

一般 Hirota-Satsuma 方程的多孤子解及孤子间的相互作用*

包金山¹ 那仁满都拉² 额尔敦仓²

(1. 内蒙古民族大学学报编辑部, 通辽 028043) (2. 内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

摘要 用改进的齐次平衡法, 首先把不可积的一般 Hirota-Satsuma 方程简化成可积模型—KdV 方程, 然后通过求解 KdV 方程得到了一般 Hirota-Satsuma 方程的多孤子解. 利用得到的多孤子解分析了奇异孤子之间、钟型孤子与奇异孤子之间的相互作用, 结果发现了相互作用的一些重要性质.

关键词 一般 Hirota-Satsuma 方程, 多孤子解, 孤子相互作用, 改进的齐次平衡法

引言

现代孤子理论在自然科学, 如凝聚态物理、流体力学、等离子体物理、纤维光学、天体物理、生命科学等众多领域中扮演着重要角色, 有着广泛的应用前景^[1,2]. 孤子的相互作用性质是孤子能否更好地实际应用的关键因素, 是孤子理论具有良好应用前景的基础. 因此可积模型中孤子相互作用性质的研究是十分有意义的课题. 目前, 对(1+1)维可积模型的孤子结构及相互作用性质已研究的比较深入^[1-6], 而(2+1)维可积模型的孤子结构以及相互作用性质也正在逐步深入研究中^[7-9]. 但由于非线性模型本身的复杂以及孤子相互作用规律的复杂性, 这方面的问题还有待于进一步深入研究.

本文考虑更一般的 Hirota-Satsuma 方程

$$u_t + a_1 uu_x - a_2 vv_x + a_3 u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

$$v_t + b_1 uv_x + b_2 v_{xxx} = 0 \quad (2)$$

其中系数 a_1, a_2, a_3, b_1 及 b_2 是与系统本质特征有关的可选参数. 文[10-12]以及所引的其他文中都研究了方程(1)和(2)的一些特殊情况(方程的系数 a_1, a_2, a_3, b_1 及 b_2 取某些特殊值时), 并给出了方程的孤立波解、周期波解以及有理分式解, 但这些文中没有给出方程(1)和(2)的多孤子解以及孤子间的相互作用. 本文将利用改进的齐次平衡法, 给出方程(1)和(2)的多孤子解, 并利用多孤子解分析奇异孤子之间以及钟型孤子与奇异孤子之间的相互作用.

1 一般 Hirota-Satsuma 方程的多孤子解及孤子相互作用

按照改进的齐次平衡法的基本思想^[13,14], 为了使方程组(1)和(2)中的非线性项和最高阶导项部分平衡, 我们可设方程(1)和(2)具有如下形式解

$$u(x, t) = f^i(\omega) \omega_x^2 + f^j(\omega) \omega_{xx} \quad (3)$$

$$v(x, t) = \lambda (f^i(\omega) \omega_x^2 + f^j(\omega) \omega_{xx}) \quad (\lambda \neq 0) \quad (4)$$

其中 $f(\omega), \omega(x, t)$ 为待定函数, λ 为待定常数. 依照改进的齐次平衡法的基本做法, 由(3)和(4)式, 可得到 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 之间的一种简单的变换关系

$$v = \lambda u \quad (5)$$

把式(5)代入方程组(1)和(2)可得

$$u_t + a_1 uu_x - \lambda^2 a_2 uu_x + a_3 u_{xxx} = 0 \quad (6)$$

$$u_t + b_1 uu_x + b_2 u_{xxx} = 0 \quad (7)$$

如果方程的系数 a_1, a_2, a_3, b_1 及 b_2 选择如下

$$b_1 = a_1 - a_2 \lambda^2 \quad (8)$$

$$b_2 = a_3 \quad (9)$$

则方程(6)和(7)变成如下标准的 KdV 方程

$$u_t + b_1 uu_x + b_2 u_{xxx} = 0 \quad (10)$$

这表明在复杂的不可积非线性系统(1)和(2)中, 如果适当选取参数之间的关系可以把它简化成我们熟悉的可积模型. 从构造可积模型的角度来考虑, 这样做是很有意义的. 下面通过求解 KdV 方程, 给出一般 Hirota-Satsuma 方程的多孤子解. 为此, 把式(3)代入方程(10)整理之后, 令 ω_x^5 的系数为零可得

2007-04-06 收到第1稿, 2007-05-10 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(40564001)、内蒙古自然科学基金(200408020113)资助项目

$$b_2 f^{(5)}(\omega) + b_1 f''(\omega) f'''(\omega) = 0 \quad (11)$$

解之得

$$f(\omega) = 12 \frac{b_2}{b_1} \ln(\omega) \quad (12)$$

为了求出 KdV 方程(10)的多孤子解,可假设 $\omega(x, t)$ 具有如下形式^[5,15]

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & 1 + \sum_{i=1}^N p_i e^{m_i x + l_i t} + \sum_{i=j+1}^N \sum_{l_j=1}^{N-1} q_{ij} e^{(m_i+m_j)x + (l_i+l_j)t} + \\ & \sum_{i=k+2}^N \sum_{j=k+1}^{N-1} \sum_{l_k=1}^{N-2} r_{ijk} e^{(m_i+m_j+m_k)x + (l_i+l_j+l_k)t} + \\ & \Lambda + d e^{(m_1+m_2+\Lambda+m_N)x + (l_1+l_2+\Lambda+l_N)t} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $m_i, m_j, m_k, m_N, l_i, l_j, l_k, l_N, p_i, q_{ij}, r_{ijk}$ 和 d 都是待定常数, N 为自然数, 它的取值决定孤子的数目. 为简便起见, 这里我们求双孤子解, 所以 $N = 2$. 此时把式(13)、(12)及(3)代入方程(10)整理后, 令 $e^{n(m_1x+l_1t)+k(m_2x+l_2t)}$ ($n, k = 0, 1, 2, 3$) 各项的系数为零, 则可得到

$$l_1 = -b_2 m_1^3 \quad (14)$$

$$l_2 = -b_2 m_2^3 \quad (15)$$

$$d = \frac{p_1 p_2 (m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (16)$$

把式(14)、(15)、(16)及(13)代入式(12), 再把式(12)代入式(3)就可得 KdV 方程(10)的双孤子解

$$u(x, t) = 12 \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{f_1}{fm} \right) - \frac{f_2^2}{fm^2} \quad (17)$$

这里 f_1, f_2 以及 fm 分别表示

$$\begin{aligned} f_1 = & p_1 m_1^2 e^{m_1(x-b_2 m_1^2 t)} + p_2 m_2^2 e^{m_2(x-b_2 m_2^2 t)} + \\ & p_1 p_2 (m_1 - m_2)^2 e^{[(m_1+m_2)x - b_2(m_1^2+m_2^2)t]} \\ f_2 = & p_1 m_1 e^{m_1(x-b_2 m_1^2 t)} + p_2 m_2 e^{m_2(x-b_2 m_2^2 t)} + \\ & \frac{p_1 p_2 (m_1 - m_2)^2 e^{[(m_1+m_2)x - b_2(m_1^2+m_2^2)t]}}{(m_1 + m_2)} \\ fm = & 1 + p_1 e^{m_1(x-b_2 m_1^2 t)} + p_2 e^{m_2(x-b_2 m_2^2 t)} + \\ & \frac{p_1 p_2 (m_1 - m_2)^2 e^{[(m_1+m_2)x - b_2(m_1^2+m_2^2)t]}}{(m_1 + m_2)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 m_1, m_2, p_1, p_2 都是任意常数. 这样我们得到了 KdV 方程的双孤子解, 而一般 Hirota-Satsuma 方程的双孤子解为

$$u(x, t) = 12 \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{f_1}{fm} \right) - \frac{f_2^2}{fm^2} \quad (19)$$

$$v(x, t) = \lambda u(x, t) \quad (20)$$

这里 f_1, f_2, fm 由式(18)给出, 方程的系数满足关系式(8)和(9), 而 λ 是任意常数. 下面我们就以物理场 $u(x, t)$ 作为例子, 分析孤子之间的相互作用. 首

先, 当 $p_2 = 0$ (或 $p_1 = 0$) 时, 从双孤子解(19)可得

$$u(x, t) = \frac{12 b_2 p_1 m_1^2 e^{m_1(x-b_2 m_1^2 t)}}{b_1 (1 + p_1 e^{m_1(x-b_2 m_1^2 t)})^2} \quad (21)$$

在上式中, 当 $p_1 = 1$ 时得

$$u(x, t) = \frac{3 b_2 m_1^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_1}{2} (x - b_2 m_1^2 t) \right]}{b_1} \quad (22)$$

这是一种传播速度为 $b_2 m_1^2$, 幅度为 $\frac{3 b_2}{b_1} m_1^2$ 的钟型孤子. 当 $p_1 = -1$ 时得

$$u(x, t) = \frac{3 b_2 m_1^2 \operatorname{csch}^2 \left[\frac{m_1}{2} (x - b_2 m_1^2 t) \right]}{b_1} \quad (23)$$

这是一种奇异解, 因此它描述的不是真正意义上的孤子, 人们通常从广义意义上称它为奇异孤子. 那么, 这种奇异孤子的相互作用的性质如何, 是否也具有弹性碰撞的性质? 它与钟型孤子之间的碰撞又会怎样? 对这些问题已有文献没有进行明确的分析, 因此这里我们作一些必要的讨论. 首先通过解析分析来证明, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 解(17)明显地表征双孤子, 并经过相互作用的过程, $t \rightarrow \infty$ 时, 解(17)还是能够表征双孤子, 并且这时的双孤子和相互作用之前的双孤子完全相同. 我们只在 $\Delta = m_1^2 - m_2^2 > 0$ ($\Delta = m_1^2 - m_2^2 < 0$ 的情况完全相同) 的情况下进行讨论. 先固定 $\xi_1 = x - b_2 m_1^2 t$, 因 $\xi_2 = \xi_1 + b_2 \Delta t$, 则当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $e^{m_2 \xi_2} \rightarrow 0$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{m_2 \xi_2} \rightarrow \infty$. 因此有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} u = & 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_1 m_1^2 e^{m_1 \xi_1}}{(1 + p_1 e^{m_1 \xi_1})^2} = 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_1 m_1^2}{(e^{-m_1 \xi_1/2} + p_1 e^{m_1 \xi_1/2})^2} = \\ & \begin{cases} 3 \frac{b_2}{b_1} m_1^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_1}{2} (x - b_2 m_1^2 t) \right] & (p_1 = 1) \\ -3 \frac{b_2}{b_1} m_1^2 \operatorname{csch}^2 \left[\frac{m_1}{2} (x - \Delta m_1^2 t) \right] & (p_1 = -1) \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u = & 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_1 m_1^2 \Omega^2 e^{m_1 \xi_1}}{(1 + p_1 \Omega^2 e^{m_1 \xi_1})^2} = \\ & 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_1 m_1^2}{(e^{-(m_1 \xi_1 + 2 \ln \Omega)/2} + p_1 e^{(m_1 \xi_1 + 2 \ln \Omega)/2})^2} = \\ & \begin{cases} 3 \frac{b_2}{b_1} m_1^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_1}{2} (x - b_2 m_1^2 t) + \ln \Omega \right] & (p_1 = 1) \\ -3 \frac{b_2}{b_1} m_1^2 \operatorname{csch}^2 \left[\frac{m_1}{2} (x - b_2 m_1^2 t) + \ln \Omega \right] & (p_1 = -1) \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\Omega = (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2)$. 由式(24)和(25)可看出, 相互作用前的钟型孤子 1 和相互作用之后的钟型孤子 1 在幅度、速度及波形等各方面都完全相同, 只有相位有些变化. 这表明钟型孤子相互作用之后, 波形和速度都保持不变, 只有相位的漂移.

这一结果已被人们所证实^[3-5],所以这里我们不再进行过多的讨论. 同样由式(24)和式(25)可看出, 相互作用之前的奇异孤子1和相互作用之后的奇异孤子1也完全相同. 这表明奇异孤子之间的相互作用也类似于钟型孤子的相互作用, 它们相互作用之后也能保持波形和速度, 只有相位的漂移. 因此, 从这个意义上我们称奇异孤子也比较合理. 如果固定 $\xi_2 = x - b_2 m_2^2 t$, 因而 $\xi_1 = \xi_2 - b_2 \Delta t$, 则当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $e^{m_1 \xi_1} \rightarrow 0$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{m_1 \xi_1} \rightarrow \infty$. 故有

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u = 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_2 m_2^2 \Omega^2 e^{m_2 \xi_2}}{(1 + p_2 \Omega^2 e^{m_2 \xi_2})^2} = 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_2 m_2^2}{(e^{-(m_2 \xi_2 + 2 \ln \Omega)/2} + p_2 e^{(m_2 \xi_2 + 2 \ln \Omega)/2})^2} = \begin{cases} 3 \frac{b_2}{b_1} m_2^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_2}{2} (x - b_2 m_2^2 t) + \ln \Omega \right] & (p_2 = 1) \\ -3 \frac{b_2}{b_1} m_2^2 \operatorname{csch}^2 \left[\frac{m_2}{2} (x - b_2 m_2^2 t) + \ln \Omega \right] & (p_2 = -1) \end{cases} \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_2 m_2^2 e^{m_2 \xi_2}}{(1 + p_2 e^{m_2 \xi_2})^2} = 12 \frac{b_2}{b_1} \frac{p_2 m_2^2}{(e^{-m_2 \xi_2/2} + p_2 e^{m_2 \xi_2/2})^2} = \begin{cases} 3 \frac{b_2}{b_1} m_2^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m_2}{2} (x - b_2 m_2^2 t) \right] & (p_2 = 1) \\ -3 \frac{b_2}{b_1} m_2^2 \operatorname{csch}^2 \left[\frac{m_2}{2} (x - b_2 m_2^2 t) \right] & (p_2 = -1) \end{cases} \quad (27)$$

式中 $\Omega = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$. 由(26)和(27)式可看出, 钟型孤子2以及奇异孤子2相互作用之后也都能保持原有的波形和速度, 只有相位的漂移.

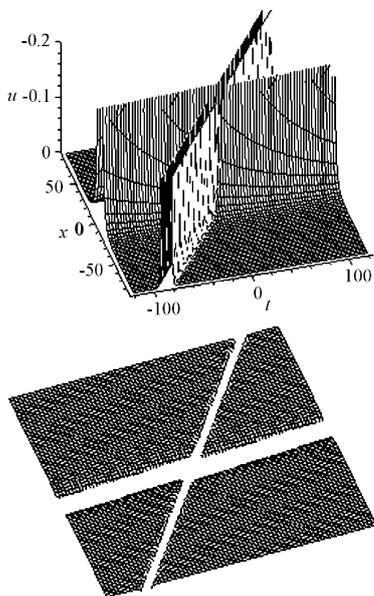


图1 速度相差较大的两个奇异孤子的碰撞

Fig. 1 Collision of two singular solitons with big velocity difference

根据双孤子解, 用图形分析方法分析的结果也证实了这一结论. 当 $p_1 = p_2 = -1, m_2 = 1, m_1 = 0.2, b_1 = b_2 = 1$ 时, 图1中描绘了速度差别比较大的两个奇异孤子的追赶碰撞情况. 由图可看出, 速度相差较大的两个奇异孤子碰撞时, 速度大的奇异孤子迅速穿过速度小的奇异孤子继续传播, 而波形和速度都没有一点变化, 只有些相位的漂移. 当 $p_1 = p_2 = -1, m_1 = 0.4, m_2 = 0.2, b_1 = b_2 = 1$ 时, 图2中描绘了速度接近的两个奇异孤子的追赶碰撞情况. 由图可知, 速度接近的两个奇异孤子碰撞时, 它们不发生真正的碰撞, 而接近到一定程度之后, 两个奇异孤子互相交换角色, 然后就分开. 因此, 奇异孤子相互作用的这些性质与钟型孤子相互作用的性质是一致的.

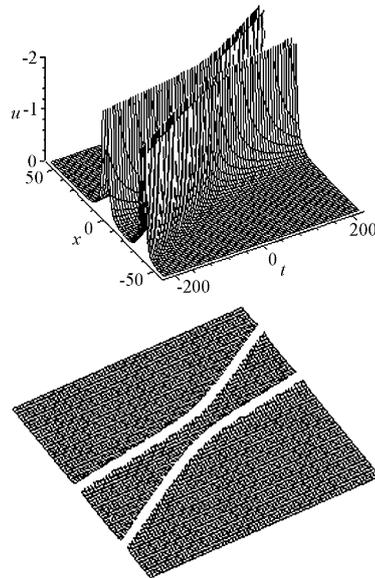


图2 速度接近的两个奇异孤子的碰撞

Fig. 2 Collision of two singular solitons with small velocity difference

当 $p_1 = 1, p_2 = -1, m_1 = 0.2, m_2 = 0.4, b_1 = b_2 = 1$ 时, 图3中绘制了奇异孤子追上钟型孤子并与钟型孤子发生碰撞的情况. 从图上可看出, 速度较快的奇异孤子追上速度较慢的钟型孤子, 并压过钟型孤子之后都能够保持原有的波形和速度, 而只有相位的漂移. 当 $p_1 = 1, p_2 = -1, m_1 = 0.0.4, m_2 = 0.2, b_1 = b_2 = 1$ 时, 图4中绘制了钟型孤子追上奇异孤子并与奇异孤子发生碰撞的情况. 从图上可看出, 速度较快的钟型孤子追上速度较慢的奇异孤子, 它们碰撞之后还都能够保持原有的波形和速度. 但碰撞时两个孤子具有明显的相位漂移并出现钟型孤子遭到破坏的现象. 这一现象与奇异孤子撞

钟型孤子时发生的现象(图3)不同,这是一种有趣的新现象.

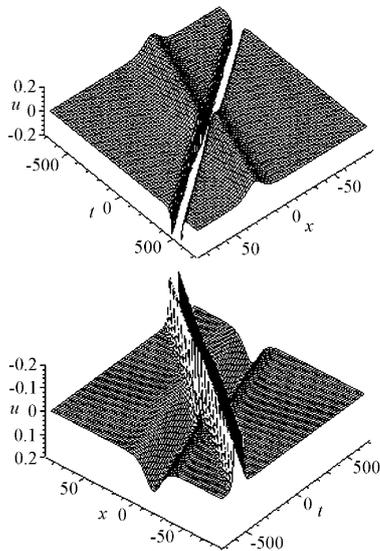


图3 奇异孤子撞钟型孤子的情况

Fig.3 Bell type soliton bumped by singular soliton

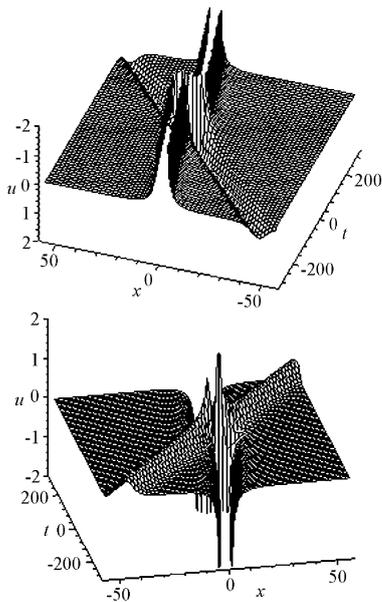


图4 钟型孤子撞奇异孤子的情况

Fig.4 Singular soliton bumped by bell type soliton

2 结语

总之,本文利用改进的齐次平衡法,首先找到方程系数之间的合理关系,从而把不可积的一般 Hirota-Satsuma 方程简化成可积的 KdV 方程. 然后通过求解 KdV 方程得到了一般 Hirota-Satsuma 方程的多孤子解. 利用得到的多孤子解分析了奇异孤子之间的相互作用以及钟型孤子与奇异孤子之间的相互作用,结果发现 Hirota-Satsuma 方程奇异孤

子之间的相互作用具有 KdV 方程钟型孤子之间的相互作用性质,而钟型孤子与奇异孤子之间的相互作用可产生不同的现象. 那就是,速度比较快的钟型孤子追上速度比较慢的奇异孤子,它们碰撞之后虽然能够保持原有的波形和速度,但碰撞时出现钟型孤子遭到破坏的现象;而速度比较快的奇异孤子追上速度比较慢的钟型孤子并压过钟型孤子之后,它们都能够保持原有的波形和速度,也不出现钟型孤子遭到破坏的现象.

参 考 文 献

- 1 Ablowitz M. J. and Clarkson P. A. Solitons nonlinear evolution and Inverse scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991
- 2 Infeld E. and Rowlands G. Nonlinear waves, Solitons and Chaos. Cambridge : Cambridge University Press, 2000 (second edition)
- 3 Zabusky N. J. and Kruskal M. D. Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 1965, 15(6): 240 ~ 243
- 4 Lax P. D. Integrals of nonlinear equation of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1968, 21: 467 ~ 490
- 5 Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 1971, 27(18): 1192 ~ 1194
- 6 谢元喜,唐驾时. 求一类非线性偏微分方程精确解的简化试探函数法. *动力学与控制学报*, 2005, 3(1): 15 ~ 18 (Xie Yuanxi, Tang Jiashi. A simplified trial function method for seeking the exact solutions to a class of nonlinear PDEs. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(1): 15 ~ 18 (in Chinese))
- 7 阮航宇. (2 + 1)维 Sawada-Kotera 方程中两个 Y 周期孤子的相互作用. *物理学报*, 2004, 53(6): 1617 ~ 1622 (Ruan Hangyu. Interactions between two Y-periodic solitons in the (2 + 1)-dimensional Sawada-Kotera equations. *Acta Physical Sinica*, 2004, 53(6): 1617 ~ 1622 (in Chinese))
- 8 阮航宇,陈一新. (2 + 1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程中孤子相互作用的探索. *物理学报*, 2003, 52(6): 1313 ~ 1318 (Ruan Hangyu and Chen Yixin. Study on soliton interaction in the (2 + 1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation. *Acta Physical Sinica*, 2003, 52(6):

- 1313 ~ 1318 (in Chinese))
- 9 叶健芬, 郑春龙, 陈立群. (2 + 1) 维广义 Borel-Kaup 系统的变量分离解和半包局域结构. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 24 ~ 29 (Ye Jianfen, Zheng Chunlong and Chen Liqun. Variable separation solutions and semifolded localized structures for (2 + 1)-dimensional generalized Borel-Kaup system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 24 ~ 29 (in Chinese))
- 10 Hirota R. and Satsuma J. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de-Vries equation. *Physics Letters A*, 1981, 85(3): 407 ~ 409
- 11 Mingliang Wang, Yubin Zhou and Zhibin Li. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 1996, 216(6): 67 ~ 75
- 12 陈黎丽. 形式变量分离法及一般 Hirota-Satsuma 方程新的精确解. 物理学报, 1999, 48(12): 2149 ~ 2153 (Chen Lili. Formally variable separation approach and new exact solutions of generalized Hirota-Satsuma equations. *Acta Physical Sinica*, 1999, 48(12): 2149 ~ 2153 (in Chinese))
- 13 那仁满都拉. 色散长波方程和变形色散水波方程特殊形状的多孤子解. 物理学报, 2002, 51(8): 1671 ~ 1674 (Naranmandula. A special type of multisoliton solutions for the dispersive long-wave equations and the modified dispersive water-wave equations. *Acta Physical Sinica*, 2002, 51(8): 1671 ~ 1674 (in Chinese))
- 14 那仁满都拉, 王克协. (2 + 1) 维频散长波方程与 (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的新的类多孤子解. 物理学报, 2003, 52(7): 1565 ~ 1568 (Naranmandula and Wang kexie. New multisoliton-like solutions for (2 + 1)-dimensional dispersive long-wave equations and (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup equations. *Acta Physical Sinica*, 2003, 52(7): 1565 ~ 1568 (in Chinese))
- 15 卢竞, 颜家壬. 非线性偏微分方程的多孤子解. 物理学报, 2002, 51(7): 1428 ~ 1433 (Lu Jing and Yan Jiaren. Multiple-soliton solutions of the nonlinear partial differential equation. *Acta Physical Sinica*, 2002, 51(7): 1428 ~ 1433 (in Chinese))

MULTIPLE SOLITON SOLUTIONS OF GENERALIZED HIROTA-SATSUMA EQUATIONS AND INTERACTION BETWEEN SOLITONS *

Bao jinshan¹ Naranmandula² Ereduncang²

(1. Editorial department of journal of Inner Mongolia University, Tongliao 028043, China)

(2. College of Physics and Electron-Information, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

Abstract Using the improved homogeneous balance method, the nonintegrable generalized Hirota-Satsuma equations were reduced to integrable model, i. e. KdV equation, and then the multiple soliton solutions of generalized Hirota-Satsuma equations were obtained by solving KdV equation. By dint of multiple soliton solutions, we analyzed the interaction between two singular solitons and the interaction between bell type soliton and singular soliton, and found some new important properties of interaction.

Key words generalized Hirota-Satsuma equations, multiple soliton solutions, soliton interaction, improved homogeneous balance method