

# 轴向运动薄板非线性振动及其稳定性研究\*

殷振坤 陈树辉

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

**摘要** 应用增量谐波平衡法(IHB法)研究轴向运动薄板横向非线性振动特性及其稳定性. 通过 Hamilton 原理推导出了非惯性参考系下四边简支轴向运动薄板的横向振动微分方程, 然后利用 Galerkin 方法离散运动方程. 对离散后的非线性方程组应用 IHB 法进行非线性振动分析, 研究了在固有频率之比  $\omega_{20}/\omega_{10}$  接近于 3:1 情况下, 外激励频率  $\omega$  在  $\omega_{10}$  附近的具有内部共振的基谐波响应. 最后用多元 Floquet 理论分析了系统周期解的稳定性, 其中采用 Hsu 方法来计算转移矩阵. 通过对具体例子的数值计算, 分别得到了自由振动和不同外激励下的频幅相应曲线, 通过对比运动梁模型和运动薄板模型的计算结果, 分析了各种模型的适用范围.

**关键词** 轴向运动薄板, 非线性振动, 增量谐波平衡法, 内部共振, Floquet 理论

## 引言

自然界和工程技术中, 轴向运动体系的非线性振动十分普遍, 它广泛存在于军事、航空航天、土木、机械、电子等工程中. 具有高速轴向运动的磁带、缆绳、动力传输带、锯片、平动电梯等的横向振动, 都是轴向运动体系非线性振动的典型例子.

国际上对轴向运动体系非线性振动的研究已经成为热点, Wickert 等<sup>[1]</sup> 全面评论了直至 1988 年以前的研究工作, 用模态分析和格林函数方法分析了轴向运动梁的运动特征; Pellicano 等<sup>[2]</sup> 对 2000 年以前的研究工作也作了很好的综述; Ulsoy 等<sup>[3]</sup> 首次应用二维运动板模型来研究轴向运动体系. 近来, Chen 等<sup>[4]</sup> 研究了轴向运动粘弹性弦线和梁的分叉以及混沌特性. Zhang 等<sup>[5]</sup> 研究了粘弹性运动带参数激励的混沌动力学特性. Sze、陈树辉、黄建亮他们应用 IHB 方法和多维 L-P 法, 研究轴向运动梁的基谐波、超谐波、次谐波和组合谐波的内部共振问题<sup>[6-9]</sup>, 在此基础上, 本文拟用该方法研究轴向运动板横向非线性振动特征, 并分析其解的稳定性.

## 1 运动方程

图 1 所示为轴向运动薄板的示意图. 记板长  $l$ , 宽  $b$ , 厚度为  $h$ , 假定薄板以恒速度  $c$  沿轴向运动.

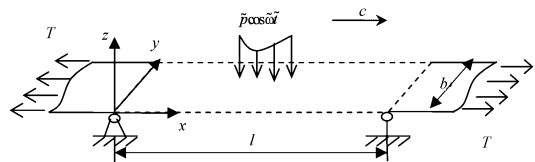


图 1 轴向运动板以速度  $c$  运动的示意图

Fig. 1 Schematic of an axially moving plate with velocity  $c$

如果我们考虑由大变形引起的几何非线性, 则由 Von Karman 非线性板理论可知, 轴向运动薄板的传输区域的总动能为:

$$T_k = \frac{\rho h}{2} \int_0^b \int_0^l [c^2 + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + c \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x})^2] dx dy \quad (1)$$

总势能为

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^l \{ (\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2})^2 + 2(1-\nu) [ (\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} ] \} dx dy + \frac{h}{2E_0} \int_0^b \int_0^l \{ (\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2})^2 + 2(1+\nu) [ (\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} ] \} dx dy \quad (2)$$

根据 Hamilton 原理有

$$\delta \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} (T_k - U_p) d\tilde{t} + \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \int_0^b \int_0^l (\tilde{p} \cos \tilde{\omega} \tilde{t} \delta \tilde{w}) dx dy d\tilde{t} = 0 \quad (3)$$

通过一系列变分运算并注意到应力应变关系, 最后可以得到:

2007-03-15 收到第 1 稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10272117, 10672193), 广东省自然科学基金资助项目(04009738), 中山大学高等学术研究中心基金资助项目(06M13)

$$h(w_{,tt} + 2Vw_{,xt} + V^2w_{,xx}) - \eta^2(F_{,yy}w_{,xx} + F_{,xx}w_{,yy} - 2F_{,xy}w_{,xy}) + \varepsilon(w_{,xxxx} + 2\eta^2w_{,xxyy} + \eta^4w_{,yyyy}) = p\cos\omega t \quad (4)$$

和

$$F_{,xxxx} + 2\eta^2F_{,xxyy} + \eta^4F_{,yyyy} = -6(1 - V^2)\eta^2\varepsilon L[w, w] \quad (5)$$

其中无量纲量

$$w = \tilde{w}/h, x = \tilde{x}/l, y = \tilde{y}/b, \eta = l/b,$$

$$\varepsilon = D/(Tl^2), F = \tilde{F}/(Tl^2), p = \tilde{p}l^2/(Th)$$

$$\omega = \tilde{\omega}\sqrt{(\rho hl^2)/T}, t = \tilde{t}\sqrt{T/(\rho hl^2)}, V = c\sqrt{(\rho h)/T}.$$

$\tilde{w}$  为横向位移,  $\tilde{F}$  为应力函数,  $\tilde{p}\cos\tilde{\omega} \tilde{t}$  为垂直施加在板面上的外激励力,  $\tilde{p}$  是  $x, y$  的函数,  $\eta$  为板的长宽比,  $\rho$  为密度,  $E$  为杨氏模量,  $T$  为轴向拉力密度, 板抗弯刚度  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ .

板周围四边简支, 边界条件为:

在  $x=0$  和  $x=1$  简支, 有水平拉力  $T$

$$\begin{cases} w=0 \text{ 和 } w_{,xx}=0 \\ F_{,yy}=0 \text{ 和 } F_{,xy}=0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\quad (7)$$

在  $y=0$  和  $y=1$  简支, 无边界力

$$\begin{cases} w=0 \text{ 和 } w_{,yy}=0 \\ F_{,xx}=0 \text{ 和 } F_{,xy}=0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\quad (9)$$

## 2 Galerkin 方法

我们采用分离变量法和 Galerkin 过程来离散运动方程和边界条件, 为此, 令

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^M q_i(t) \sin(i\pi x) \sin(\pi y) \quad (10)$$

$$F(x, y, t) = y^2/(2\eta^2) +$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N f_{jk}(t) \sin^2(j\pi x) \sin^2(k\pi y) \quad (11)$$

为方便讨论, 以下的公式推导和计算中取  $M = N = 2$  (算例表明  $M = N = 2$  已足够反映系统的响应特性). 显然, 试函数 (10) (11) 完全满足边界条件, 所以将式 (10) (11) 代入方程 (4) (5), 应用 Galerkin 方法

$$\int_0^1 \int_0^1 [F_{,xxxx} + 2\eta^2F_{,xxyy} + \eta^4F_{,yyyy} + 6(1 - V^2)\eta^2\varepsilon L[w, w]] \sin^2(j\pi x) \times \sin^2(k\pi y) dx dy = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 [\varepsilon(w_{,xxxx} + 2\eta^2w_{,xxyy} + \eta^4w_{,yyyy}) - \eta^2(F_{,yy}w_{,xx} + F_{,xx}w_{,yy} - 2F_{,xy}w_{,xy}) + h(w_{,tt} + 2Vw_{,xt} + V^2w_{,xx}) -$$

$$p\cos\omega t] \sin(j\pi x) \sin(\pi y) dx dy = 0 \quad (13)$$

完成积分可以得到:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}_3(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{P}\cos\omega t \quad (14)$$

其中:  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}^T$ ,  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}^T$ ,  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{G}$  为与陀螺力相关的矩阵,  $\mathbf{K}$  为线性刚度矩阵,  $\mathbf{K}_3(\mathbf{q})$  为非线性刚度矩阵. 各矩阵的分量分别为:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -16V/3 \\ 16V/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \pi^2 \begin{pmatrix} \pi^2\varepsilon(1 + \eta^2)^2 + 1 - V^2 & 0 \\ 0 & \pi^2\varepsilon(4 + \eta^2)^2 + 4 - 4V^2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{K}_3(\mathbf{q})$  显式表达过于复杂, 这里不再详细列出. 方程组 (14) 的第一个特点是质量矩阵  $\mathbf{M}$  为对称矩阵而  $\mathbf{G}$  为反对称矩阵, 这表明该系统是陀螺系统; 第二个特点是该系统只含有立方非线性项而不含有平方非线性项.

## 3 增量谐波平衡法 (IHB 法)

本文应用 IHB 法研究轴向运动薄板横向非线性振动, 该方法非常适合用来定量求解类似方程 (14) 的系统:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}_3(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{F}\cos\omega t \quad (15)$$

引入新的时间变量  $\tau$ , 令

$$\tau = \omega t \quad (16)$$

那么方程 (15) 变为

$$\omega^2\mathbf{M}\mathbf{q}'' + \omega\mathbf{C}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{K}_3(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{F}\cos\tau \quad (17)$$

IHB 法的第一步就是 Newton - Raphson 的增量过程. 令  $\mathbf{q}_0$  和  $\omega_0$  表示振动过程中的某一状态, 则其邻近的状态可以表示为增量的形式

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad (18)$$

将表达式 (18) 代入方程 (17) 略去高阶项, 便得到矩阵形式的增量方程

$$\omega_0^2\mathbf{M}\Delta\mathbf{q}'' + \omega_0\mathbf{C}\Delta\mathbf{q}' + (\mathbf{K} + 3\mathbf{K}_3)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{R} - (2\omega_0\mathbf{M}\mathbf{q}_0'' + \mathbf{C}\mathbf{q}_0')\Delta\omega \quad (19)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\cos\tau - [\omega_0^2\mathbf{M}\mathbf{q}_0'' + \omega_0\mathbf{C}\mathbf{q}_0' + \mathbf{K}\mathbf{q}_0 + \mathbf{K}_3(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_0] \quad (20)$$

$\mathbf{R}$  是误差向量, 当  $\mathbf{q}_0, \omega_0$  为准确解时, 其值为零.

IHB 法的第二步就是谐波平衡过程. 为此把和展开成傅里叶级数

$$\mathbf{q}_j = \sum_{k=1}^{n_c} a_{jk} \cos(k-1)\tau + \sum_{k=1}^{n_s} b_{jk} \sin k\tau = \mathbf{C}_s \mathbf{A}_j \quad (21)$$

$$\Delta\mathbf{q}_j = \sum_{k=1}^{n_c} \Delta a_{jk} \cos(k-1)\tau + \sum_{k=1}^{n_s} \Delta b_{jk} \sin k\tau = \mathbf{C}_s \Delta\mathbf{A}_j \quad (22)$$

其中:

$$C_s = [1, \cos t, \cos(n_c - 1)t, \sin t, L, \sin n_s t],$$

于是,

$$q_0 = SA, \quad \Delta q = S\Delta A \quad (23)$$

其中,  $S = \text{diag}[C_s, C_s]$ ,  $A = [A_1 A_2]^T$ ,  $\Delta A = [\Delta A_1 \Delta A_2]^T$ , 将式(23)代入公式(19)并应用 Galerkin 过程, 可以得到以  $\Delta A, \Delta\omega$  表示的线性方程组.

$$\bar{K}_{mc}\Delta A = \bar{R} - \bar{R}_{mc}\Delta\omega \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{K}_{mc} &= \int_0^{2\pi} S^T [\omega_0^2 MS'' + \omega_0 CS' + \\ & (K + 3K_3)S] d\tau \\ \bar{R} &= \int_0^{2\pi} S^T [F \cos n\tau - (\omega_0^2 MS'' + \omega_0 CS' + \\ & KS + K_3S)] A d\tau \\ \bar{R}_{mc} &= \int_0^{2\pi} S^T (2\omega_0 MS'' + CS') d\tau A \end{aligned}$$

方程(24)是一个线性方程组, 其未知量的数目比方程数目多一个, 因此求解时必须选定其中一个增量作为控制增量. 我们可以选择  $\Delta\omega$  作为控制增量; 也可以把某一谐波的振幅  $a_{ij}$  或  $b_{ij}$  作为控制增量, 人为给定  $\Delta a_{ij}$  或  $\Delta b_{ij}$ ; 还可以采用弧长法, 选择频率—振幅响应曲线中的弧长作为控制增量. 具体运算过程可参见文献[8].

#### 4 解的稳定性分析

周期解求出以后, 其稳定性通常可以通过在其上添加一个微小的扰动  $\Delta q$  来研究, 即是:

$$q = q_0 + \Delta q \quad (25)$$

将式(25)代入方程(17), 注意到  $q_0$  本身满足方程(17), 最后得到:

$$\omega^2 M \Delta q'' + \omega C \Delta q' + (K + 3K_3(q)) \Delta q = 0 \quad (26)$$

于是所需要研究的问题就转化为研究线性常微分方程(26)的解的稳定性. 我们可以采用多变量 Floquet 理论来分析其稳定性.

引入:

$$X = [\Delta q, \Delta q']^T, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & I \\ Q_{21} & -(1/\omega)M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$Q_{21} = -\frac{1}{\omega^2} M^{-1} (K + 3K_3(q))$$

方程(26)可以写成:

$$X' = Q(\tau)X \quad (28)$$

其中  $I$  是单位矩阵,  $0$  是空矩阵,  $Q_{21}$  中的每一项都是  $\tau$  的周期函数, 周期  $T = 2\pi/\omega$ .

对方程(28), 必然存在一个基础解集

$$y_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{Nk}], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

其中,  $N = 2n$ ,  $n$  为方程个数, 在本文中为 2. 将此基础解集用矩阵形式表示为:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & L & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & L & y_{2N} \\ M & M & L & M \\ y_{N1} & y_{N2} & L & y_{NN} \end{bmatrix} \quad (30)$$

显然  $Y$  满足方程:

$$Y' = Q(\tau)Y \quad (31)$$

既然  $Q(\tau + T) = Q(\tau)$ , 于是  $Y(\tau + T)$  也是一个基础解集, 因此

$$Y(\tau + T) = PY(\tau) \quad (32)$$

其中  $P$  是非奇异的常数矩阵, 我们称为转换矩阵.

依据 Floquet 理论, 系统的稳定性判据跟矩阵  $P$  的特征值有关. 如果所有  $P$  的特征值的绝对值都小于 1, 那么运动是可实现的, 解是稳定的; 否则运动是不可实现的, 解是不稳定的.

由式(32)容易得出:

$$P = Y(T) \quad (33)$$

为了进一步讨论, 我们采用 Hsu 方法来计算矩阵  $P$ . 假设每个周期  $T$  都被划分成相等的  $N_k$  个间隔, 那么第  $k$  个间隔就可以表示为  $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ , 在此间隔中, 周期系数矩阵  $Q(\tau)$  可以被常系数矩阵  $Q_k$  取代

$$Q_k = \frac{1}{\Delta_k} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} Q(\zeta) d\zeta \quad (34)$$

最终转换矩阵  $P$  可以用下面的算式计算得到

$$p = Y(T) = \prod_{i=1}^{N_k} \left[ I + \sum_{j=1}^{N_j} \frac{(\Delta_i Q_i)^j}{j!} \right] \quad (35)$$

#### 5 算例

下面应用上述方法研究具体算例. 取运动薄板具体参数如下:

$$l = 1\text{m}, b = 0.25\text{m}, h = 0.003\text{m}, v = 0.3,$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{Pa}, \rho = 7800 \text{kg/m}^3, T = 4 \times 10^4 \text{N/m}$$

则无量纲参数  $\varepsilon = 0.01236$ ,  $\eta = 4$ .

(1) 线性模态分析

首先进行线性模态分析以确定临界速度  $V_{cr}$ . 通过方程

$$\text{Det}[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{G} + \mathbf{K}] = 0 \quad (36)$$

可以方便求出派生系统特征值  $\lambda = \sigma + i\omega$ , 其虚部  $\omega$  即系统固有圆频率. 速度为 0 时特征值  $\lambda$  为纯虚数, 随着轴向速度的不断增大, 在某一速度的时候,  $\lambda$  不再是纯虚数, 该速度就是系统的临界速度.

图 2 为不同轴向速度下的系统第一阶特征值实部和虚部的变化情况, 显然可知系统临界速度  $V_{cr} = 3.6334$ .

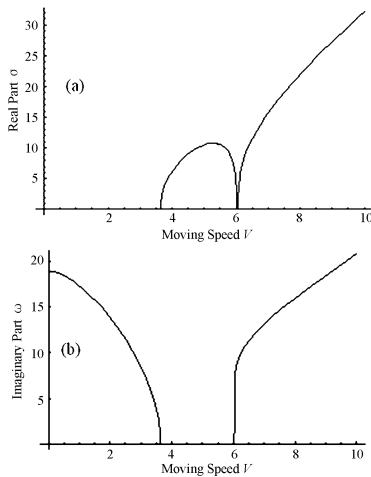


图2 系统初阶特征值随轴向速度变化情况

Fig. 2 The fundamental eigenvalue versus axial moving speed  $c$

(2) 频率—振幅响应曲线

为了便于讨论, 我们取轴向速度  $V = 3.15$ , 由方程(36)可得到系统前两阶线性固有频率为  $\omega_{10} = 7.38442$ ,  $\omega_{20} = 24.8419$ ,  $\omega_{20}/\omega_{10} \approx 3$ , 此时系统将产生内部共振.

首先讨论无外激励的自由振动 ( $p_1 = p_2 = 0$ ) 情况. 因为该系统具有陀螺系统特性, 此时公式(21)中, 第一个变量  $q_{10}$  不包含正弦谐波, 即  $b_{1k} = 0$ , 而第二个变量  $q_{20}$  不包含余弦谐波, 即  $a_{2k} = 0$ . 另外, 由于系统只含三次非线性, 故  $q_{10}$  只包含余弦的奇次谐波项,  $q_{20}$  只包含正弦的奇次谐波项. 即  $a_{1,2k} = 0, b_{2,2k} = 0, k = 0, 1, 2, L$ . 即公式(21)成为:

$$q_{10} = \sum_{k=0}^{n_c} a_{1,(2k+1)} \cos[(2k+1)\tau] \quad (37)$$

$$q_{20} = \sum_{k=0}^{n_s} b_{1,(2k+1)} \sin[(2k+1)\tau] \quad (38)$$

图 3 所示为当  $n_c = n_s = 2$  时自由振动的频率—振幅响应曲线, 这里列出了  $a_{11}$  和  $b_{23}$  的响应情况, 对于其他两个振幅,  $b_{23}$  同  $a_{11}$  的响应曲线类似, 而  $a_{13}$  同  $b_{23}$  则符号相反.

从图 3 中可以看出, 系统的自由振动有两组

解: 第一组解  $a_{11} = 0; b_{23} \neq 0$ , 即  $a_{11}$  图中的水平线直线和  $b_{23}$  图中  $a_{11} = 0$  的曲线, 此时系统的响应全部在正弦谐波项  $b_{23}$  上; 第二组解  $a_{11} \neq 0; b_{23} \neq 0$ , 在  $b_{23}$  图中对应  $a_{11} \neq 0$  的曲线, 在这种情况下  $a_{11}$  明显大于  $b_{23}$ , 系统的响应主要在余弦谐波项  $a_{11}$  上.

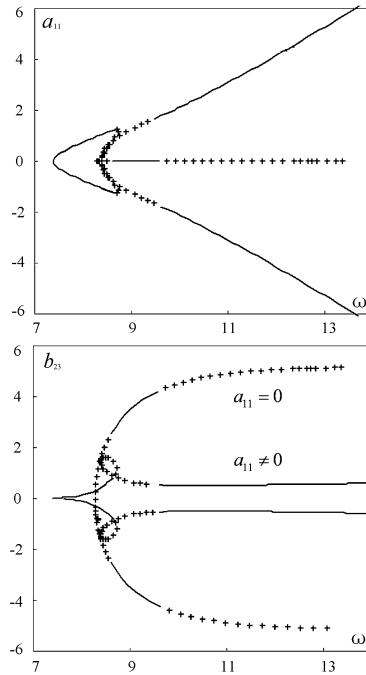


图3 当  $\omega \approx \omega_{10}, p_1 = p_2 = 0$  时的自由振动

— 稳定解; + + 不稳定解

Fig. 3 Free vibration resonance as

$\omega \approx \omega_{10}, p_1 = p_2 = 0$ , — stable solution; + + unstable solution

在图 3 中用不同的曲线类型标示了解的稳定性, 可以看出在  $8.614646 < \omega < 9.578883$  的区间上, 运动板的稳定解出现在第一组解上, 而在其他区间上, 该系统第二组解是稳定的, 第一组解是不稳定的.

下面考虑加上外激励力的强迫振动情况, 外激励频率  $\omega$  在  $\omega_{10}$  附近时, 系统存在基谐波响应, 为了更好地反映这种特性, 我们把强迫力集中在第一谐波项, 取  $p_2 = 0$ . 图 4 所示为系统的外激励力  $p_1 = 5, p_2 = 0$  时频率—振幅响应曲线.

从图 4 可以看出, 在此情况下, 系统有三个解, 响应曲线相当复杂, 几乎每个解都有  $U$  拐点, 有个解还跨越了上下两个相平面. 从图 4 还可以看出上下两个相平面都发生了明显的内部共振, 也即是当  $\omega$  在  $\omega_{10}$  附近时, 两个基本模态  $a_{11}$  和  $b_{23}$  振幅的大小互相转换, 能量发生了传递. 一般来说, 在多自由度系统中, 当激励频率只与第一阶模态重合时, 虽然各阶模态是耦合的, 甚至有内共振存在, 它与其

他高阶模态的影响也可以忽略;然而在该系统中,由于陀螺项的影响,虽然激励频率只与第一阶模态重合,但系统已经发生了剧烈的内共振,它与高阶模态之间相互影响已经不能忽略.

值得指出的是,通过对不同外激励力振幅情况下相应的计算可以发现当激励力超过一定的临界值时,发生于下相平面的内部共振就会消失.例如当外激励力  $p_1 = 15$  时系统在下相平面内的内部共振就会消失,没有发生振幅大小互相转换的过程;同时也没有解穿越上下两个相平面.

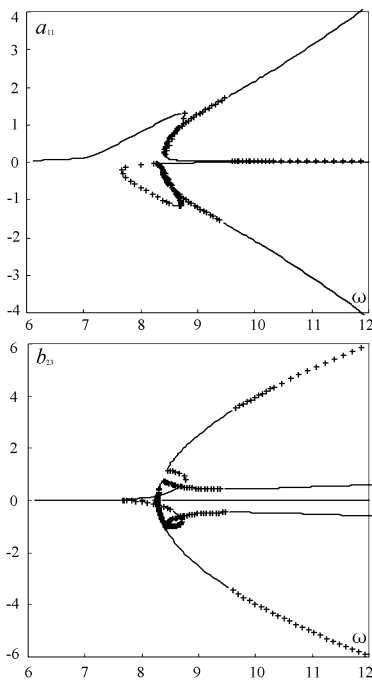


图4 当  $\omega \approx \omega_{10}, p_1 = 5, p_2 = 0$  时的基谐波响应

—— 稳定解; + + 不稳定解

Fig. 4 Fundamental resonance as  $\omega \approx \omega_{10}, p_1 = 5, p_2 = 0$

—— stable solution; + + unstable solution

### (3) 板模型与梁模型的适用范围讨论

对于轴向运动物体的研究,一般有两类模型:

①一维的运动梁模型或者运动弦模型;②二维的运动板模型或者运动网膜模型.下面对两类模型的适用范围做简单探讨.

我们以轴向运动物体横向振幅的最大值  $w_{\max}/h$  作为比较参数,图5所示为不同长宽比条件下用两种模型计算结果的相对误差.

从图5可以看出,在长宽比较小,但是随着长宽比的增加,两种模型的计算结果差别迅速减小,当长宽比  $> 10$  以后,两种模型计算结果基本一致,误差在5%以内.由

此可见,当轴向运动物体长宽比  $> 10$  的时候,可选用较简单的运动梁模型计算而不致引起显著误差;在轴向运动物体长宽比  $< 10$  的时候,应选用运动板模型计算,否则就会引起显著误差.

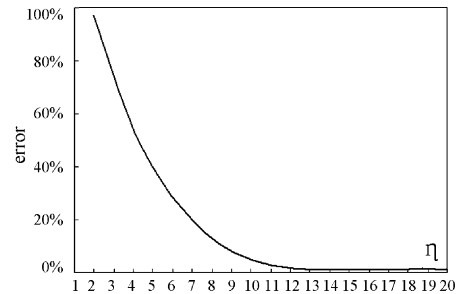


图5 不同长宽比时两种模型计算结果比较

Fig. 5 Comparison of two models with different aspect ratio

## 6 结论

通过 Hamilton 原理推导出了轴向运动薄板横向非线性振动的运动方程,轴向运动板是只具有立方非线性的陀螺系统.增量谐波平衡法(IHB法)是求解轴向运动板的非线性振动的有效方法,优点是方便地追踪复杂非线性幅频响应曲线.系统解的稳定性可以用 Floquet 理论和 Hsu 方法研究.

当激励力频率在第一阶固有频率附近时,系统存在基谐波响应,有两组解,幅频响应曲线比较复杂.与轴向运动梁系统类似,当  $\omega_{20}/\omega_{10} \approx 3$  时系统存在内部共振现象,内共振情况与激励力振幅大小有关,当激励力振幅比较小时,系统在上下两个相平面存在内部共振,但当激励力振幅超过一定临界值,下相平面的内部共振消失.

运动梁模型适用于长宽比较大的轴向运动物体,当轴向运动物体长宽比  $< 10$  的时候,应选用运动板模型以避免较大的模型误差.

## 参 考 文 献

- 1 J. A. Wickert and C. D. Mote Jr. Current research on the vibration and stability of axially moving materials. *Shock and Vibration Digest*, 1988, 20, 3 ~ 13
- 2 F. Pellicano and F. Zirillit. Boundary layers and nonlinear vibrations in an axially moving beam. *Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, 33, 691 ~ 711
- 3 A. G. Ulsoy and C. D. Mote Jr. Vibration of wide band saw blades. *Journal of Engineering for Industry*, 1982, 104, 71 ~

- 78
- 4 L. Q. Chen, X. D. Yang and C. J. Cheng. Dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2004, 23: 659 ~ 666
  - 5 W. Zhang and M. Yao. Multi-pulse orbits and chaotic dynamics in motion of parametrically excited viscoelastic moving belt. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 28: 42 ~ 66
  - 6 K. Y. Sze, S. H. Chen and J. L. Huang. The incremental harmonic balance method for nonlinear vibration of axially moving beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281: 611 ~ 626
  - 7 陈树辉, 黄建亮. 轴向运动梁非线性振动内共振研究. 力学学报, 2005, 37(1), 57 ~ 63 (Chen Shuhui, Huang Jianliang. On internal resonance of nonlinear vibration of axially moving beams. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(1), 57 ~ 63 (in Chinese))
  - 8 陈树辉, 黄建亮, 余锦炎. 轴向运动梁横向非线性振动研究. 动力学与控制学报, 2004, 2(1), 40 ~ 45 (Chen Shuhui, Huang Jianliang, She Jinyan. Study on the Laterally Nonlinear Vibration of Axially Moving Beams. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1), 40 ~ 45 (in Chinese))
  - 9 黄建亮, 陈树辉. 轴向运动体系横向非线性振动的联合共振. 振动工程学报, 2005, 18(1), 19 ~ 23 (Huang Jianliang, Chen Shuhui. Combination resonance of laterally nonlinear vibration of axially moving systems. *Journal of Vibration Engineering*, 2005, 18(1), 19 ~ 23 (in Chinese))

## STUDY ON NONLINEAR VIBRATION AND STABILITY OF AXIALLY MOVING PLATES \*

Yin Zhenkun    Chen Shuhui

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat - sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract** The laterally nonlinear vibration of axially moving plates was analyzed by the incremental harmonic balance (IHB) method. Firstly, the motion equations of an axially moving plate were derived by Hamilton principle. Then, the Galerkin method was employed to discretize the governing equations, and the IHB method was applied to solve the nonlinear equations. Finally, the Floquet theory and Hsu's method were used to investigate the stability of the solution. The free vibrations and the forced responses of an axially moving plate with internal resonance were studied. The effects of aspect ratio of plate were also discussed.

**Key words** axially moving plate, nonlinear vibration, incremental harmonic balance method, internal resonance, Floquet theory

---

Received 15 March 2007.

\* This project was supported by the National Natural Science Foundation of China under grant (10272117, 10672193), Natural Science Foundation of Guangdong Province under grant (04009738) and the Foundation of Sun Yat - sen University Advanced Research Center under grant (06M13)