

考虑几何非线性和热效应的刚柔耦合系统的频域特性研究*

崔麟 刘锦阳 洪嘉振

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 研究温度场中旋转刚体-梁系统的刚-柔耦合动力学特性. 考虑几何非线性和热效应, 从精确的应变-位移关系式出发, 用虚功原理和有限单元法建立了旋转刚体-梁系统的刚-柔耦合动力学方程. 由于非线性刚度阵与变形的高次项有关, 将非线性刚度阵的各元素表示为广义坐标阵和常值阵的乘积. 数值计算表明, 该方法可避免重复积分, 提高计算效率. 在此基础上研究了在温度递增的情况下几何非线性对系统的刚-柔耦合动力学特性的影响, 用频谱分析方法研究了系统的固有频率随中心刚体转动惯量和温度的变化.

关键词 几何非线性, 热效应, 刚-柔耦合系统

引言

在机械制造、航空和航天领域, 许多运动部件在高温环境中工作. 受内热源和表面热源的影响, 热膨胀引起柔性梁的纵向变形, 热冲击对系统动力学特性的影响不容忽视. Johnston 和 Thornton^[1] 研究了热效应对航天器姿态动力学的影响. Johnston 在建模过程考虑了刚体运动和弹性变形的耦合, 但是基于线弹性假设, 忽视了几何非线性效应.

近十年来, 基于几何非线性的柔性多体系统的混合坐标建模方法取得了一定的进展. Wallrapp 等^[2] 用初应力法建立了旋转运动梁的动力学方程; 笔者^[3] 通过引入轴向变形, 在纵向变形与轴向变形的关系式中考虑了横向变形关于 x 的偏导数的二次积分项, 在考虑非线性的同时实现了对弹性势能项的线性化, 提出了柔性多体系统的一次近似模型. 杨晖等^[4] 通过刚柔耦合实验验证了一次近似模型的正确性. 初应力法和一次近似模型成功地解释了高速旋转梁的动力学刚化效应, 但是初应力法和一次近似方法在应变描述和变形位移描述方面做了近似, 从而忽视了动力学方程中的高次项, 仅适用于小变形问题. Escalona, Hussien 和 Shabana^[5], Berneri 和 Shabana^[6] 用绝对节点坐标法研究了大变形柔性多体系统的非线性效应, 从精确的应变关系式出发建立了柔性多体系统的非线性模型, 但是绝对节点坐

标法在广义坐标中仅包含节点的绝对位移坐标, 无法直接计算刚体运动变量和节点的弹性变形.

本文考虑热效应, 对旋转刚体-梁系统提出了基于几何非线性的混合坐标建模方法. 从精确的应变-位移关系式出发, 用虚功原理建立了旋转刚体-梁系统的刚-柔耦合动力学方程. 由于考虑了动力学方程中变形位移的高次项, 既适用于小变形问题, 又适用于大变形问题. 将非线性刚度阵的各元素表示为广义坐标阵和常值阵的乘积, 提高了非线性刚度阵的计算效率. 对旋转刚体-简支梁系统进行了仿真计算, 研究了在环境温度和旋转刚体转动惯量变化的情况下, 几何非线性项对刚柔耦合动力学特性的影响, 在此基础上用频谱分析方法对温度场中旋转刚体-简支梁系统的频域特性进行分析.

1 运动学描述

图1为温度场中带有卷簧的旋转刚体-梁系统.

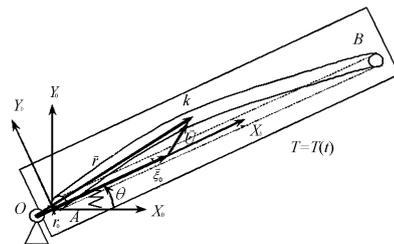


图1 温度场中旋转刚体-梁系统

Fig. 1 System composed of rotating rigid body and beam in temperature field

2007-03-12 收到第1稿, 2007-11-02 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10472066)资助项目

如图所示,平面梁的 A 端和 B 端与旋转刚体铰接. 卷簧的刚度为 K_0 .

建立惯性基 $O - X_0 Y_0$ 和浮动基 $A - X_b Y_b$, 梁上任意点 k 的绝对位移矢量在可以表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \xi) = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \xi_0 + \mathbf{U}) \quad (1)$$

其中, \mathbf{r}_0 为浮动基原点 A 相对惯性基的位移矢量, $\tilde{\mathbf{r}}_0$ 在浮动基下的坐标阵, ξ_0, ξ 分别为 k 点在变形前和变形后相对于浮动基的位移矢量, $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}$ 在浮动基下的坐标阵, \mathbf{U} 为变形位移矢量, $\tilde{\mathbf{U}}$ 在浮动基下的坐标阵. 设 \mathbf{A} 为浮动基相对惯性基的方向余弦矩阵, \mathbf{r}_0, ξ_0 和 \mathbf{U} 分别表示为

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u - yv' \\ v \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, (x, y) 为 k 点变形前相对于浮动基的位移坐标, 符号 (\cdot) 表示对坐标 x 取偏导数, 如 $\partial/\partial x$; 而 u, v 表示梁中轴线上对应点的纵向和横向变形. 对 (1) 式关于时间求导, k 点的绝对速度和加速度在惯性基下的坐标阵为

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{U}} + \dot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_0 + \xi_0 + \mathbf{U}) \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{U}} + 2 \dot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} \dot{\mathbf{U}} - \dot{\theta}^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \xi_0 + \mathbf{U}) + \ddot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_0 + \xi_0 + \mathbf{U}) \quad (4)$$

k 点的位移变分为

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{A} \delta \mathbf{U} + \delta \theta \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_0 + \xi_0 + \mathbf{U}) \quad (5)$$

2 刚-柔耦合动力学方程的建立

2.1 惯性力的虚功

设梁的材料为各向同性, 基于 Euler - Bernoulli 假设, 不计剪切效应和偏心效应. 用有限单元法对方程进行离散. 将梁等分成 n 个单元, 设 \bar{x} 为 $O_e - X_e Y_e$ 下中线上的点在变形前的 x 坐标, 如图 2 所示. x_e 为点 O_e 在浮动基下的坐标, $l_e = l/n$ 为每个梁单元的长度.

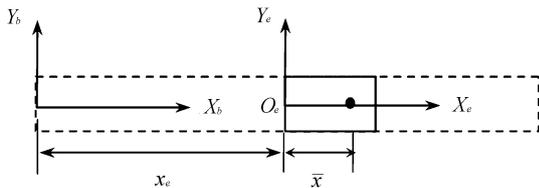


图2 单元的划分

Fig. 2 Division of finite element

中轴线的纵向和横向变形位移为

$$u = \mathbf{N}_{e1} \mathbf{P}_e, \quad v = \mathbf{N}_{e2} \mathbf{P}_e \quad (6)$$

其中, $\mathbf{N}_{e1}, \mathbf{N}_{e2}$ 为型函数矩阵, \mathbf{P}_e 为单元节点变形位移的坐标阵, 可表示为 $\mathbf{P}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{P}$, \mathbf{B}_e 是布尔矩阵, 而 \mathbf{P} 为总体节点变形位移的坐标阵.

由于均匀梁一次惯量矩为零, $\int_A y dA = 0$, 利用 (3)-(5) 式, 惯性力的虚功为

$$\delta W_i = \int_V -\rho(\delta \mathbf{r}^T \ddot{\mathbf{r}}) dV - \delta \theta J_0 \ddot{\theta} = \delta \mathbf{q}^T (-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_i) \quad (7)$$

其中 ρ 为梁的密度, J_0 为旋转刚体的转动惯量, $\mathbf{q} = (\theta \mathbf{P}^T)^T$ 为广义坐标矢量. 广义质量阵和与惯性力相关的广义力阵可表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{i1} \\ \mathbf{Q}_{i2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_{11} = J_0 + J_{11} + J_{12} + 2(\mathbf{R} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Z}_1) \mathbf{P} + \mathbf{P}^T (\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{22}) \mathbf{P} \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T = (\mathbf{R} \mathbf{Y}_2^T + \mathbf{Z}_2^T) + (\mathbf{W}_{21} - \mathbf{W}_{12}) \mathbf{P}, \quad \mathbf{M}_{22} = \mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{22} \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}_{i1} = -2 \dot{\theta} (\mathbf{R} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Z}_1) \dot{\mathbf{p}} - 2 \dot{\theta} \mathbf{P}^T (\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{22}) \dot{\mathbf{p}} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_{i2} = \dot{\theta}^2 (\mathbf{R} \mathbf{Y}_1^T + \mathbf{Z}_1^T) + \dot{\theta}^2 (\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{22}) \mathbf{P} - 2 \dot{\theta} (\mathbf{W}_{21} - \mathbf{W}_{12}) \dot{\mathbf{p}} \quad (12)$$

各常值阵为

$$J_{11} = \int_0^l \rho A (R + x)^2 dx, J_{22} = \rho l, I = \int_A y^2 dA \quad (13)$$

$$\mathbf{W}_{mk} = \sum_{e=0}^n \mathbf{B}_e^T \int_0^{l_e} \rho A \mathbf{N}_{em}^T \mathbf{N}_{ek} dx \mathbf{B}_e, \quad m, k = 1, 2 \quad (14)$$

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{e=0}^n \int_0^{l_e} \rho A \mathbf{N}_{ek} dx \mathbf{B}_e, \quad k = 1, 2 \quad (15)$$

$$\mathbf{Z}_k = \sum_{e=0}^n \int_0^{l_e} \rho A (x_e + \bar{x}) \mathbf{N}_{ek} dx \mathbf{B}_e, \quad k = 1, 2 \quad (16)$$

2.2 弹性力的虚功

基于非线性弹性理论, 非中轴线上任意一点的弹性应变 ε_x 和热应变 ε_{xt} 可表示为

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) - yv'', \quad \varepsilon_{xt} = \alpha \Delta T \quad (17)$$

其中, $\alpha, \Delta T$ 分别表示热膨胀系数和温度变化. 由于 $u'^2 \ll v'^2$, 不计 u'^2 , 应变和应力的表达式为

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}v'^2 - yv'',$$

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x - \varepsilon_{xt}) = E(u' + \frac{1}{2}v'^2 - yv'' - \alpha \Delta T) \quad (18)$$

其中, E 为梁的弹性模量. 设环境温度为已知: $T = T(t)$, 则 $\delta\Delta T = 0, \delta\varepsilon_{xt} = \alpha\varepsilon\Delta T = 0$, 弹性力的虚功为

$$\delta W_f = - \int_V \delta\varepsilon_x \sigma_x dV - \delta\theta K_0(\theta - \theta_0) \quad (19)$$

其中, θ_0 为卷簧无变形时的角度. 若令 $\mathbf{S} = \mathbf{N}_{e2}^T \mathbf{p}_e \mathbf{N}_{e2}'$, $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{N}_{1e}^T \mathbf{p}_e \mathbf{N}_{2e}'$, 将方程 (18) 代入方程 (19), 得到

$$\delta W_f = -\delta\mathbf{p}^T (\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}_l) \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}^T \mathbf{F}_l - \delta\theta K_0(\theta - \theta_0) \quad (20)$$

其中, $\mathbf{K}_0 = \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \mathbf{K}_{e0} \mathbf{B}_e$, $\mathbf{F}_l = \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}_{el}$, $\Delta\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \Delta\mathbf{K}_e \mathbf{B}_e$, $\Delta\mathbf{K}_l = \sum_{e=1}^n \mathbf{B}_e^T \Delta\mathbf{K}_{el} \mathbf{B}_e$. 单元刚度阵 \mathbf{K}_{e0} , $\Delta\mathbf{K}_e$, $\Delta\mathbf{K}_{el}$ 和单元力阵 \mathbf{F}_{el} 为

$$\mathbf{K}_{e0} = \int_0^l EA \mathbf{N}_{e1}'^T \mathbf{N}_{e1}' d\bar{x} + \int_0^l EI \mathbf{N}_{e2}''^T \mathbf{N}_{e2}'' d\bar{x} \quad (21)$$

$$\Delta\mathbf{K}_e = \frac{1}{2} \int_0^l EA (\mathbf{p}_e^T \mathbf{S} \mathbf{p}_e) \mathbf{S} d\bar{x} + \int_0^l EA (\mathbf{N}_{e1}' \mathbf{p}_e) \mathbf{S} d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^l EA (\mathbf{N}_{2e}' \mathbf{p}_e) \bar{\mathbf{S}} d\bar{x} \quad (22)$$

$$\Delta\mathbf{K}_{el} = - \int_0^l EA \alpha \Delta T \mathbf{S} d\bar{x},$$

$$\mathbf{F}_{el} = \int_0^l EA \alpha \Delta T \mathbf{N}_{e1}'^T d\bar{x} \quad (23)$$

因此, 弹性力的虚功和广义弹性力阵 \mathbf{Q}_f 为

$$\delta W_f = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{Q}_f,$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{f1} \\ \mathbf{Q}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0(\theta - \theta_0) \\ -(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}_l) \mathbf{p} + \mathbf{F}_l \end{bmatrix} \quad (24)$$

由于线性模型忽略了应变的二次项, 应变和应力为

$$\varepsilon_x = u' - yv'', \quad \sigma_x = E(u' - yv'' - \alpha\Delta T) \quad (25)$$

此时, $\Delta\mathbf{K} = 0, \Delta\mathbf{K}_l = 0$. 此外, 非线性刚度阵 $\Delta\mathbf{K}_l$ 在温度增高时为负, 是导致简支梁软化的根本原因; 与 $\Delta\mathbf{K}_l$ 相反, 对于简支梁, 非线性刚度阵 $\Delta\mathbf{K}$ 随着横向变形的增大而增大, 与简支梁的刚化有关.

2.3 刚-柔耦合动力学方程

体力做的虚功可以表示为

$$\delta W_v = \int_V \delta\mathbf{r}^T \mathbf{f}^0 dV = \int_V \delta\mathbf{r}^T \mathbf{A} \mathbf{f} dV \quad (26)$$

其中, $\mathbf{f} = [f_1, f_2]^T$ 为体力矢量 \vec{f} 在浮动基下的坐标阵. 将方程 (5) 和 (6) 代入到方程 (26) 中, 可得

$\delta W_v = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{Q}_v$, 设 $E_{11} = \int_0^l \rho A (R + x) dx$, 体力的广义力阵为

$$\mathbf{Q}_v = [f_\theta \quad f_p]^T \quad (27)$$

$$f_\theta = \frac{1}{\rho} [-f_1 Y_2 \mathbf{p} + f_2 (E_{11} + Y_1 \mathbf{p})],$$

$$f_p = \frac{1}{\rho} (f_1 \mathbf{Y}_1^T + f_2 \mathbf{Y}_2^T) \quad (28)$$

由虚功原理, 系统的刚-柔耦合动力学方程为

$$\delta W_i + \delta W_f + \delta W_v = 0 \quad (29)$$

将方程 (7), (20) 和 (26) 代入到方程 (29) 中, 根据 $\delta\mathbf{q}$ 的独立性, 动力学方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} = 0, \quad (30)$$

其中广义力阵为 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_f + \mathbf{Q}_v$.

3 旋转刚体-简支梁系统的仿真算例

旋转刚体-简支梁系统如图 1 所示. 梁的几何和材料特性为: 密度 $\rho = 2.7667 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 6.8952 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 横截面惯量矩 $I = 8.218 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, 横截面面积 $A = 7.3 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, 梁的长度 $l = 4 \text{ m}$, 热膨胀系数 $\alpha = 2.35 \times 10^{-5} \text{ 1/K}$. O 和 A 的距离 $R = 0.5 \text{ m}$, 旋转刚体的转动惯量 $J_0 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 卷簧刚度 $K_0 = 500 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, 卷簧无变形时的角度为 $\theta_0 = 0$. 体力不计. 在本例中, 由于简支梁的两端变形位移均被约束所限制, 温度增高引起的热应变会引起梁的软化效应. 温度变化规律为

$$\Delta T(t) = \begin{cases} \Delta T_m t/t_T & \text{for } 0 \leq t \leq t_T \\ \Delta T_m & \text{for } t > t_T \end{cases} \quad (31)$$

其中 $t_T = 0.01 \text{ s}$, 初始条件为 $\theta(0) = 0.1 \text{ rad}$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $p(0) = 0$, $\dot{p}(0) = 0$. 边界条件为 $u(t, x=0) = 0$, $v(t, x=0) = 0$, $u(t, x=l) = 0$, $v(t, x=l) = 0$. 本文采用 Ronge-Kutta 法进行积分计算. 相对容许误差为 10^{-3} , 绝对容许误差为 10^{-6} , 时间积分的最大步长为 0.0005 s .

傅立叶级数及傅立叶变换是实现动态信号时-频变换的基本方法. 周期函数的傅立叶级数变换将时域连续函数变为频域离散谱线, 傅立叶变换则将时域连续函数变为频域的连续谱. 快速傅立叶变换 (FFT) 是离散傅立叶变换一种快速算法. 当 $\Delta T_m = 1 \text{ k}$ 时, 图 3 和图 4 分别为用线性模型和非线性模型计算得到的梁中点的横向变形的时间历程和横向变形的 FFT 频谱分析图. 在 FFT 频谱图中, 第一个峰值点对应的频率值为第一阶频率, 第二个峰值点对应的频率值为第二阶频率. 图中显示, 在温度增幅较小的情况下, 由于非线性刚度阵 $\Delta\mathbf{K}$ 的刚化作用大于 $\Delta\mathbf{K}_l$ 的软化作用, 非线性模型的横向振

动频率高于线性模型,横向振动振幅小于线性模型. 频谱分析图表明,线性模型和非线性模型的低阶频率基本相同,非线性模型的高阶频率明显要高于线性模型.

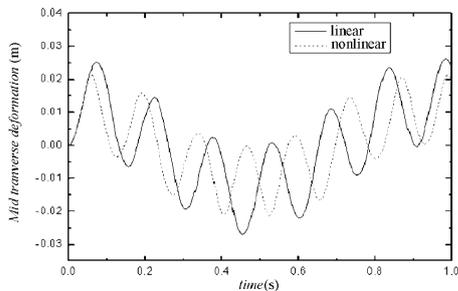


图 3 梁中点横向变形($\Delta T_m = 1k$),_线性模型,...非线性模型

Fig. 3 Time history of transverse deformation of the mid point of the beam ($\Delta T_m = 1k$)

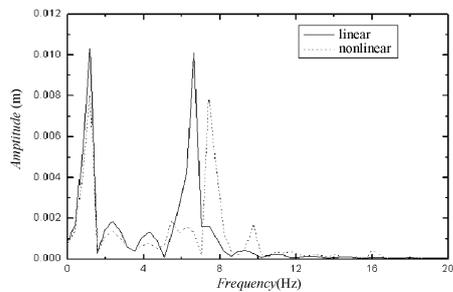


图 4 梁中点横向位移的频谱分析图 ($\Delta T_m = 1k$),_线性模型,...非线性模型

Fig. 4 FFT Analysis of the mid transverse deformation ($\Delta T_m = 1k$)

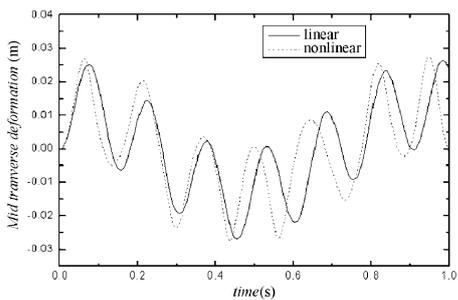


图 5 梁中点横向变形($\Delta T_m = 3k$),_线性模型,...非线性模型

Fig. 5 Time history of transverse deformation of the mid point of the beam ($\Delta T_m = 3k$)

图 5,图 6 和图 7,图 8 为当 $\Delta T_m = 3k$ 和 $\Delta T_m = 6k$ 时对应的梁中点的横向变形和横向变形的 FFT 频谱分析图. 可以发现,随着 ΔT 增高, ΔK_i 的软化效应逐渐体现出来,非线性模型的梁的横向振动频率逐渐降低,振幅逐渐增大,而线性模型的横向振动频率不变. 可以发现,当温度升高到 6 k 时, ΔK_i 的软化效应愈加显著,热膨胀引起的压力增大到一

定程度导致梁中点横向位移越来越大,已经无法恢复到原来的状态,出现了“屈曲失稳”现象. 而线性模型由于并没有考虑非线性刚度矩阵 ΔK 和 ΔK_i 的影响,梁中点的横向位移并不因温度的改变而改变,因此没有出现软化现象.

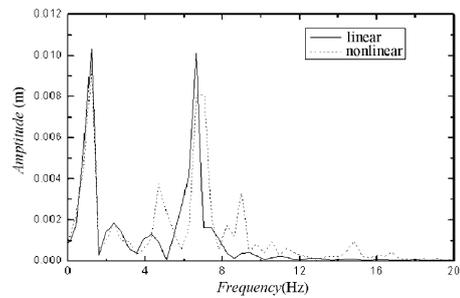


图 6 梁中点横向位移的频谱分析图 ($\Delta T_m = 3k$),_线性模型,...非线性模型

Fig. 6 FFT Analysis of the mid transverse deformation ($\Delta T_m = 3k$)

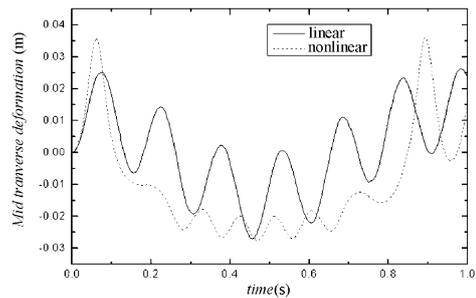


图 7 梁中点横向变形($\Delta T_m = 6k$),_线性模型,...非线性模型

Fig. 7 Time history of transverse deformation of the mid point of the beam ($\Delta T_m = 6k$)

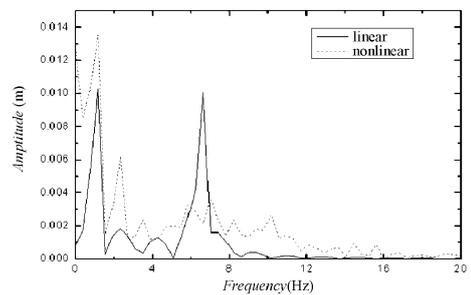


图 8 梁中点横向位移的频谱分析图 ($\Delta T_m = 6k$),_线性模型,...非线性模型

Fig. 8 FFT Analysis of the mid transverse deformation($\Delta T_m = 36$)

图 9,图 10 为在 $\Delta T_m = 4k$ 的情况下,用非线性模型计算得到的梁中点的横向变形的时间历程和横向变形的 FFT 频谱分析图,旋转刚体转动惯量分别为 $J_0 = 5Kg \cdot m^2$ 和 $J_0 = 100Kg \cdot m^2$. 可以发现,在温度变化相同的情况下,随着旋转刚体转动惯量

的增大,横向振动的频率降低,横向振动的振幅也相应减小. 频谱分析表明,系统的一阶和二阶固有频率都随旋转刚体转动惯量的增大而减小. 可以发现,在 $\Delta T_m = 4k$ 的情况下,转动惯量为 $J_0 = 100Kg \cdot m^2$ 时简支梁已经达到屈曲失稳状态,但是转动惯量为 $J_0 = 5Kg \cdot m^2$ 的系统的二阶频率仍大于 0,因此,随着旋转刚体转动惯量的增大,软化效应更加显著. 当 $J_0 = 100Kg \cdot m^2$ 时,系统的频率特征已经趋近于无刚体运动的情况,由此可以推断,在无刚体运动时简支梁更容易达到屈曲失稳状态.

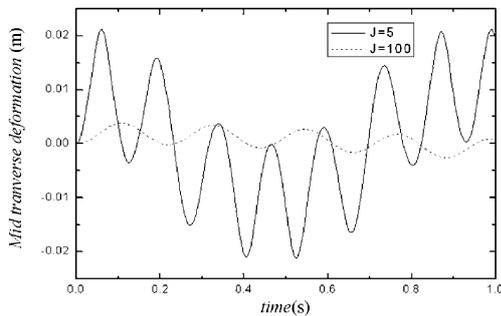


图9 梁中点横向变形($\Delta T_m = 1k$), $J_0 = 5Kg \cdot m^2$, ... $J_0 = 100Kg \cdot m^2$

Fig. 9 Time history of transverse deformation of the mid point of the beam($\Delta T_m = 1k$)

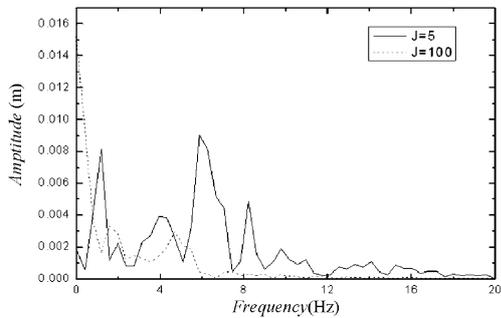


图10 梁中点横向位移的频谱分析图 ($\Delta T_m = 4k$), $J_0 = 5Kg \cdot m^2$, ... $J_0 = 100Kg \cdot m^2$

Fig. 10 FFT Analysis of the mid transverse deformation($\Delta T_m = 4k$)

表1和表2为 $J_0 = 5Kg \cdot m^2$ 和 $J_0 = 100Kg \cdot m^2$ 时系统频率与温度变化的关系. 从表中可以清楚地发现,随着 ΔT_m 的增加,非线性模型的系统的第一阶频率不变,而系统的第二阶频率逐渐降低,当 $J_0 = 5Kg \cdot m^2$ 时,系统的第二阶频率在 $\Delta T_m = 6k$ 时趋于零,达到屈曲失稳的临界状态,而当 $J_0 = 100Kg \cdot m^2$ 时,系统的第二阶频率在 $\Delta T_m = 4k$ 时才达到屈曲失稳的临界状态. 此外,表中显示,线性模型的第二阶频率不随温度而变化.

表1 系统频率与温度变化的关系($J_0 = 5 Kg \cdot m^2$)

Table 1 Relation between system frequency and temperature increase($J_0 = 5 Kg \cdot m^2$)

	Linear	Nonlinear				
		$\Delta T_m = 1K$	$\Delta T_m = 2K$	$\Delta T_m = 3K$	$\Delta T_m = 4K$	$\Delta T_m = 5K$
Ω_1	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17
Ω_2	6.64	7.42	7.03	6.88	6.64	5.86

表2 系统频率与温度变化的关系($J_0 = 100Kg \cdot m^2$)

Table 2 Relation between system frequency and temperature increase($J_0 = 100 Kg \cdot m^2$)

	Linear	Nonlinear		
		$\Delta T_m = 1K$	$\Delta T_m = 2K$	$\Delta T_m = 3K$
Ω_1	0.39	0.39	0.39	0.39
Ω_2	5.47	4.69	3.51	2.73

4 结论

本文在考虑热效应的前提下提出了基于几何非线性的混合坐标建模方法,考虑了动力学方程中变形位移的高次项,既适用于小变形问题,又适用于大变形问题. 对温度场中旋转刚体-简支梁系统进行数值仿真,得到了以下结论:

1. 非线性刚度项 K 和 Kt 分别是简支梁横向变形引起的刚化和温度升高引起的软化的根本原因,成功地揭示了梁刚化和软化效应的实质.
2. 线性模型由于忽视非线性刚度阵的影响,无法揭示梁的刚化和软化效应.
3. 频谱分析表明,系统的一阶固有频率与温度变化无关,而二阶固有频率随温度增高而降低,当二阶固有频率趋于 0 时,出现屈曲失稳现象. 软化效应随旋转刚体的转动惯量增大而愈加显著.

参 考 文 献

- 1 J. D. Johnston, E. A. Thornton. Thermally induced attitude dynamics of a spacecraft with a flexible appendage. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1998, 21: 581 ~ 587
- 2 O. Wallrapp, R. Schwertassek. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *Int. J. numer. Meth. Engng*, 1991, 32: 1833 ~ 1850

- 3 J. Y. Liu, J. Z. Hong. Geometric stiffening effect on rigid – flexible coupling dynamics of an elastic beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278: 1147 ~ 1162
- 4 J. L. Escalona, H. A. Hussien, A. A. Shabana. Application of the absolute nodal co – ordinate formulation to multi-body system dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 214: 883 ~ 851
- 5 M. Berneri, A. A. Shabana. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 235: 539 ~ 565

STUDY ON FREQUENCY CHARACTERISTICS OF RIGID-FLEXIBLE COUPLING SYSTEM CONSIDERING GEOMETRIC NONLINEARITY AND THERMAL EFFECT *

Cui Lin Liu Jinyang Hong Jiazhen

(Department of engineering mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The rigid – flexible coupling dynamic characteristic of a rotating hub – beam system in a temperature field was investigated. Considering geometric nonlinearity and thermal effect, based on the exact nonlinear strain – displacement relationship, the rigid – flexible coupling dynamic equations of the hub – beam system were established using virtual work principle and finite element method. Since the nonlinear stiffness matrices are related to the high order terms of deformation, each element of the nonlinear stiffness matrices is expressed as the product of generalized coordinate vectors and constant matrices. Simulation results show that, by using such formulation, duplicated integration can be avoided and computational efficiency can be significantly improved. Furthermore, the effect of geometric nonlinearity on rigid – flexible coupling dynamics in case of temperature increase was investigated. Spectrum analysis method was used to investigate the change of natural frequencies with the moment of inertia of the hub and the temperature.

Key words geometric nonlinearity, thermal effect, rigid-flexible system