动惯量.系统的动能为:

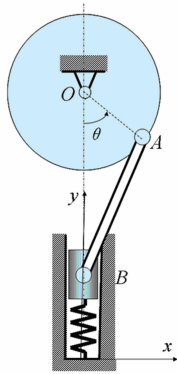


图1 圆盘滑块机构
Fig. 1 disk-slide system

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2$$

其中:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2R(1 - \cos\theta) & \dot{y}_1 &= 2R \dot{\theta} \sin\theta \\ y_2 &= R(2 - \frac{3}{2}\cos\theta) & \dot{y}_2 &= \frac{3R}{2} \dot{\theta} \sin\theta \\ x_2 &= \frac{R}{2} \sin\theta & \dot{x}_2 &= \frac{R}{2} \dot{\theta} \cos\theta \end{aligned}$$

于是动能可表示成:

$$T = (\frac{1}{2} J + \frac{1}{6} m_2 R^2) \dot{\theta}^2 + (2m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$$

作用在系统上的元功之和为:

$$\begin{aligned} \sum \delta W &= -m_1 g \dot{y}_1 dt - m_2 g \dot{y}_2 dt - k y_1 \dot{y}_1 dt + M \dot{\theta} dt - \\ &|F_N| \mu \dot{y}_1 \operatorname{sgn}(\dot{y}_1) dt = -m_1 g 2R \dot{\theta} \sin\theta dt - \end{aligned}$$

$$m_2 g \frac{3R}{2} \dot{\theta} \sin\theta - 4R^2 k (1 - \cos\theta) \dot{\theta} \sin\theta dt +$$

$$M \dot{\theta} dt - |F_N| \mu 2R \dot{\theta} \sin\theta \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \sin\theta) dt$$

$|F_N| \mu$ 为约束作用在滑块B上的摩擦力, F_N 为约束作用在滑块B上的法向约束力,当 $F_N > 0$ 时表示该约束力与 x 轴同向,反之相反.应用动能定理的微分形式 $dT = \sum \delta W$ 有:

$$\begin{aligned} &[(J + \frac{1}{3} m_2 R^2) + 2(2m_1 + m_2) R^2 \sin^2 \theta] \ddot{\theta} + \\ &2(2m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta = -2m_1 g R \sin\theta - \\ &m_2 g \frac{3R}{2} \sin\theta - 4R^2 k (1 - \cos\theta) \sin\theta + M - \\ &|F_N| \mu 2R \sin\theta \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \sin\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

系统对O轴的动量矩:

$$\begin{aligned} L_o &= J \dot{\theta} + m_2 \dot{x}_2 \frac{3R}{2} \cos\theta + m_2 \dot{y}_2 \frac{R}{2} \sin\theta - \frac{1}{12} m_2 R^2 \dot{\theta} = \\ &(J - \frac{1}{12} m_2 R^2) \dot{\theta} + m_2 (\frac{R}{2} \dot{\theta} \cos\theta \frac{3R}{2} \cos\theta + \\ &\frac{3R}{2} \dot{\theta} \sin\theta \frac{R}{2} \sin\theta) = (J - \frac{1}{12} m_2 R^2) \dot{\theta} + \\ &\frac{3}{4} m_2 R^2 \dot{\theta} = (J + \frac{2}{3} m_2 R^2) \dot{\theta} \end{aligned}$$

应用动量矩定理 $\frac{dL_o}{dt} = \sum M_o$ 有:

$$(J + \frac{2}{3} m_2 R^2) \ddot{\theta} = M + F_N 2R \cos\theta - m_2 g \frac{R}{2} \sin\theta \quad (6)$$

由方程(6)解出 F_N 代入方程(5)得:

$$A \ddot{\theta} + B + |a \dot{\theta} + b| C \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) = 0 \quad (7)$$

其中:

$$A = (J + \frac{1}{3} m_2 R^2) + 2(2m_1 + m_2) R^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} B &= 2(2m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta + 2m_1 g R \sin\theta + \\ &m_2 g \frac{3R}{2} \sin\theta + 4R^2 k (1 - \cos\theta) \sin\theta - M \end{aligned}$$

$$C = \mu \sin\theta$$

$$a = \frac{J + \frac{2}{3} m_2 R^2}{\cos\theta}, \quad b = \frac{m_2 g R \sin\theta - 2M}{2 \cos\theta}$$

$$x = \dot{\theta} \sin\theta$$

当系统不在奇异位置 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 附近运动时,即 $\theta \in$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,方程(7)中的 $A > 0, a > 0$,因此方程(7)就可以用本文给出的方法进行数值求解.

本算例有关参数为: $J = 0.25\text{kg} \cdot \text{m}^2$, $R = 0.5\text{m}$, $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $k = 10\text{kg/m}$, $\omega = 5\text{rad/s}$, $\mu = 0.5$, $M_{\max} = 2.0\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

情形 1 当摩擦系数 $\mu = 0.0$, 作用在圆盘的力偶 $M_{\max} = 0.0\text{kg} \cdot \text{m}$ 时, 该机构为保守系统, 若其初始状态 $\theta = 0.5\text{rad}$, $\dot{\theta} = 0.0\text{rad/s}$ 时机构作等幅周期运动. 图 2 为圆盘转角的时间历程, 图 3 为约束作用在滑块 B 上的法向支承力 F_N 的时间历程.

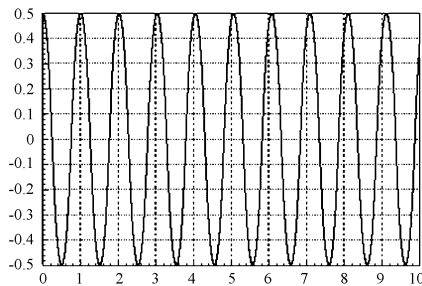


图 2 θ 的时间历程

Fig. 2 The angle histories of disk θ

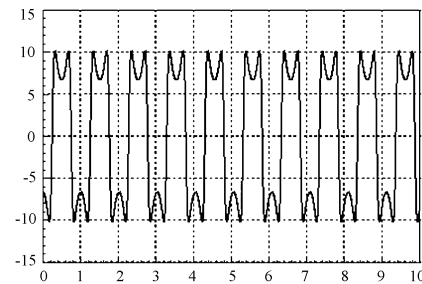


图 3 F_N 的时间历程

Fig. 3 The force histories of F_N

情形 2 当摩擦系数 $\mu = 0.5$, 作用在圆盘的力偶 $M_{\max} = 0.0\text{kg} \cdot \text{m}$ 时, 该机构在耗散力(摩擦力)的作用下, 其运动的幅值逐步减小. 图 4 为圆盘转角 θ 的时间历程, 图 5 为约束作用在滑块 B 上的法向支承力 F_N 的时间历程.

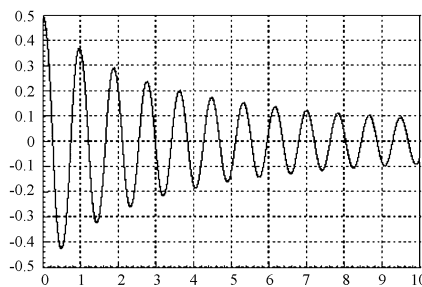


图 4 θ 的时间历程

Fig. 4 The angle histories of disk θ

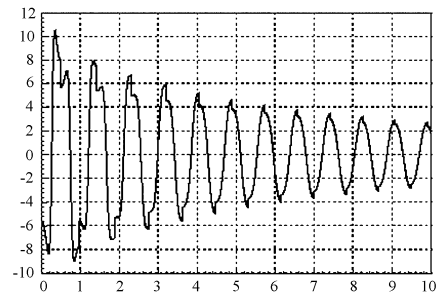


图 5 F_N 的时间历程

Fig. 5 The force histories of F_N

情形 3 当摩擦系数 $\mu = 0.5$, 作用在圆盘的力偶 $M_{\max} = 2.0\text{kg} \cdot \text{m}$ 时, 该机构的稳态运动为周期运动. 图 6 为圆盘转角 θ 的时间历程, 图 7 为约束作用在滑块 B 上的法向支承力 F_N 的时间历程.

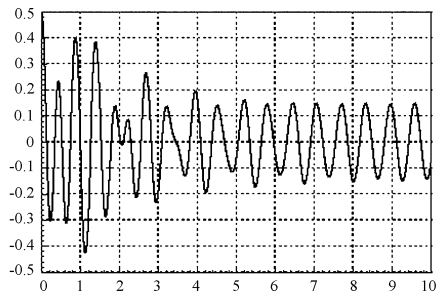


图 6 θ 的时间历程

Fig. 6 The angle histories of disk θ

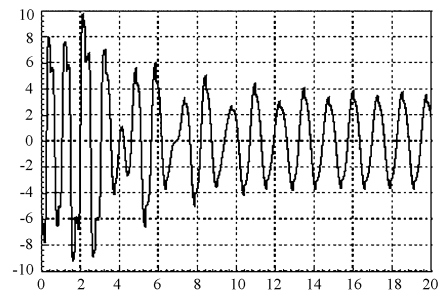


图 7 F_N 的时间历程

Fig. 7 The force histories of F_N

图 5 和图 7, 为支承力 F_N 的时间历程图, 由于摩擦力与速度方向相反, 当滑块的速度变向时, 摩擦力发生突变, 支承力 F_N 也发生突变.

上述数值计算结果与定性分析的结果相吻合, 说明本文给出的方法是有效的. 由于本文给出的方法无需对方程(1)进行迭代, 因此避免了由于不连续点的存在, 使得数值迭代不收敛的问题, 既提高了计算精度也提高了计算速度.

3 结论

本文应用动力学普遍定理建立了一类具有双面约束单点摩擦的多体系统动力学方程,该方程中既有符号函数又有绝对值符号,具有很强的非光滑性,反映了具有双面约束单点摩擦的多体系统动力学方程的主要特征.本文根据方程的特点和方程中具体表达的物理含义,给出了一种求解该类方程的数值计算方法.该方法避免了迭代计算,因此既提高了计算精度也提高了计算速度.

第一类 Lagrange 方程是建立多体系统动力学的普遍方法之一,也可用于研究具有双面约束单点摩擦的多体系统动力学问题,由此得到的动力学方程也具有方程(1)的特征,关于这方面的研究将另文讨论.

参 考 文 献

1 Klepp H. J. , Trial-and-error based method for the investi-

gation of multi-body systems with Friction. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 197(5) : 629 ~ 637

2 Clocker CH. , Pfeiffer F. Multiple impacts with friction in rigid multi-body systems. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 7: 471 ~ 497

3 Pfeiffer F. , Multi-body systems with unilateral constraints. *Journal Applied Mechanics*, 2001, 65 (4) : 665 ~ 671

4 Shihui Fu, Qi Wang, Estimating the Largest Lyapunov Exponent in a Multibody System with Dry Friction with Using Chaos Synchronization. *Acta. Mechanica Sinica*, 2006, 22 (3) : 277 ~ 283

5 王剑锋、王琪, 含摩擦多体系统 Lagrange 方程的数值算法, 动力学与控制学报, 2004, 2 (2) : 58 ~ 61 (The numerical method for Lagrange's equations of multi-body system with dry friction. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2 (2) : 58 ~ 61 (in Chinese))

6 Klepp H. J. , The existence and uniqueness of solutions for a single-degree-of-freedom system with two friction-affected sliding joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 185 (2) : 364 ~ 371

A NUMERICAL ALGORITHM FOR MULTIBODY SYSTEMS WITH BILATERAL CONSTRAINT AND SINGLE FRICTIONAL POINT*

Wang Xiaojun¹ Peng Huilian² Wang Qi²

(1. School of Mechanical and Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, China)

(2. Science School, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract This paper presented a numerical algorithm for solving the dynamic equations of single-degree-of-freedom multibody system with bilateral constraint and single frictional point, and the generalized dynamic equation of the systems was derived. Because the dynamical equation was strongly non-smooth and nonlinear ODE, the dynamical behavior of the system cannot be studied by using the conventional methods for smooth systems. Therefore, a simple algorithm was presented by utilizing the characteristics of equation and physical meaning of variable. The efficiency and the precision of our algorithm were higher than the iterative ones.

Key words multibody system, bilateral constraint, dry friction