

# 双曲型守恒律的一种三阶松弛格式

陈建忠 史忠科

(西北工业大学自动化学院, 西安 710072)

**摘要** 对一维双曲型守恒律,给出了一种形式更简单、计算量更小的三阶松弛格式.该格式以三阶 WENO 重构和三阶显隐式 Runge-Kutta 方法为基础.由于不用求解 Riemann 问题和计算非线性通量函数的雅可比矩阵,所以本文格式保持了松弛格式简单的优点.数值试验表明:该方法具有较高的分辨率.

**关键词** 双曲型守恒律, 松弛格式, WENO 重构, 显隐式 Runge-Kutta 方法

## 引言

松弛格式是近 10 年发展起来的一种高精度、高分辨率有限差分方法,其优点是不用求解 Riemann 问题和计算非线性通量函数的雅可比矩阵.文<sup>[1]</sup>中, Jin 和 Xin 给出了一阶和二阶松弛格式,其主要思想是对双曲型守恒律的求解转化为求解松弛方程组,并用一阶迎风格式和 MUSCL 格式对松弛方程组的空间进行离散,时间的离散采用二阶显隐式 Runge-Kutta 方法.一阶和二阶松弛格式在 Hamilton-Jacobi 方程<sup>[2]</sup>、动力学方程<sup>[3]</sup>、浅水方程的计算<sup>[4,5]</sup>和反应流<sup>[6]</sup>及两相流的模拟等方面得到应用.2004 年,Sea? d<sup>[7]</sup>将松弛格式进行了高阶推广,给出了一种具有三阶精度的松弛格式,该格式基于三阶紧凑中心 WENO 重构<sup>[8]</sup>.三阶紧凑中心 WENO 重构是在构造全离散中心格式时提出来的方法,它一个二次和两个一次多项式进行凸组合.本文基于文<sup>[1,7]</sup>中的构造方法,利用一种高阶迎风格式即三阶 WENO 格式的重构方法<sup>[9]</sup>,给出了一种更简单、计算量更小的三阶松弛格式.最后通过数值算例,对新的三阶松弛格式和原三阶格式进行了比较.结果表明本文方法有较高的分辨率并且具有计算量小的优点.

## 1 三阶松弛格式的构造

考虑一维双曲型守恒律

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u \in R^n \quad (1)$$

采用文<sup>[1]</sup>中给出的松弛方法将守恒律(1)转化为

松弛方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\tau}(v - f(u)) \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $v \in R^n$ ,  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是正的对角矩阵,  $\tau > 0$  是松弛率.这种转化的主要优点在于利用松弛方程组(2)的线性特征场的特殊结构构造简单、有效的数值方法.

松弛方程组(2)有两个特征变量  $v \pm A^{1/2}u$ , 当时  $\tau \rightarrow 0$ , 若下列的子特征条件(subcharacteristic condition)成立<sup>[4,5,7]</sup>

$$-\sqrt{a} \leq \lambda \leq \sqrt{a} \quad (3)$$

则松弛方程组(2)的解趋于守恒律组(1)的解,其中  $\lambda$  表示雅可比矩阵  $f'(u)$  的任意一个特征值,  $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

以  $u_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u(x, t) dx$  表示  $t$  时刻网格  $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  上的均值, 变量  $u$  在  $(x_{j+\frac{1}{2}}, t)$  的点值记为  $u_{j+\frac{1}{2}}(t)$ . 松弛格式采用线化方法(the method of lines)<sup>[1]</sup>, 将时间离散和空间离散分开, 对空间进行离散时, 时间方向保持连续. 松弛方程组(2)守恒形式的空间离散为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x}(v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}) &= 0 \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x}A(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{\tau}(v_j - f(u_j)) \end{aligned} \quad (4)$$

由上式可知,为完成空间离散,需要计算点值  $\{u_{j+\frac{1}{2}}\}$

和  $\{v_{j+\frac{1}{2}}\}$ . 利用已知网格均值  $\{u_j\}$  重构分片多项式

$$\tilde{u}(x) = \sum_j p_j(x; \mathbf{u}) x_j(x) \quad (5)$$

式中  $p_j(x; \mathbf{u})$  是定义在  $I_j$  上的插值多项式,  $x_j$  是  $I_j$  上的特征函数. 用  $u_{j+\frac{1}{2}}^- = p_j(x_{j+\frac{1}{2}}; \mathbf{u})$  和  $u_{j+\frac{1}{2}}^+ = p_{j+1}(x_{j+\frac{1}{2}}; \mathbf{u})$  分别表示重构  $\tilde{u}(x)$  在  $x_{j+\frac{1}{2}}$  左侧和右侧的值.

构造半离散松弛格式的关键在于确定重构函数以计算网格界面处的值. 文<sup>[7]</sup>给出的三阶松弛格式是以三阶紧凑中心 WENO 重构为基础, 三阶紧凑中心 WENO 重构是一个二次和两个一次多项式进行凸组合. 本文采用三阶 WENO 重构<sup>[9]</sup>, 它是两个一次多项式的凸组合. WENO 方法是在 ENO 方法的基础上发展起来的, 其基本思想是将 ENO 方法只选择最光滑模板改进为每一个可能模板的加权平均, 而权值可以度量模板的光滑程度.

在每个网格  $I_j$ , 三阶 WENO 重构计算  $u_{j+\frac{1}{2}}^\pm$  的方法为

$$\begin{aligned} u_{j+\frac{1}{2}}^- &= p_j(x_{j+\frac{1}{2}}; \mathbf{u}) = \sum_{r=0}^1 \omega_r q_{j+\frac{1}{2}}^{(r)}, \\ u_{j-\frac{1}{2}}^+ &= p_j(x_{j-\frac{1}{2}}; \mathbf{u}) = \sum_{r=0}^1 \tilde{\omega}_r \tilde{q}_{j-\frac{1}{2}}^{(r)} \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $q_{j+\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{1}{2}u_j + \frac{1}{2}u_{j+1}$ ,  $q_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = -\frac{1}{2}u_{j-1} + \frac{3}{2}u_j$ ,  $\tilde{q}_{j+\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{3}{2}u_j - \frac{1}{2}u_{j+1}$ ,  $\tilde{q}_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{2}u_{j-1} + \frac{1}{2}u_j$ .  $u, u_{j+\frac{1}{2}}^-$  和  $u_{j-\frac{1}{2}}^+$  分别表示是  $\mathbf{u}, u_{j+\frac{1}{2}}^-$  和  $u_{j-\frac{1}{2}}^+$  的第  $k$  个分量. 相应的权值为

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{m=0}^1 \alpha_m}, \alpha_r = \frac{d_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, r=0,1, d_0 = \frac{2}{3}, d_1 = \frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\tilde{\omega}_r = \frac{\tilde{\alpha}_r}{\sum_{m=0}^1 \tilde{\alpha}_m}, \tilde{\alpha}_r = \frac{\tilde{d}_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, r=0,1, \tilde{d}_0 = \frac{1}{3}, \tilde{d}_1 = \frac{2}{3} \quad (8)$$

式中  $\varepsilon > 0$  的引入是为了避免分母为零, 取  $\varepsilon = 10^{-6}$ . 光滑因子  $\beta_r$  为

$$\beta_0 = (u_{j+1} - u_j)^2, \beta_1 = (u_j - u_{j-1})^2$$

用类似方法可得重构  $p_j(x; \mathbf{v} + A^{1/2}\mathbf{u})$  和  $p_j(x; \mathbf{v} - A^{1/2}\mathbf{u})$  在  $x_{j+\frac{1}{2}}$  处的点值, 并用它们离散松弛方程组(2)的两个特征变量  $\mathbf{v} \pm A^{1/2}\mathbf{u}$ , 有

$$(v + \sqrt{a_k u})_{j+\frac{1}{2}} = (v + \sqrt{a_k u})_{j+\frac{1}{2}}^- = p_j(x_{j+\frac{1}{2}}; v + \sqrt{a_k u})$$

$$(v - \sqrt{a_k u})_{j+\frac{1}{2}} = (v - \sqrt{a_k u})_{j+\frac{1}{2}}^+ = p_j(x_{j+\frac{1}{2}}; v - \sqrt{a_k u}) \quad (9)$$

式中  $v, v + \sqrt{a_k u}$  和  $v - \sqrt{a_k u}$  分别是  $\mathbf{v}, \mathbf{v} + A^{1/2}\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v} - A^{1/2}\mathbf{u}$  的第  $k$  个分量. 解之得

$$u_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a_k}}(p_j(x_{j+\frac{1}{2}}; v + \sqrt{a_k u}) - p_{j+1}(x_{j+\frac{1}{2}}; v - \sqrt{a_k u}))$$

$$v_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_j(x_{j+\frac{1}{2}}; v + \sqrt{a_k u}) + p_{j+1}(x_{j+\frac{1}{2}}; v - \sqrt{a_k u})) \quad (10)$$

其中  $u_{j+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}}$  分别是  $\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}$  和  $\mathbf{v}_{j+\frac{1}{2}}$  的第  $k$  个分量.

采用 Simpson 公式估计通量  $f(\mathbf{u})_j$

$$f(\mathbf{u})_j = \frac{1}{6}(f(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^-) + 4f(\hat{\mathbf{u}}_j) + f(\mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^+)) \quad (11)$$

其中  $\hat{\mathbf{u}}_j = p_j(x_j; \mathbf{u})$ .

半离散松弛格式右端含有刚性源项, 一般的显式方法很难计算, 隐式方法计算过程包含许多的非线性和线性运算, 计算量很大. 本文采用三阶显隐式 Runge-Kutta 方法<sup>[10,7]</sup>, 该方法的优点在于非刚性部分用显式 Runge-Kutta 方法计算, 而刚性部分可用对角隐式 Runge-Kutta 方法来计算.

## 2 数值算例

下列算例中, 将本文给出的三阶松弛格式记为 RW3, 文[7]中给出的三阶松弛格式记为 RCW3, 松弛常数  $\tau$  均取为  $10^{-7}$ , CFL 都取 0.75.

算例 3. 一维 Euler 方程  $\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} m \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{bmatrix} =$

$0, p = (\gamma - 1)(E - \frac{\rho}{2}u^2)$ . 其中  $\rho, u, m (= \rho u), p, E$  分别表示密度、速度、动量、压强和总能量,  $\gamma = 1.4$ . 计算区域为  $x \in [0, 1]$ , 考虑下列初值问题:

1) Sod 的 Riemann 问题, 初值条件为

$$\begin{cases} (\rho_l, m_l, E_l) = (1, 0, 2.5) & x < 0.5 \\ (\rho_r, m_r, E_r) = (0.125, 0, 0.25) & x \geq 0.5 \end{cases}$$

图 1, 图 2 和图 3 分别给出了用 RW3 格式和 RCW3 格式计算得到的密度, 速度和压力的数值解, 图中实线表示精确解, 加号点表示数值解. 网格数为 200, 计算到  $\tau = 0.1644$ . 计算时取  $a_1 = 1, a_2 = 1.68, a_3 = 5.045$ .

3) Blast 问题<sup>[11]</sup>, 其初值为

$$\begin{cases} (\rho_l, m_l, E_l) = (1, 0, 2500) & 0 \leq x < 0.1 \\ (\rho_c, m_c, E_c) = (0, 0, 0.025) & 0.1 \leq x < 0.9 \\ (\rho_r, m_r, E_r) = (1, 0, 250.0) & 0.9 \leq x < 1 \end{cases}$$

采用 400 个网格点, 图 4, 图 5 和图 6 给出计算到  $t = 0.01$  时两种三阶松弛格式的计算结果. 图 7, 图 8 和图 9 给出了进一步的比较, 计算时间  $t = 0.03$  为. 最后, 给出了  $t = 0.038$  时刻的计算结果, 如图 10, 图 11 和图 12 所示. 计算时取  $a_1 = 32.56, a_2 = 169, a_3 = 411.8397$ .

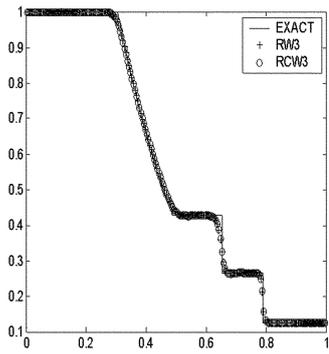


图 1 Sod 问题密度图

Fig. 1 Sod problem-density

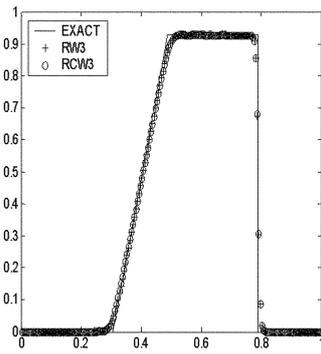


图 2 Sod 问题速度图

Fig. 2 Sod problem-velocity

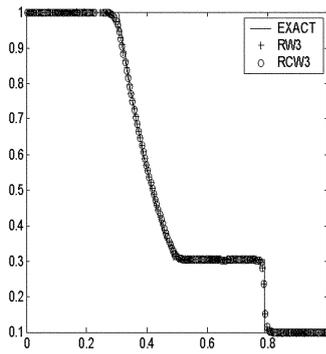


图 3 Sod 问题压力图

Fig. 3 Sod problem-pressure

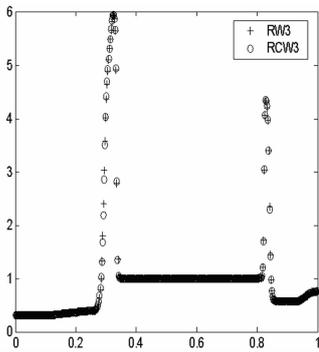


图 4 Blast 问题  $t=0.01$  密度图

Fig. 4 Blast problem at  $t=0.01$ -density

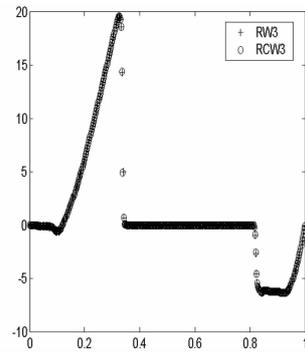


图 5 Blast 问题  $t=0.01$  速度图

Fig. 5 Blast problem at  $t=0.01$ -velocity

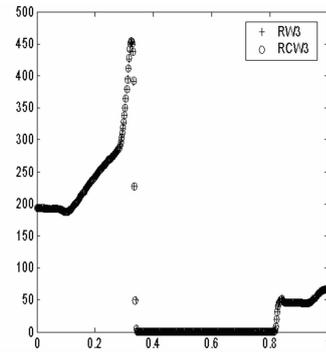


图 6 Blast 问题  $t=0.01$  压力图

Fig. 6 Blast problem at  $t=0.01$ -pressure

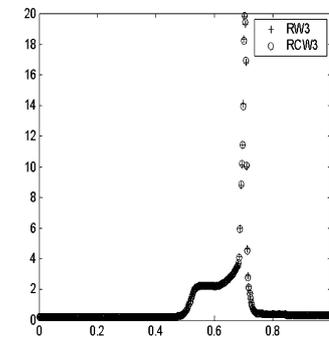


图 7 Blast 问题  $t=0.03$  密度图

Fig. 7 Blast problem at  $t=0.03$ -density

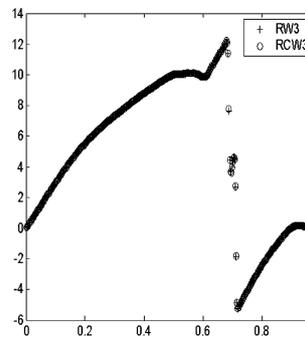


图 8 Blast 问题  $t=0.03$  速度图

Fig. 8 Blast problem at  $t=0.03$ -velocity

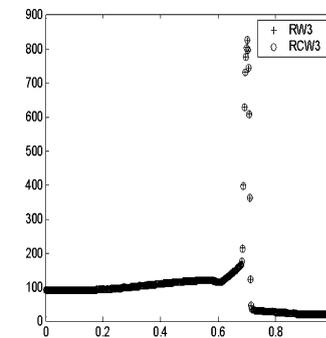


图 9 Blast 问题  $t=0.03$  压力图

Fig. 9 Blast problem at  $t=0.03$ -pressure

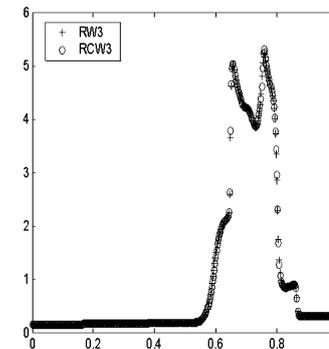


图 10 Blast 问题  $t=0.038$  密度图

Fig. 10 Blast problem at  $t=0.038$ -density

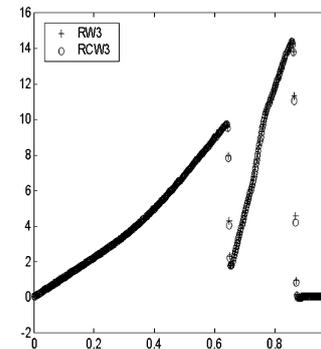


图 11 Blast 问题  $t=0.038$  速度图

Fig. 11 Blast problem at  $t=0.038$ -velocity

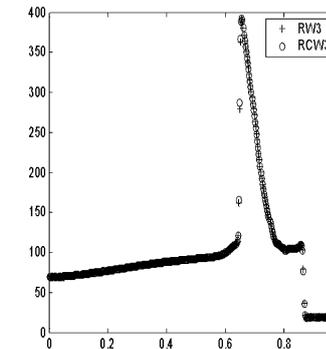


图 12 Blast 问题  $t=0.038$  压力图

Fig. 12 Blast problem at  $t=0.038$ -pressure

### 3 结论

本文给出了一种形式更简单、计算量更小的三阶松弛格式. 比较数值算例的计算结果可知, RW3 格式和 RCW3 格式具有几乎一致的模拟效果, 但 RW3 格式计算量要小得多, 这是因为三阶 WENO 重构是两个一次多项式进行凸组合, 而三阶紧凑中心 WENO 重构是一个二次和两个一次多项式进行凸组合. 再考虑到松弛格式要对变量, 特征变量进行重构, 所以时间的节省在松弛格式中体现得更加明显.

### 参 考 文 献

- 1 Jin S, Xin Z. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1995, 48: 235 ~ 276
- 2 Jin S, Xin Z. Numerical passage from systems of conservation laws to Hamilton-Jacobi equations, and relaxation schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1998, 35(6): 2385 ~ 2404
- 3 Jin S, Pareschi L, Toscani G. Diffusive relaxation schemes for discrete-velocity kinetic equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1999, 35: 2405 ~ 2439
- 4 Delis A I, Katsaounis Th. Relaxation schemes for the shallow water equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 2003, 41: 695 ~ 719
- 5 Delis A I, Katsaounis Th. Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods. *Applied Mathematical Modelling*, 2005, 29: 754 ~ 783
- 6 Bao W Z, Jin S. The random projection method for hyperbolic conservation laws with stiff reaction terms. *Journal of Computational Physics*, 2000, 163: 216 ~ 248
- 7 Seaid M. Non-oscillatory relaxation methods for the shallow water equations in one and two space dimensions. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 2004, 46(5): 1 ~ 28
- 8 Levy D, Puppo G, Russo G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws. *SIAM Journal Scientific Computing*, 2000, 22: 656 ~ 672
- 9 Jiang G S, Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126: 202 ~ 228
- 10 L. Pareschi, G. Russo, Implicit - explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation. *J. Scientific Computing*, 2005, 25: 129 ~ 155
- 11 Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54: 115 ~ 173
- 12 胡彦梅, 陈建忠, 封建湖. 一种基于 WENO 重构的半离散中心迎风格式. *动力学与控制学报*, 2005, 3(2): 54 ~ 60 (Hu YM, Chen JZ, Feng JH. A semi-discrete central-upwind scheme based on WENO reconstruction. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 54 ~ 60 (in Chinese))

## A THIRD-ORDER RELAXATION SCHEME FOR HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS

Chen Jianzhong Shi Zhongke

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** A new third-order relaxation scheme for hyperbolic conservation laws was presented, which combined third-order WENO reconstruction for spatial discretization with third-order implicit-explicit Runge-Kutta method for time discretization. The new scheme is much simpler and less computationally expensive than the original one. The resulting scheme does not require Riemann solvers and the computation of Jacobians, so it remains the advantages of relaxation schemes. The new scheme was tested on several numerical examples, and the results showed it had high resolution.

**Key words** hyperbolic conservation laws, relaxation scheme, WENO reconstruction, implicit-explicit Runge-Kutta method