

含时滞项的双稳系统中平均首次穿越时间的研究*

董小娟¹ 徐伟²

(1. 西安电子科技大学理学院数学系, 西安 710071) (2. 西北工业大学理学院数学系, 西安 710072)

摘要 研究了含时滞项的非对称双稳系统中的平均首次穿越时间问题. 应用小时滞近似方法, 得到了系统的 Fokker-Planck 方程及稳态概率密度函数, 进而得到了系统的平均首次穿越时间的表达式, 最后对理论结果做了数值模拟. 数值计算结果表明: (1) 时滞量的大小对系统的稳态概率密度函数的影响是不一样的, 当 $0 < \tau < 0.175$ 时, 系统的稳态概率密度函数曲线仍然为双峰形状; 当 $\tau > 0.175$ 时, 系统的稳态概率密度函数曲线呈现出阱状. (2) 在 $0 < \tau < 0.175$ 时, 讨论了系统的乘性和加性噪声强度对系统的平均首次穿越时间的影响, 发现平均首次穿越时间 T_+ 乘性噪声强度曲线上有最小值出现, 而 T_+ 加性噪声强度曲线是单调的.

关键词 时滞反馈, 稳态概率分布, 非对称双稳系统, 平均首次穿越时间

引言

近年来, 时滞动力系统已成为许多研究领域的重要研究对象. 文献[1]从时滞动力系统的特点、研究方法、动力学热点问题出发, 对非线性时滞动力系统的研究进展做了综述.

噪声诱导的逃逸问题出现在各个领域并已成为人们关注的焦点, 逃逸率和平均首次穿越时间通常是用来刻画逃逸过程的两个特征量. Doering 和 Gadoua 在文献中对分段线性系统的逃逸问题进行研究时首次提出了“激活共振”, 后来在对其他系统进行研究时也发现了“激活共振”现象(文献[2, 3]). 此外, 人们发现噪声之间的相关性对热传导、两维流体力学等物理学过程有很大影响, 因此, 噪声之间的相关性也被引入逃逸问题的研究中. Madureira 等在文献[4]中研究了具有关联乘性噪声和加性噪声的双稳系统, 发现噪声之间的关联性对激活率有很大的影响. 王俊等在文献中证明了噪声之间的相关性能够导致平均首次穿越时间对称性的破裂. 同时, 色噪声的引入也能使平均首次穿越时间的研究中出现共振或抑制现象. 靳艳飞等^[2]研究了非对称双稳系统中平均首次穿越时间, 发现平均首次穿越时间受初值的影响.

现有的对双稳系统的平均首次穿越时间的研究都是在没有考虑时滞对系统的影响下进行的. 而

且, 在不考虑系统的时滞影响时有时会得出错误的结论. 因此, 我们有必要研究含时滞项的双稳系统中平均首次穿越时间问题.

1 双稳系统的 F - P 方程及稳态概率密度

考虑如下的时滞随机微分方程^[4]

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - x^3(t - \tau) + r + x(t)\xi(t) + \eta(t) \quad (1)$$

其中 τ 为该系统的时滞量, r 用来刻画势阱的非对称性. $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为相关的白噪声, 它们的均值和方差为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2\alpha\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2D\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = \\ &2\lambda\sqrt{\alpha D}\delta(t-t') \end{aligned} \quad (2)$$

其中 D 和 α 分别为加性和乘性噪声强度, λ 是噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的关联系数.

由文献[5]作如下的变换, 令 $\eta_1(t) = \eta(t) - \lambda\sqrt{\alpha/D}\xi(t)$, 式(1)可写成

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - x^3(t - \tau) - r + (x(t) + \lambda\sqrt{\alpha/D})\xi(t) + \eta_1(t) \quad (3)$$

其中 $\xi(t)$ 和 $\eta_1(t)$ 不相关.

2007-03-02 收到第1稿, 2007-07-01 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10472091, 10332030)资助项目

以下记 $x(t)$ 为 x , 记 $x(t - \tau)$ 为 x_τ . 由文献 [4], 可得系统(3)的概率密度函数 $\rho(x, t)$ 满足下面的 FP 方程

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[h_a(x) + G_a(x) \frac{dG_a(x)}{dx} \right] \times \rho(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [G_a^2(x)] \rho(x, t) \quad (4)$$

其中 $h_a(x) = (x - x^3 - r)(1 + 3\tau x^2)$, $G_a(x) = [D(x + \lambda\sqrt{\alpha/D})^2 + \alpha](1 + 3\tau x^2)$, 求解(4)式可得稳态概率密度为 $\rho_{st}(x) = N[G_a(x)]^{-1/2} \exp[-\frac{\tilde{U}(x)}{D}]$, 上式中

N 为归一化常数, $\tilde{U}(x)$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & -\frac{m}{2} \ln[D(x+z)^2 + \alpha] + \frac{m}{2} \ln(1 + 3\tau x^2) - \\ & \frac{q - pz}{2\alpha} \frac{Dx}{D(x+z)^2 + \alpha} + \frac{p}{2(D(x+z)^2 + \alpha)} - \\ & \frac{n + q - z(m+p)}{\sqrt{\alpha D}} \text{Darctan} \sqrt{\frac{D}{\alpha}}(x+z) - \\ & \frac{vD}{\sqrt{3\tau}} \arctan \sqrt{3\tau}x \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} z = & \lambda\sqrt{\alpha/D}, h = \tau + Dz^2, f_1 = D + 3\alpha\tau + 3D\tau z^2, \\ f_2 = & 4D^2z^2 + 2Dh, f_3 = h^2 + 4Dhz, f_4 = f_1 - 3\tau h, \\ f_5 = & f_2 - 3\tau f_3, f_6 = f_1 - 3\tau h, f_7 = f_2 - 3\tau h^2, \\ g_1 = & 3\tau D - 3\tau f_4, g_2 = 4D^2z + 36Dzh\tau^2, \\ g_3 = & D^2 - 3\tau f_5, g_4 = 3\tau Df_6, g_5 = 4D^2zf_6 - 6\tau Dzf_7, \\ g_6 = & D^2f_6 - 24\tau D^3z^2, g_7 = 6\tau Dz(3\tau + 1), \\ gg_1 = & g_1g_5 - g_2g_4, gg_3 = g_1g_7, gg_2 = g_1g_6 - g_3g_4, \\ ff_1 = & g_3g_4 - g_1g_6, ff_2 = g_3g_5 - g_2g_6, ff_3 = g_3g_7, \\ u_1 = & \frac{2zD^2}{3\tau} + \frac{ff_2}{ff_1}f_4 + 12Dzh\tau + \frac{gg_1}{gg_2}f_5, u_2 = \frac{ff_3}{ff_1}f_4 + \frac{gg_3}{gg_2}f_5, \\ u = & \frac{u_2}{u_1}, n = \frac{ff_3 - uff_2}{ff_1}, v = \frac{gg_3 - ugg_1}{gg_2}, m = -\frac{Du}{3\tau}, \\ p = & 1 - mh - 2nDz - uh^2, q = -nh - 4uhDz - vf_3. \end{aligned}$$

数值计算结果表明,当时滞量 $0 < \tau < 0.175$ 时系统(4)仍为双稳系统,其稳态概率密度函数如图 1(a)所示,由图 1(a)可见,系统的概率密度曲线上呈现出双峰形状,即此时系统是双稳结构. 且从图 1(a)发现,随着时滞量的增大,概率密度曲线上的双峰陡然增高. 当时滞量 $\tau > 0.175$ 时,由图 1(b)易见此时系统的稳态概率密度已不具有双峰结构. 数值计算结果进一步表明,系统(3)的势函数的

形状当噪声的相关系数 $\lambda \neq 0$ 不为双稳结构(如图(2)),而且,由图 2 可见,噪声的相关性影响势函数的对称性,并且时滞量越大,势函数越不对称. 因此,以下我们讨论系统的平均首穿时间时不妨取 $0 < \tau < 0.175, \lambda = 0$.

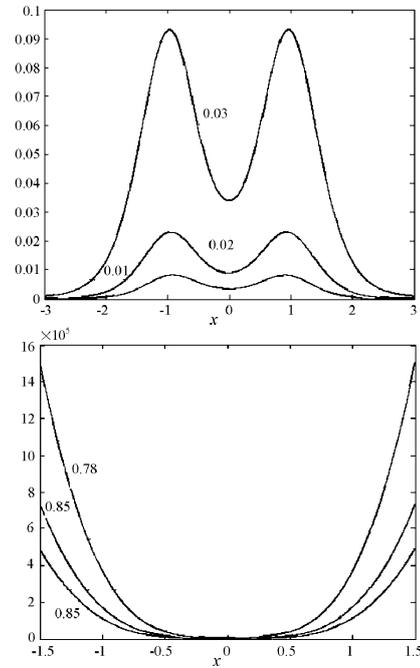


图1 稳态概率密度函数 $\rho_{st}(x)$ 随时滞量 τ 的变化 ($D=0.4, \alpha=0.2, \lambda=0, r=0$)
Fig. 1 The stationary probability distributions $\rho_{st}(x)$ as a function of the delay time τ ($D=0.4, \alpha=0.2, \lambda=0, r=0$)

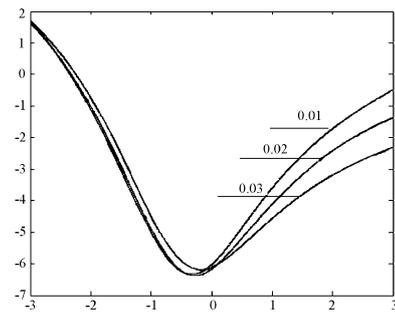


图2 势函数 $\tilde{U}(x)$ 随时滞量 τ 的变化曲线 ($D=0.4, r=0$)
Fig. 2 The potential function $\tilde{U}(x)$ as a function of the delay time τ ($D=0.4, r=0$)

2 平均首次穿越时间

由以上的分析可见,当 $0 < \tau < 0.175, \lambda = 0$ 时,系统为一个双稳系统,以下来研究一下时滞对系统的平均首穿时间的影响.

根据 $x(t) - x^3(t) + r = 0$ 可得它的两个稳定点和一个不稳定点分别为:

$$x_{s1} = -1, x_{s2} = 1, x_{un} = 0$$

分别用 s_{s1}, s_{s2} 和 s_{un} 表示两个稳定点和不稳定点. 利用平均首次穿越时间的定义文献和最速下降法文献[7], 可得两个不同方向的平均首次穿越时间为

$$T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}) = \frac{2\pi |(-1 + 3x_{s1}^2)(-1 + 3x_{un}^2)|^{-1/2}}{\sqrt{\alpha x_{s1}^2 + D}} \times \exp\left\{\frac{\tilde{U}(x_{un}) - \tilde{U}(x_{s1})}{D}\right\} \quad (6)$$

$$T_+(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) = \frac{2\pi |(-1 + 3x_{s2}^2)(-1 + 3x_{un}^2)|^{-1/2}}{\sqrt{\alpha x_{s2}^2 + D}} \times \exp\left\{\frac{\tilde{U}(x_{un}) - \tilde{U}(x_{s2})}{D}\right\} \quad (7)$$

其中 $\tilde{U}(x)$ 如(5)所示, 本文为了研究时滞量 τ 对平均首次穿越时间的影响, 我们在以下的计算过程中不妨假设系统的非对称系数 $r=0$, 则此时两个方向的平均首次穿越时间相等, 因此, 我们只需研究(6)即可.

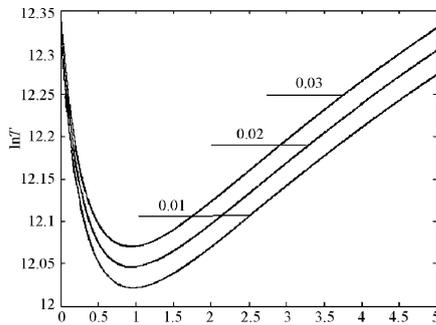


图3 平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 作为乘性噪声强度 α 的函数随时滞量 τ 变化的曲线 ($D=0.4, \alpha=0.2, \lambda=0.25, r=0$)

Fig. 3 The mean first - passage time $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ as a function of the multiplicative noise intensity α

with different delay time τ ($D=0.4, \alpha=0.2, \lambda=0.25, r=0$)

图3是系统的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随乘性噪声强度 α 变化的曲线, 由图3可见, 系统的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随乘性噪声强度 α 的增大先减小, 然后又随着的增大而增大. 如何去解释图3中的现象呢? 由图1(a)系统的稳态概率密度的曲线可以看到, 随着系统时滞量的增大, 概率密度函数的双峰的高度增高且峰宽越来越小, 也就是说其对应的势函数的双阱的势垒随着时滞量的增大而变高, 且势阱的阱宽随着时滞量的增大而变窄, 当时滞量开始较小时, 势阱的高度

变小, 因此曲线上出现了一个极小值, 而后由于势垒高度随着时滞量 τ 的高度增大, 这可以解释曲线的后面为什么是上升的. 由图3还可见, 随着时滞量 τ 的增大, 平均首次穿越时间增大.

图4是平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 作为加性噪声强度 D 的函数随时滞量 τ 变化的曲线 ($D=0.4, \alpha=0.2, r=0$). 当 $0 < \tau < 0.175$ 时, 不论 τ 取何值, 该曲线始终如图中所示, 也就是说此时时滞的大小对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 的影响不大. 且由曲线可见, 随着加性噪声强度的增大, 平均首次穿越的时间减小. 也就是说, 在存在时滞的情形下, 通过增大加性噪声的强度, 可以增大粒子的逃逸率.

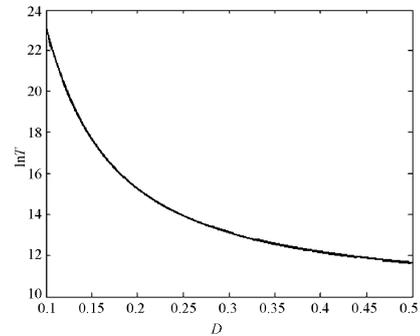


图4 平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$

作为加性噪声强度 D 的函数随时滞量 τ 变化的曲线 ($\alpha=0.2, r=0$)

Fig. 4 The mean first - passage time $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ as a function of the additive noise intensity with D different delay time τ ($\alpha=0.2, r=0$)

参 考 文 献

- 1 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展. 力学进展, 1999, 29: 501 ~ 509 (Hu HY, Wang ZH. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays. *Advances in Mechanics*, 1999, 29: 501 ~ 509 (in Chinese))
- 2 靳艳飞, 徐伟, 马少娟, 李伟. 非对称双稳系统中平均首次穿越时间的研究. 物理学报, 2005, 54: 3480 ~ 3486 (Jin YF, Xu W, Ma ShJ, Li W. The mean first-passage time for an asymmetric bistable system driven by multiplicative and additive noise. *Acta Phys. Sin*, 2005, 54: 3480 ~ 3486 (in Chinese))
- 3 Mcnamara B, Wiesenfeld K. Theory of Stochastic resonance. *Physical Review A*, 1989, 39: 4854 ~ 4869
- 4 Dan Wu, Shiqun Zhu. Stochastic resonance in a bistable system with time - delayed feedback and non - Gaussian noise. *Physics Letters A*, 2007, 363: 202 ~ 212
- 5 靳艳飞, 徐伟, 申建伟. 关联噪声对线性系统信噪比的

- 影响. 动力学与控制学报, 2005, 3: 32 ~ 35 (Jin YF, Xu W, Shen JW. Effects of correlated noises on the signal-to-noise ratio in a linear system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3: 32 ~ 35 (in Chinese))
- 6 康艳梅, 徐健学, 谢勇. 单模非线性光学系统的弛豫速率与随机共振. 物理学报, 2003, 52: 2712 ~ 2717 (Kang YM, Xu JX, Xie Y. Relaxation rate and Stochastic resonance of a single-mode nonlinear optical system. *Acta Phys. Sin*, 2003, 52: 2712 ~ 2717 (in Chinese))
- 7 胡岗. 随机力与非线性系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1994 (Hu Gang. Stochastic forces and nonlinear systems. Shanghai: Shanghai Science and Technological Education Publishing House (in Chinese))
- 8 T D Frank Delay Fokker - Planck equations, perturbation theory, and date analysis for nonlinear stochastic systems with time delays. *Physical Review E*, 2005, 71 03110601 - 16

THE MEAN FIRST-PASSAGE TIME FOR A BISTABLE SYSTEM WITH TIME-DELAYED FEEDBACK *

Dong Xiaojuan¹ Xu Wei²

(1. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(2. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The mean first-passage time in an asymmetric bistable system with time-delayed feedback was investigated. Under the condition of small time delay approximation theory, the approximate Fokker-Planck equation and the stationary probability distribution function were obtained, then the expression of the mean first-passage time was obtained, and the theoretical results by numerical simulation were discussed. Numerical results show that: (1) The value of the delay time can cause different effects on the stationary probability distribution function: when, there are still two peaks in the curve of the stationary probability distribution; when, there exists a valley in the curve of the stationary probability distribution; (2) when, we studied the effects of multiplicative noise intensity and additive noise intensity on the mean first-passage time, and found there existed a valley in the curve of τ , while the curve of τ_a was monotonic.

Key words time-delayed feedback, stationary probability distribution, asymmetric bistable system, mean first-passage time