第5卷第3期2007年9月
1672-6553/2007/05(3)/282-3

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.5 No.3
Spe. 2007

# 奇异摄动磁悬浮系统的串级PID控制稳定性研究

施晓红　卢晓慧　佘龙华

(国防科技大学机电工程与自动化学院磁悬浮中心,长沙　410073)

**摘要**　研究采用串级PID控制的奇异摄动磁悬浮系统参数稳定范围. 首先给出磁悬浮系统的串级PID控制算法与模型,讨论了系统稳定应该遵循的两个条件:一个是慢变子系统PID控制的渐近稳定条件,另一个是快变子系统电流环稳定条件,从而推导出基于串级PID控制的磁悬浮系统所应遵循的参数稳定范围和摄动参数稳定上界. 结论说明由于电流环稳定条件与PID稳定条件存在较强耦合,对系统固有参数要求较为严格,导致实际系统调试难度较大.

**关键词**　磁悬浮,　串级PID,　渐近稳定,　电流环,　奇异摄动

## 引言

磁悬浮系统是一个机械、电磁和控制耦合的复杂系统,关于其稳定性的研究长期受到人们的瞩目. 目前有很多控制算法都尝试应用于磁悬浮控制,也能够满足系统的稳定性要求[1,2,3],但是从实际效果来看,采用电流环加PID控制方案的串级PID方法是最简单有效的方法. 为什么诸多先进控制算法不能达到预期效果,这一问题始终没有定论. 笔者认为,由于磁悬浮中悬浮电磁铁线圈电感带来的系统奇异特性,造成控制电流滞后,因此影响了系统的稳定性. 电流滞后问题始终是系统稳定与否最关键的环节,解决这个问题较好的方法是电流环反馈控制,但是目前对电流环的研究一直不够深入. 本文利用奇异摄动理论将系统划分为快、慢子系统,分别研究慢子系统的PID控制渐近稳定性以及快子系统的电流环稳定条件,从而推导出比较符合实际的磁悬浮系统控制参数稳定范围.

## 1　串级PID控制模型

磁悬浮系统遵循的动力学方程在下式(1)~(3)中给出[3,4],其中$m$表示悬浮对象的质量,$z$表示悬浮间隙,$N$表示悬浮电磁铁线圈匝数,$A$表示电磁铁有效极面积,$I$表示悬浮电流,$U$表示悬浮电压,$R$和$L$分别表示悬浮电磁铁线圈的电阻和电感:

$$m\ddot{z}=-\frac{\mu_0 N^2 A I^2}{4z^2}+mg \tag{1}$$

$$U_a=rI+\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t}=rI+2k\frac{\mathrm{d}(I/z)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

采用PID控制律对悬浮系统输出的电压进行调节:

$$U_c=k_p(z-z_0)+k_d\dot{z}+k_i\int(z-z_0)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

这里要说明的是,为了保证系统稳定悬浮,控制器必须对系统的电流滞后进行补偿,其中电流环是比较常用的补偿手段[4],其具体形式如下:

$$U_a=k_{c1}(U_c-k_{c2}I) \tag{4}$$

根据以上动力学方程就可以建立悬浮系统的状态方程. 取状态变量

$$y=[z\quad \dot{z}\quad I/z\quad (I/\dot{z})]$$

由(1)~(4)得:

$$\dot{y}_1=y_2,\quad \dot{y}_2=g-\frac{ky_3^2}{m},\quad \dot{y}_3=y_4,$$

$$\dot{y}_4=\frac{k_{c1}}{2k}\Big[k_py_2+k_d\Big(g-\frac{ky_3^2}{m}\Big)+k_i(y_1-z_0)-\Big(\frac{r}{k_{c1}}+k_{c2}\Big)(y_1y_4+y_2y_3)\Big] \tag{5}$$

作坐标变换:

$$x=[y_1-z_0\quad y_2\quad y_3-\sqrt{mg/k}\quad y_4]$$

将平衡点移动到原点:

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_3^2-\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3,\quad \dot{x}_3=x_4,$$

$$\dot{x}_4=\frac{k_{c1}}{2k}\Big[k_px_2-k_d\Big(\frac{k}{m}x_3^2+\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3\Big)+k_ix_1-\Big(\frac{r}{k_{c1}}+k_{c2}\Big)(x_1+z_0)x_4-\Big(\frac{r}{k_{c1}}+k_{c2}\Big)\Big(x_3+\sqrt{\frac{mg}{k}}\Big)x_2\Big] \tag{6}$$

2007-01-08收到第1稿,2007-03-30收到修改稿.

式(6)就是基于 PID 控制方法的悬浮系统微分方程描述.

## 2 慢子系统稳定性分析

由于参数 $k<<1$($10^{-3}$量级),因此(6)给出的系统是一个典型的奇异摄动系统,摄动参数 $\varepsilon=2k/k_{c1}$. 记等效电阻 $R=r/k_{c1}+k_{c2}$,假设 $\varepsilon=0$,则根据(6)可知奇异摄动磁悬浮系统的边界层(快变子系统)为:

$$0=k_p x_2-k_d\left(\frac{k}{m}x_3^2+\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3\right)+k_i x_1-R(x_1+z_0)x_4-R\left(x_3+\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)x_2 \tag{7}$$

由此得到(6)的慢子系统(降阶系统):

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_3^2+\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3,$$
$$\dot{x}_3=-\left(x_3+\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)x_2+\frac{1}{R(x_1+z_0)}\left[k_p x_2-k_d\left(\frac{k}{m}x_3^2+\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3\right)+k_i x_1\right] \tag{8}$$

式(8)的线性化系统如式(9)所示.

$$\dot{x}=Ax=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\\ \frac{k_i}{Rz_0} & \frac{k_p}{Rz_0}-\sqrt{\frac{mg}{k}} & \frac{-2k_d}{Rz_0}\sqrt{\frac{kg}{m}}\end{bmatrix} \tag{9}$$

根据现代控制理论可知,当矩阵 $A$ 所有特征值具有负实部时,式(9)给出的系统全局渐近稳定. 根据 Hurwitz 判据可知,当控制参数满足以下条件时,$A$ 的特征值实部均小于零:

$$k_p>Rz_0\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{k_i}{2gk_d}+1\right)\quad k_i>0,k_d>0 \tag{10}$$

由此可知,在原点附近要保证慢子系统渐近稳定,PID 参数应满足式(10)给出的条件. 下面对系统的快变部分——电流环稳定条件进行分析.

## 3 电流环稳定性分析

由于 PID 控制中积分器的作用,非线性磁悬浮系统始终可以保证与其线性化特征系统具有相同的拓扑结果,因此同样可以根据其线性化系统分析快变子系统的稳定性. 子系统(7)的线性化矩阵如下:

$$\varepsilon\dot{x}_4=A_{21}[x_1\ x_2\ x_3]^T-A_{22}x_4=A_{21}[x_1\ x_2\ x_3]^T-Rz_0x_4 \tag{11}$$

显然 $A_{22}$ 符合 Hurwitz 条件,因此快系统稳定[7]. 根据奇异摄动理论可知,要使(6)保持渐进稳定,除了要保证快变子系统自身的稳定性以外,摄动参数 $\varepsilon$ 还存在着一个稳定上界 $\varepsilon^*$,当 $\varepsilon>\varepsilon^*$ 时,无论控制参数怎样选取,系统都不再稳定[5,6]. 由于系统(6)中 $\varepsilon$ 是由电流环的反馈参数 $k_{c1}$ 的取值决定的,因此 $k_{c1}$ 的大小将直接影响系统的稳定性. 下面通过计算 $\varepsilon^*$ 说明参数 $k_{c1}$ 应该如何取值.

摄动参数的稳定上界. 系统(6)的特征矩阵为:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ k_i & k_p-R\sqrt{\frac{mg}{k}} & -\frac{2k}{m}k_d\sqrt{\frac{mg}{k}} & -Rz_0\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}A_{11} & \vdots & A_{12}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{21} & \vdots & A_{22}\end{bmatrix} \tag{12}$$

其中 $A_{11}\in R^{3\times3}$,$A_{12}\in R^{3\times3}$,$A_{21}\in R^1$,$A_{22}\in R^1$. 根据参考文献[5],如果记:

$$M=\begin{bmatrix}A_{11} & \vdots & A_{12}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ O & \vdots & O\end{bmatrix}\otimes I+I\otimes\begin{bmatrix}A_{11} & \vdots & A_{12}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ O & \vdots & O\end{bmatrix}$$
$$N=\begin{bmatrix}O & \vdots & O\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{21} & \vdots & A_{22}\end{bmatrix}\otimes I+I\otimes\begin{bmatrix}O & \vdots & O\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{21} & \vdots & A_{22}\end{bmatrix} \tag{13}$$

则 $\varepsilon^*$ 就是矩阵($N$,-$M$)最小的正实部广义特征值. 根据(9)计算可知:

$$\varepsilon=\frac{Rz_0\left[2k_d\sqrt{mg/k}\left(k_p-R\sqrt{mg/k}\right)-k_iRz_0\sqrt{m/kg}\right]}{2\left(k_p-R\sqrt{mg/k}\right)^2} \tag{14}$$

由 $\varepsilon=2k/k_{c1}$ 可知电流环反馈参数必须满足以下稳定条件:

$$k_{c1}>\frac{4k\left(k_p-R\sqrt{mg/k}\right)^2}{Rz_0\left[2k_d\sqrt{mg/k}\left(k_p-R\sqrt{mg/k}\right)-k_iRz_0\sqrt{m/kg}\right]} \tag{15}$$

这里要注意的是,虽然从理论上来看,参数 $k_{c1}$ 越大电流跟踪速度越快,电流环的性能就越好,但是由于 $U_a=k_{c1}(U_c-k_{c2}I)$,$U_a$ 不可能无限增大,因此 $k_{c1}$ 也不能够无限增大,也就是说,电流环的补偿能力是有限的. 假设 $U_a<U_a^*$,间隙和速度传感器的量程分别为 $5V$、$10V$,积分饱和上限是 100,那么($U_c$-$k_{c2}I$)最大取值是 $5k_p+10k_d+100k_i$,于是由(4)和(15)可知:

$$\frac{4k\left(k_p-R\sqrt{mg/k}\right)^2}{Rz_0\left[2k_d\sqrt{mg/k}\left(k_p-R\sqrt{mg/k}\right)-k_iRz_0\sqrt{m/kg}\right]}<k_{c1}<\frac{U_a^*}{5k_p+10k_d+100k_i} \tag{16}$$

式(16)就是磁悬浮系统电流环摄动稳定的条件,该条件与式(10)共同构成了磁悬浮系统串级 PID 控制的稳定条件.

## 4 总结

从以上的分析可以看出,采用串级 PID 控制的磁悬浮系统稳定与否取决于两个条件:一个是 PID 控制渐近稳定条件,另一个是电流环摄动稳定条件. 只有同时满足 PID 渐近稳定条件(8)以及电流环摄动稳定条件(13)的控制器才能够保证系统稳定悬浮. 本文的分析结论表明,两个条件耦合程度较强,在某些情况下(例如传感器量程选择不合适)甚至不存在同时满足条件(8)和(13)的电流环参数 $k_{c1}$ 与 PID 参数 $k_p$、$k_d$ 和 $k_i$. 由此可见,磁悬浮系统的稳定与否与传感器、电流环的性质以及控制器积分饱和程度密切相关,因此实际当中比较难于调试.

## 参 考 文 献


1 Kent Davey. New electromagnetic lift control method for magnetic levitation system and magnetic bearings. *IEEE Transactions on Magnetic*, 2004, 40(3): 1617 ~ 1624

2 龙志强,洪华杰,周晓兵. 磁浮列车的非线性控制问题研究. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 399 ~ 402 (Long Zhiqiang, Hong Huajie, Zhou Xiaobing. Application research of feedback linearization techniques for maglev train. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 399 ~ 402( in Chinese))

3 施晓红,佘龙华,常文森. 非线性磁悬浮控制系统的周期运动稳定性研究. 动力学与控制学报, 2005, 3: 52 ~ 55 (Shi Xiaohong, She Longhua. The period motion stability analysis of the nonlinear maglev control system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3: 52 ~ 55(in Chinese))

4 Zhou Xiaobing, Fei Minrui, Li Yungang. Fuzzy sliding mode control of single electromagnet of maglev vehicle. Proceedings of the 5th world congress on intelligent control and automation, 2004: 1171 ~ 1174

5 李云钢,常文森. 磁浮列车悬浮系统的串级控制. 自动化学报, 1999, 25(2): 247 ~ 250(Li Yungang, Chang Wensen. Cascade control of an EMS maglev vehicle's levitation control system. *ACTA Automatic Sinica*, 1999, 25(2): 247 ~ 251 (in Chinese))

6 S. J. Chen, J. L. Lin. Maximal stability bounds of singularly perturbed systems. *Journal of the Franklin Institute*, 1999, 336: 1209 ~ 1218

7 Liyu Cao, Howard M. Complementary Results on the Stability Bounds of Singularly Perturbed Systems. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(11): 2017 ~ 2021

8 S. Sen, K B Datta. Stability Bounds of Singularity Perturbed Systems. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 302 ~ 304


# STABILITY RESEARCH ON SINGULARLY PERTURBED MAGLEV SYSTEM WITH CASCADE PID CONTROL


Shi Xiaohong　Lu Xiaohui　She Longhua

(*Research Center of Maglev, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)



**Abstract** The stable range of singularly perturbed maglev system parameter was studied based on cascade PID controller. Firstly, the arithmetic and model of cascade PID control maglev system were given. Then two conditions were analyzed to ensure the stability of the system: one is the asymptotically stable condition of slow PID controller subsystem; the other is the singularly perturbed stability condition of fast current loop subsystem. So the range of the stable control parameter and the upper bound of the perturbed parameter were summarized. The conclusion shows that the requirement of inherent system parameters is strict because of the strong coupling of the current loop and PID controller. This is why it is difficult to ensure the stability of the actuarial maglev system.



**Key words** magnetic levitation, cascade PID, asymptotically stable, current loop, singularly perturbed

Received 8 January 2007, revised 30 March 2007.