

# 基于杆弹性撞击问题的级数和\*

鲍四元<sup>1</sup> 邓子辰<sup>1,2</sup>

(1. 西北工业大学工程力学系, 西安 710072) (2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

**摘要** 本文引入如下力学问题: 等截面杆受到具有一定初速度的质点的撞击引起杆的纵向振动. 根据已有文献中由 DMSM 方法得到的响应解, 把它代回初始无量纲速度为 1 的已知条件, 得到满足约束方程的变量的级数和, 结论以数学形式表达. 附录给出用符号软件验证所得结论的程序, 其步骤是先求出特征根, 再代入级数和表达式进行验证.

**关键词** 级数和, 撞击, 杆

## 引言

撞击问题在实际问题中具有广泛的应用. 如航空器在空中运行时要考虑到受到外来物的各种撞击, 又比如设计汽车的保险杠需要用到撞击知识. 撞击问题的 DMSM 解法<sup>[1,2]</sup>是我国学者近十年来提出的一种有效的解析方法, 其主要思想是把撞击问题简化为弹性撞击问题, 把靶体和撞击物作为一个整体振动体系研究, 并把撞击物的初速度条件作为初始条件. 反映撞击作用的最终响应结果通过直接模态叠加法 (DMSM 解法) 所得级数和形式表示<sup>[7-10]</sup>. 本文正是根据这类响应结果得到的一些有益结论.

级数的和在力学理论中已经有若干应用, 如常用的叠加级数解和 Fourier 级数解. 叠加级数法可用于解决对边界不同时的薄板静力弯曲问题<sup>[3]</sup>. Fourier 级数解主要用于解决结构力学问题<sup>[4]</sup>. 另外, 根据力学计算的需要, 文献<sup>[5]</sup>讨论并给出立方和四次方的加权 Fourier 级数与代数幂次项的 Fourier 级数的解析表达式, 使 Fourier 级数的应用进入非线性领域及极坐标领域.

在高等数学中, 级数和求解的经典方法是根据傅立叶展开或幂级数收敛性. 但其他的方法相对很少. 本文给出一种新的思路, 即从直接模态叠加法求解的角度, 对于撞击问题给出满足约束方程的变量的级数和结论.

## 1 由梁弯曲振动得到一个相关结论

考虑如下问题: 长度为  $l$  的均匀简支梁在  $t=0$  时除两个端点外, 其它各点均获得横向速度  $V_0$ , 求梁的响应. 此问题的数学模型是:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$y(x, 0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = V_0 \quad (0 < x < l) \quad (2)$$

由模态叠加法知, 方程的解为<sup>[6]</sup>

$$y = \frac{4v}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{ip_i} \sin(\frac{i\pi}{l}x) \cos(p_i t) \quad (3)$$

其中

$$p_i = (\frac{i\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

把式(3)代入初始的速度条件得到

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \sin(\frac{i\pi}{l}) = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < l) \quad (4)$$

这个结论在数学理论中可由傅立叶展开得到验证. 本文希望能够从力学角度来考虑这个问题, 从而得到一些结论. 在下面几部分, 首先考虑等截面杆, 然后考虑锥形截面杆, 针对不同边界条件下的质点-杆撞击问题, 得到含满足约束方程变量的无穷级数和.

## 2 由等截面杆的撞击问题得到的结论

一长度为  $l$  的等截面杆受到速度为  $V_0$  的质点的撞击<sup>[1]</sup>, 这里只考虑杆的纵向振动引起的撞击.

2006-11-01 收到第 1 稿, 2006-12-08 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(10572119)、教育部新世纪人才培养计划(NCET-04-0958)及大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目

采用无量纲坐标  $\xi = x/L$ ,  $\tau = tc/L$ , 这里波速  $c = \sqrt{E/\rho}$ , 无量纲位移  $u = c U/(V_0 L)$ , 其中  $U$  为杆的轴向位移, 问题的数学模型是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (5)$$

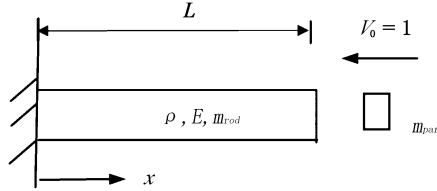


图1 质点和杆的纵向碰撞

Fig. 1 Longitudinal impact of a mass on a uniform rod

当杆左端  $\xi = 0$  处分别固定和自由时, 相应的边界条件分别为

$$u(0, \tau) = 0$$

$$\alpha \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 u(1, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (\text{当 } \xi = 0 \text{ 固定时}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = 0$$

$$\alpha \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 u(1, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (\text{当 } \xi = 0 \text{ 自由时}) \quad (7)$$

初始条件为

$$\frac{\partial u(1, 0)}{\partial \tau} = 1 \quad (8)$$

当边界条件为式(6)时, 问题的解为

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i \beta_i} \sin(\lambda_i \tau) \sin(\lambda_i \xi) \quad (9)$$

其中  $\lambda_i$  是特征方程  $\lambda \tan \lambda = \alpha$  的各阶解, 且  $\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \sin^2 \lambda_i)$ .

当边界条件为式(7)时, 问题的解为

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_i}{\lambda_i \beta_i} \sin(\lambda_i \tau) \cos(\lambda_i \xi) + \frac{\tau}{1 + \alpha} \quad (10)$$

其中  $\lambda_i$  由特征方程  $\lambda \cot \lambda = \alpha$  决定, 且  $\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \cos^2 \lambda_i)$ .

把式(10)代入式(8), 可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda_i}{\beta_i} = 1 \quad (11)$$

其中

$$\lambda_i \tan \lambda_i = \alpha$$

而

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \sin^2 \lambda_i).$$

同理, 把式(10)代入式(8), 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \lambda_i}{\beta_i} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (12)$$

其中

$$\lambda_i \cot \lambda_i = \alpha$$

而

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \cos^2 \lambda_i).$$

上述级数和的公式可使用 Mathematica 通过选取若干项和的方法验证. 其中式(11)在附录 A 中验证, 使用了 FindRoot 和 Sum 命令. 当级数截取项数  $nm = 16$  时, 其和是 0.935017. 当  $nm = 10000$  时, 其和是 0.999899, 接近于右端值.

### 3 由其它三个复杂问题得到的结论

#### 3.1 杆-质点-弹簧系统

文献[6]中, 撞击问题与第1部分相同, 除杆端  $\xi = 0$  处的边界条件不同. 因此数学模型与第3部分的相同, 即为式(5), 但边界条件应改为

$$u(0, \tau) = k \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi}$$

$$\alpha \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 u(1, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (13)$$

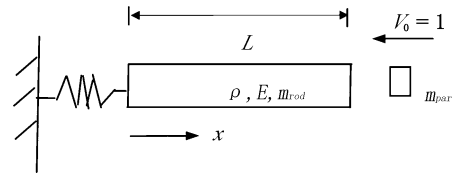


图2 质点-杆-弹簧系统

Fig. 2 particle-rod-spring system

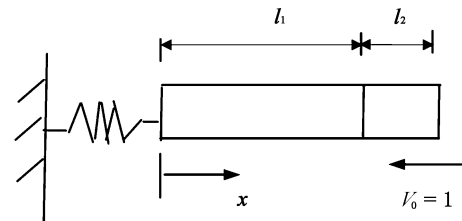


图3 杆-杆-弹簧系统

Fig. 3 rod-rod-spring system

相应的 DMSM 解为

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha \sin \lambda_i \tau}{\lambda_i M_i} \phi_i(\xi) \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_i(\xi) &= \alpha \cos \lambda_i (1 - \xi) + \lambda_i \sin \lambda_i (\xi - 1) \\ M_i &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \alpha (1 - \cos 2\lambda_i) + \alpha^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\lambda_i}{2\lambda_i} \right) + \lambda_i^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\lambda_i}{2\lambda_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

而  $\lambda_i$  由如下特征方程决定

$$k\lambda (\alpha \sin \lambda + \lambda \cos \lambda) = \alpha \cos \lambda - \lambda \sin \lambda \quad (16)$$

把式(14)代入到初始条件(8),得到关于级数和的又一个结论

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{M_i} = 1 \quad (17)$$

### 3.2 由杆-杆-弹簧撞击系统得到的类似公式

杆-杆-弹簧撞击系统<sup>[2]</sup>指长度为  $l_1$  的等截面杆受到速度为  $V_0$  的长度为  $l_2$  的等截面共轴杆的撞击. 其中杆端  $x=0$  与弹簧相连,  $x=l_1$  端自由. 此问题的数学模型为式(5),但边界条件应改为

$$u(0, \tau) = k \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (18)$$

相应的解为

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i \tau}{\lambda_i^2 M_i} \sin \frac{\alpha \lambda_i}{1 + \alpha} \quad (19)$$

其中

$$\phi_i(\xi) = \cos \lambda_i (1 - \xi), M_i = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\lambda_i}{2\lambda_i} \right)$$

$\lambda_i$  由如下特征方程决定

$$k\lambda \sin \lambda = \cos \lambda \quad (20)$$

初始条件式(8)可转变为如下形式

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \tau} = 1 \quad \left( \frac{1}{1 + \alpha} \leq \xi \leq 1 \right) \quad (21)$$

把式(18)代入到初始条件(21),得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(\xi)}{\lambda_i M_i} \sin \frac{\alpha \lambda_i}{1 + \alpha} = 1 \quad \left( \frac{1}{1 + \alpha} \leq \xi \leq 1 \right) \quad (22)$$

### 3.3 由圆锥形杆-质点撞击系统得到的复杂公式

如果一个质点撞击一个圆锥形杆,则控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (A(\xi) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}) = A(\xi) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (23)$$

其中

$$A(\xi) = (aL\xi + b)^2$$

数学模型的控制方程式(23),与第二部分类似,只是控制方程中的截面积  $A$  不是常数,为关于  $\xi$  的函数.

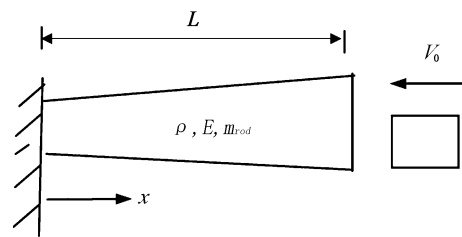


图4 质点和圆锥形杆的纵向碰撞

Fig. 4 Longitudinal impact of a mass on a conical rod

当  $x=0$  固定时,问题的边界条件变为

$$u(0, \tau) = 0, \alpha \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = - \frac{\partial^2 u(1, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (24)$$

相应问题的 DMSM 解<sup>[7]</sup>为

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i \sin \lambda_i \xi}{(1+s)\lambda_i M_i (\xi+s)} \sin \lambda_i \tau \quad (25)$$

其中

$$M_i = (1+s)^2 \left[ \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\lambda_i}{2\lambda_i} \right) + \sin^2 \lambda_i \right]$$

而

$$s = \frac{b}{aL}$$

$\lambda_i$  由如下特征方程决定

$$\left[ \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{\lambda(1+s)} \right] \tan \lambda = 1 \quad (26)$$

把式(25)代人初始条件式(8),得到结论

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda_i}{(1+s)M_i} = 1 \quad (27)$$

当  $x=0$  自由时边界条件应改为

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \alpha \frac{\partial u(1, \tau)}{\partial \xi} = - \frac{\partial u^2(1, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (28)$$

其解为

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sin \lambda_i + s\lambda_i \cos \lambda_i)(\sin \lambda_i \xi + s\lambda_i \cos \lambda_i \xi)}{(1+s)(s+\xi)\lambda_i M_i} \times \sin \lambda_i \tau + \frac{\tau}{1+\alpha} \quad (29)$$

其中

$$R_1 = \frac{1}{s+1} \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2} q^2 \lambda_i + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$R_2 = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} \alpha_0 - \frac{s^2}{(s+1)^2} \lambda_i^2 \quad (30)$$

$$R_3 = \frac{1}{4} \alpha_0 \frac{s^2}{(s+1)^2} \lambda_i^2 - \frac{1}{4} \alpha_0 \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} \lambda_i^2$$

特征值  $\lambda_i$  由如下特征方程决定

$$\lambda \cot \lambda = \frac{\alpha_0 s (1+s) \lambda^2 + \lambda^2 (1+s) + \alpha_0}{-s(1+s) \lambda^2 + \alpha_0} \quad (31)$$

把式(29)代入到初始条件(8),得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sin\lambda_i + s\lambda_i \cos\lambda_i)^2}{(1+s)^2 M_i} = \frac{(1+3s+3s^2)\alpha_0}{(1+3s+3s^2)\alpha_0 + (1+s)^2} \quad (32)$$

公式(32)可使用 Mathematica 通过选取若干项和的方法验证.

在本部分,式(17)、(22)、(27)和(32)是所得与级数和相关的结论.

#### 4 结论

本文由一个等截面杆的撞击问题及三种较复杂的情况:(1)边界包含弹簧;(2)两根杆撞击;(3)圆锥形截面杆撞击,直接利用 DMSM 方法之结果,根据初速度条件,得到了若干级数和的结论.

给出当变量满足一定约束条件时的级数求和的一种新方法,此方法基于力学问题.对于大多数由模态叠加法得到的力学解,可由类似方法得到级数和,本文介绍了一些特例.

#### 附录 A

验证式(11)的 Mathematica 程序:

```
Date[ ]
(* 输入部分 *)
(* nm 是选取的项数, alpha 是常数 *)
nm = 10^5;
x = Table[0, {i, nm}];
lamda = Table[0, {i, nm}];
alpha = 5;
(* 寻找特征方程介于 ((i - 0.5) Pi - 0.2)
和 ((i + 0.5) Pi - 0.2) 之间的值 *)
Do[
  x[[i]] = FindRoot[y Tan[y] - alpha == 0,
    {y, (i - 0.5) Pi - .2}], {i, nm}];
lamda = y/. x;
(* 输出部分 *)
(* 左端项的值 *)
Print["When the number of the items are taken
as:", nm];
Print[" The value of the sum is: ",
  Sum[ 2 Sin[lamda[[n]]]^2/(alpha + Sin
[lamda[[n]]]^2), {n, 1, nm}]]];
```

(\* 右端项的值 \*)

```
Print[" is close to the value of ", 1];
```

```
Date[ ]
```

运行后的输出结果是

```
{2006, 1, 21, 21, 1, 59}
```

```
When the number of the items are taken as:
10000
```

```
The value of the sum is: 0.999899
```

```
is close to the value of 1
```

```
{2006, 1, 21, 21, 2, 3}
```

#### 参 考 文 献

- 1 诸德超,邢誉峰.点弹性碰撞问题解.力学学报,1996,28(1):99~103(Zhu Dechao and Xing Yufeng. Analytical solution of point elastic impact between structures. *Acta Mechanica Sinica*,1996,28(1):99~103(in Chinese))
- 2 Xing Yufeng, Zhu Dechao. Analytical solutions of impact problems of rod structures with springs. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*,1998,160:315~323
- 3 张福范.弹性薄板.北京:科学出版社,1984,第二版(Zhang Fufan. *Elastic thin plate*. Beijing: Scientific Press,1984,2nd Edition(in Chinese))
- 4 严宗达.结构力学中的傅里叶级数解法.天津:天津大学出版社,1989(Yan Zongda. *Fourier series solutions in structure mechanics*. Tianjing: Tianjing University Press, 1989(in Chinese))
- 5 范家参.由力学计算引出的几种 Fourier 级数计算.昆明理工大学学报,2000,25(5):68~73(Fan Jiachen. Some calculations for Fourier series derived from mechanics. *Journal of Kunming University of Science and Technology*,2000,25(5):68~73(in Chinese))
- 6 方同,薛璞.振动理论.西安:西北工业大学出版社,1998(Fang Tong, Xue Pu. *Theory of vibration with application*. Xi'an:Northwestern Polytechnic University Press,1998(in Chinese))
- 7 Bao Siyuan, Deng Zichen. Analytical solutions for response of collision of particle with conical rod caused by longitudinal vibration. *Applied Mathematics and Mechanics*,2006,27(7):812~818
- 8 S. Wolfram. Mathematica 全书,4th 版.西安:西安交通大学出版社,2002(S. Wolfram. *The Mathematica Book*,4th Edition. Xi'an: Xi'an JiaoTong University Press,2002(in Chinese))

- 9 邓子辰,范小弄,赵玉立. 基于 Karhunen - Loève 展开的柔性梁撞击系统的降阶方法. 动力学与控制学报, 2005, 3(1): 24 - 28 (Deng Zichen, Fan Xiaolong, Zhao Yuli. Reduced - order method for flexible impact system based on Karhunen - Loève expansion. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(1): 24 - 28 (in Chinese))
- 10 鲍四元, 邓子辰. 利用 DMSM 方法求解弹性撞击恢复系数. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 44 - 49 (Bao Siyuan, Deng Zichen. Solution of the coefficient of restitution for elastic impact using DMSM. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 44 - 49 (in Chinese))

## SUM OF SERIES BASED ON ELASTIC IMPACT PROBLEMS OF RODS \*

Bao Siyuan<sup>1</sup> Deng Zichen<sup>1,2</sup>

(1. Department of, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract** This paper introduced the following mechanical problem: a rod was impacted by a particle with a certain velocity. After substituting the solutions, obtained by Direct Mode Shape Superposition Method (DMSM) available in the literatures, into the known condition that the initial non - dimensional velocity was equal to 1, the sum of the series, whose variable satisfied a certain constraining equation, was obtained. The conclusion was expressed in mathematical form. In the appendix, the programs were presented to test the conclusions obtained by using symbol computation software. The first step of the programs was to calculate the eigenvalues, and then substituted the values into the left side of the equations, which verified the correctness of the conclusions.

**Key words** sum of series, impact, rod