

时滞反馈 Liu 系统的动力学行为

王琳 倪樵 黄玉盈

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 研究了具有时滞反馈项作用的 Liu 系统. 文中针对两种典型的时滞反馈情形, 着重分析了时滞参数对系统动力学行为的影响. 研究表明, 当 Liu 系统存有时滞反馈时, 其动力学行为将变得异常丰富; 时滞参数的改变可引起系统复杂的动力学演化. 此外, 数值计算还发现了时滞 Liu 系统的虫洞吸引子.

关键词 时滞反馈, Liu 系统, 混沌, 吸引子

引言

自上个世纪 60 年代以来, 人们对非线性系统的分岔与混沌动力学作了大量的研究, 并陆续发现一些重要的现象和机理. 多种类型的三维混沌系统受到国内外学者的广泛关注. Smale^[1] 在他的一篇文章中曾指出, 二十一世纪将有 18 类极具挑战性的数学问题, 其中的 14 类问题与 Lorenz 吸引子相关, 故对 Lorenz 系统和类 Lorenz 系统的研究工作具有良好的应用前景和深远的学术意义. 近二十年来, 国内外学者发现了一系列类 Lorenz 系统. 针对这些非线性系统, 主要研究了其分岔与混沌现象、混沌吸引子的拓扑结构、混沌同步和混沌控制等^[2-8]. 最近, Liu 等人^[9] 提出一种新的类 Lorenz 系统——Liu 系统, 该系统具有三维二次型的自治常微分方程组形式.

本文针对 Liu 系统, 试图分析时滞反馈对该系统动力学行为的影响. 由于时滞的引入, Liu 系统的微分方程将改写成含有时滞项的形式. 本文将通过数值方法研究这一时滞反馈系统, 并展示时滞 Liu 系统的复杂动力学行为.

1 含时滞反馈的 Liu 系统

Liu 混沌系统由以下三维常微分方程组描述^[9]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - kxz \\ \dot{z} = -cz + hx^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, a, b, c, k, h 均为系统参数. 已有的研究表明, 当参数 $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1, h = 4$ 时, Liu 系

统将处于混沌状态, 其混沌吸引子如图 1 所示.

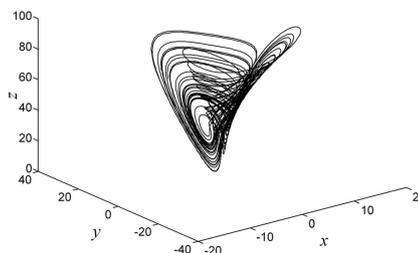


图 1 Liu 混沌系统

Fig. 1 Liu chaotic attractor

本文采用线性 DFC 来研究时滞反馈对 Liu 系统的影响, 此方法源于 Pyragas 的理论. 为此, 引入一个线性的负反馈 $F(t)$ 表示如下:

$$F(t) = -K[u(t - \tau) - u(t)] \quad (2)$$

其中, $\tau > 0$ 为时滞; $K = [K_1, K_2, K_3]^T > 0$ 是可调节的反馈增益向量; $u(t)$ 为包含 $[x, y, z]^T$ 的控制向量. 若将时滞反馈 $F(t)$ 添加到 Liu 系统的方程右端, 就得到一个新的时滞反馈系统. 其方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} = \begin{cases} a(y - x) \\ bx - kxz \\ -cz + hx^2 \end{cases} - K[u(t - \tau) - u(t)], t \geq t_0 \quad (3)$$

其中, t_0 为初始时间. 上式的时滞系统可由一个初始参量 $\phi(t)$ 定解, $\phi(t)$ 满足的关系为

$$u(t) = \phi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \quad (4)$$

若取

$$u(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad (5)$$

则有

$$u(t-\tau) = \begin{cases} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \\ z(t-\tau) \end{cases} \quad (6)$$

故式(3)也可写成如下的形式

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) - K_1(x(t-\tau) - x(t)) \\ \dot{y} = bx - kxz - K_2(y(t-\tau) - y(t)) \\ \dot{z} = -cz + hx^2 - K_3(z(t-\tau) - z(t)) \end{cases} \quad (7)$$

2 数值分析

为了展示时滞反馈项对 Liu 系统动力学行为的影响,本文采用四阶龙格-库塔法对方程(7)进行数值计算,并固定积分步长为 0.0025. 数值仿真时,系统(7)的所有参数都是固定的: $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1$ 和 $h = 4$, 但时滞 τ 和反馈增益 K 可根据需要发生改变. 此外,系统初始值取为

$$\begin{cases} \phi(t) = 0, & -\tau < t < 0; \\ \phi(t) = [2.2, 2.4, 2.0], & t = 0 \end{cases} \quad (8)$$

下面将重点讨论两种典型的时滞反馈情形:

(i) 仅在 y 轴方向上添加时滞反馈; (ii) 在 xyz 三轴方向上同时添加时滞反馈.

2.1 仅在 y 轴方向上添加时滞反馈

取 $K = [0, K_2, 0]$, 即仅在 y 轴方向上添加时滞反馈. 此时,方程(7)可写成

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = bx - kxz - K_2(y(t-\tau) - y(t)) \\ \dot{z} = -cz + hx^2 \end{cases} \quad (9)$$

本文主要分析时滞参数 τ 对 Liu 系统的影响. 不失一般性,取 $K_2 = 5$. 图 2 给出了以 τ 为控制参数的分岔图. 从该图可以看出,当 τ 在 $[0, 0.6]$ 这一区间变化时,系统的动力学行为发生了多次分岔. 当 $0 < \tau < 0.0558$ 时,其分岔图上显示为无数杂乱的点,这对应于系统的混沌运动. 然而,在 $\tau \approx 0.0558$ 处系统的动力学行为却发生了改变,即由混沌突然变为周期 1 运动;不仅如此,其幅值也出现了明显的突变(跳跃). 事实上,这种幅值突变(跳跃)的现象在其它的某些 τ 值处也有出现. 当 τ 增至 $\tau \approx 0.345$ 时,系统进入了概周期运动状态,其典型的相轨线如图 3(c) 所示. 不仅如此,随着 τ 的增大,这一概周期运动将逐渐演化为混沌状态(图 3(d)). 分岔图还显示此混沌参数区域内含有周期运动的窗口. 例如,当 $\tau = 0.385$ 时,

系统处于典型的周期 1 运动. 若继续增大 τ 的取值,系统将由混沌运动重新回到周期 1 状态. 当 $\tau = 0.53$ 时,系统出现了复杂的多周期形态(图 3(e)). 值得指出的是,若进一步增大 τ 的取值,系统出现了一种新的奇怪吸引子. 这一奇怪吸引子还可以通过相轨线图来展示,其典型结果如图 3(f) 所示. 从相轨线可以看到,这一奇怪吸引子与“虫洞”的形状非常相似. 若分析它的功率谱图(图 4(d)),可以观察到它的概周期特征.

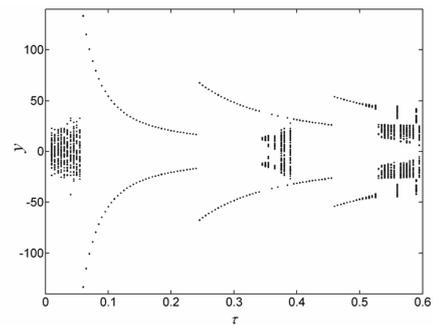


图 2 以 τ 为控制参数的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram with the variable parameter of τ

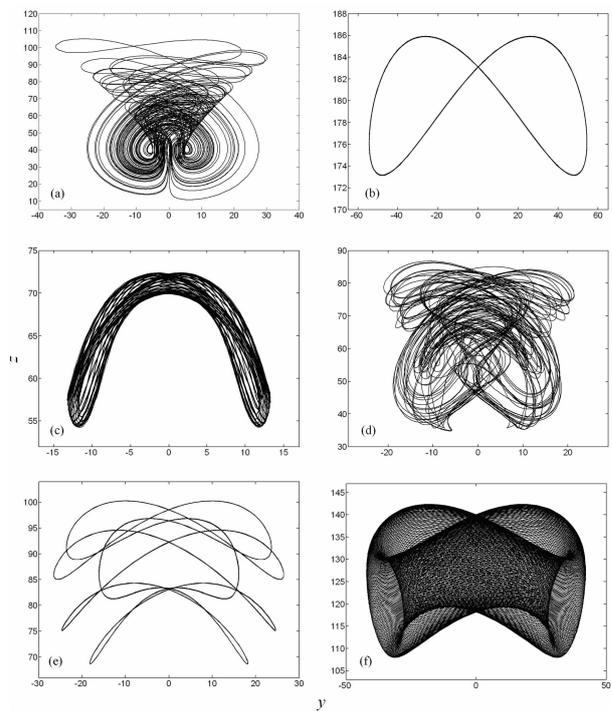


图 3 不同 τ 值下 $y-z$ 平面上的相轨线图. (a) $\tau = 0.03$;

(b) $\tau = 0.1$; (c) $\tau = 0.345$; (d) $\tau = 0.38$; (e) $\tau = 0.53$; (f) $\tau = 0.59$

Fig. 3 Phase portraits on $y-z$ plane with various τ . (a) $\tau = 0.03$;

(b) $\tau = 0.1$; (c) $\tau = 0.345$; (d) $\tau = 0.38$; (e) $\tau = 0.53$; (f) $\tau = 0.59$

2.2 在 xyz 轴方向上同时添加时滞反馈

对于式(7)描述的时滞反馈系统,令 $K_1 = K_2 = K_3 = 5$. 类似地,基于系统(7)也可以构造以 τ 为控

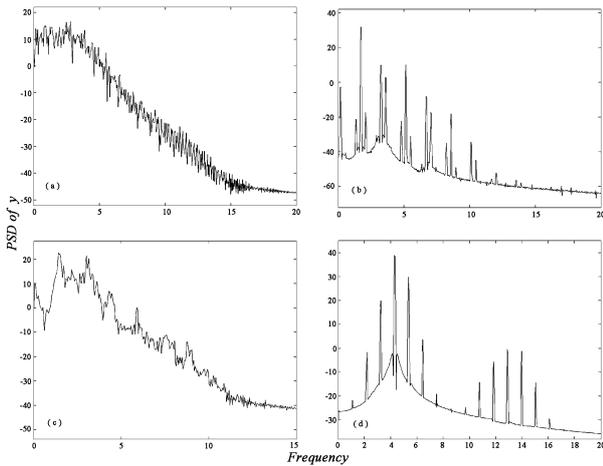


图4 不同 τ 值下 y 的功率谱图.
 (a) $\tau = 0.03$; (b) $\tau = 0.345$; (c) $\tau = 0.38$; (d) $\tau = 0.59$
 Fig. 4 Power spectrum of y for various τ .
 (a) $\tau = 0.03$; (b) $\tau = 0.345$; (c) $\tau = 0.38$; (d) $\tau = 0.59$

其对应的功率谱图. 从功率谱图可以看出, 系统的这一运动处于概周期运动状态.

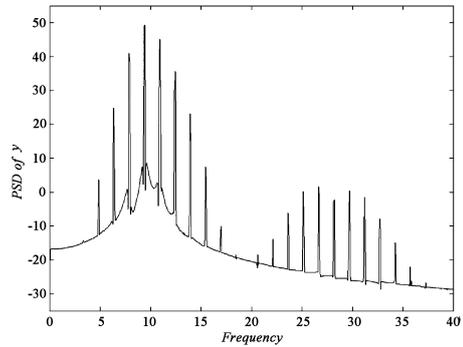


图7 概周期运动的功率谱图, $\tau = 0.08$
 Fig. 7 Power spectrum of quasi-periodic behavior for $\tau = 0.08$

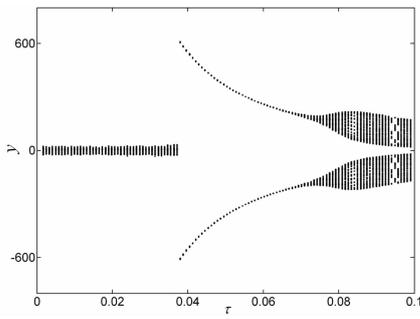


图5 以 τ 为控制参数的分岔图
 Fig. 5 Bifurcation diagram with the variable parameter of τ

3 结论

本文讨论了 Liu 混沌系统的时滞反馈问题, 并通过数值分析获得一些新的结果. 研究表明, 由于时滞反馈的出现, Liu 混沌系统的动力学行为可发生很大的改变. 随着时滞量的逐渐变化, 从分岔图上可以得到以下两个结论: (i) 时滞的变化可诱发 Liu 系统产生周期运动、混沌运动和概周期运动等复杂的动力学行为; (ii) 若时滞的取值适当, 可消除 Liu 系统的混沌运动, 即将混沌吸引子中的不稳定周期轨道稳定. 因此, 本文引入的时滞也可用来对 Liu 系统进行混沌控制, 使 Liu 混沌吸引子控制在某一个周期状态下.

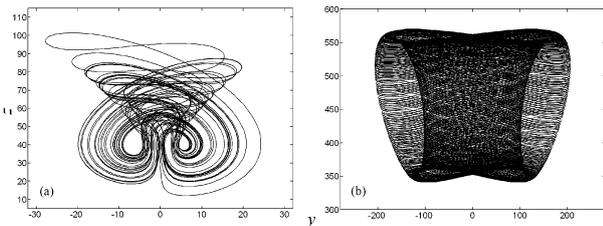


图6 不同 τ 值下 $y-z$ 平面上的相轨线图.
 (a) $\tau = 0.02$; (b) $\tau = 0.08$
 Fig. 6 Phase portraits on $y-z$ plane with various τ .
 (a) $\tau = 0.02$; (b) $\tau = 0.08$

参 考 文 献

制变量的分岔图. 对比图5和图2可知, 在 xyz 轴方向上同时添加时滞反馈时, 变量 y 在时滞参数区域 τ 内的分岔路径发生了明显的变化. 当 $\tau < 0.0378$ 时, 系统处于混沌运动状态; 且在 $\tau \approx 0.0378$ 处突然出现了周期1运动形态, 其幅值也有前述的突变(跳跃)现象. 然而, 随着的逐渐增大, 系统(7)将由周期1逐渐演化为一类类似虫洞的吸引子. 图6(b)给出了这一吸引子的相轨线图. 图7则显示了

- 1 Smale S. Mathematical problems for the next century. *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, 2000, January Issue, 271 ~ 294
- 2 Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9:1465 ~ 1466
- 3 Ueta T, Chen G. Bifurcation analysis of Chen's attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 1917 ~ 1931
- 4 Lü J, Chen G, Zhang S. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 659 ~ 661
- 5 Lü J, Chen G and Zhang SC. Controlling in between the Lorenz and the Chen systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 1417 ~ 1422

- 6 Lü J, Zhou TS, Chen G, Zhang SC. The compound structure of Chen's attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 855 ~ 858
- 7 王琳,倪樵,刘攀,黄玉盈. 一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (Wang Lin, Ni Qiao, Liu Pan, Huang Yuying. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz - Like system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 8 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (in Chinese))
- 9 Liu CX etc. A new chaotic attractor. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22: 1031 ~ 1038

DYNAMICAL BEHAVIORS OF LIU SYSTEM TIME DELAYED FEEDBACKS

Wang Lin Ni Qiao Huang Yuying

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract Liu system with time delayed feedbacks was investigated. Two typical situations were considered, and the effect of time - delay parameter on the dynamics of the system was focused. It is shown that Liu system with time delayed feedbacks may exhibit interesting and extremely rich dynamical behaviors. The evolutions of the dynamics are shown to be complex with varying time - delay parameters. Moreover, the strange attractor like "vornhole" was detected via numerical simulations.

Key words time delayed feedback, Liu system, chaos, attractor