

# 超混沌 Lü 系统的线性与非线性耦合同步\*

贾贞 邓光明

(桂林工学院数理系, 桂林 541004)

**摘要** 针对由 Aimin chen 等人最近提出来的一个新的超混沌系统—超混沌 Lü 系统的同步问题展开研究. 对两个恒同的超混沌 Lü 系统, 分别给出了它们在线性耦合和非线性耦合情形下在全局范围内实现同步的充分条件, 用 Lyapunov 方法从理论上证明了结论, 并用数值仿真验证了理论结果.

**关键词** 超混沌系统, 耦合系统, 同步

## 引言

自从 1990 年 L. M. Pecora 和 L. Carroll 首次提出了混沌同步的思想<sup>[1]</sup>, 并给出了一种混沌同步的有效方法, 十多年来, 随着混沌系统同步研究的不断深入, 人们先后提出了诸多混沌同步的方法, 如线性耦合方法, 反馈方法, 自适应方法, 反步法等<sup>[2~10, 12~14]</sup>. 由于混沌同步在保密通讯和振荡发生器设计等许多领域都有着巨大的应用前景, 混沌控制与同步的研究现今已成为非线性动力学的一个重要而热门的领域.

目前, 人们对线性耦合同步研究比较多, 而对非线性耦合同步研究比较少见. 本文针对 Aimin chen 等提出来的超混沌 Lü 系统<sup>[11]</sup>的线性与非线性耦合同步问题展开研究. 分别给出了两个恒同的超混沌 Lü 系统在线性耦合和非线性耦合情况下实现同步的充分条件. 用 Lyapunov 方法<sup>[5]</sup>从理论上证明了结论, 并通过数值仿真验证了控制方法的有效性.

## 1 超混沌 Lü 系统

最近, 由 Aimin chen 等人在研究 Lü 系统的控制过程中, 用状态反馈的方法, 在 Lü 系统中增加一个新变量, 获得了一个新的超混沌系统, 称为超混沌 Lü 系统, 其具体描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \\ \dot{x}_4 = x_1x_3 + dx_4 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $a, b, c$  是 Lü 系统的参数,  $d$  是控制参数.

随着参数  $d$  的逐渐增大, 系统由周期轨道变为混沌状态, 然后再变为超混沌状态. 当系统参数取值为  $a = 36, b = 3, c = 20, -0.35 < d \leq 1.30$  时, 系统(1)有两个 Lyapunov 指数为正, 而所有 Lyapunov 指数之和为负, 系统处于超混沌状态. 当时的超混沌吸引子如下图 1 所示.

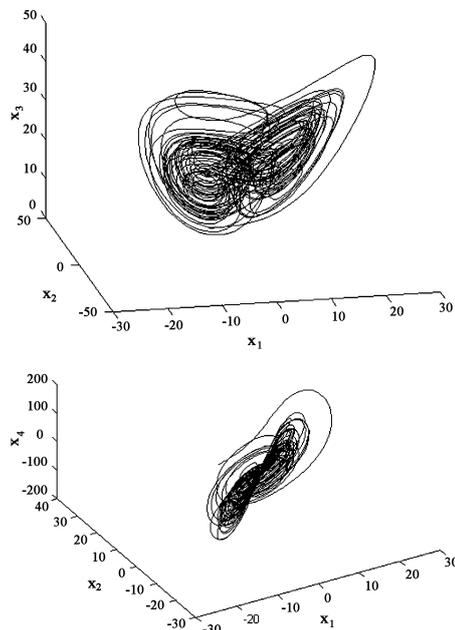


图1 超混沌 Lü 系统的吸引子  
Fig. 1 Lü chaotic attractor

## 2 两个恒同的超混沌 Lü 系统的耦合同步

将系统(1)写成矩阵形式如下:

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (2)$$

2006-12-09 收到第 1 稿, 2007-01-03 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(60574045)

其中  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \end{bmatrix}.$$

考虑与系统(2)耦合的系统:

$$\dot{y} = 4y + f(y) + K(x - y) \quad (3)$$

记系统误差  $e = y - x = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T, e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

则耦合系统(3)与(2)的误差系统为:

$$\dot{e} = Ae + (f(y) - f(x)) - Ke \quad (4)$$

这里  $f(y) - f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 + x_1x_3 \\ y_1y_2 - x_1x_2 \\ y_1y_3 - x_1x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ y_2 & x_1 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \times$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \triangleq \Lambda Be, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ y_2 & x_1 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

耦合系统(3)与(2)同步是指当  $t \rightarrow +\infty$  时,系统误差  $e_i \rightarrow 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ , 即有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e = 0$ .

### 2.1 线性耦合同步

一般地,在系统(3)中我们取为一常值矩阵,这时称系统(3)与(2)是线性耦合的. 为了控制器简便起见,我们取  $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4), k_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  为待定参数

则误差系统(4)为

$$\dot{e} = Ae + Be - Ke \quad (5)$$

由于超混沌系统(2)是有界的,记  $M = \max_{x_i \in (2)} \{ |x_i| \} = \max_{i=1,2,3,4}$

$\max_{y_i \in (2)} \{ |y_i| \}$ , 且记  $\tilde{e} = [ |e_1|, |e_2|, |e_3|, |e_4| ]^T$ . 因为

$$e^T Be \leq M \tilde{e}^T B_1 \tilde{e} = M \tilde{e}^T \tilde{B} \tilde{e} \leq M \lambda_{\max}(\tilde{B}) \tilde{e}^T \tilde{e} = M \lambda_{\max}(\tilde{B}) e^T e$$

其中  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \frac{1}{2} (B_1 + B_1^T) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{\max}(\cdot) \text{ 为 } (\cdot) \text{ 的最大特征}$$

值. 记  $m_B \triangleq \lambda_{\max} \tilde{B} \approx 1.5663$ , 则有  $e^T Be \leq M m_B e^T e$ . 又记

$m_A = \lambda_{\max} \left( \frac{A + A^T}{2} \right)$ , 因  $A$  为常值矩阵, 故  $m_A$  为一定

值. 如当  $A = \begin{bmatrix} -36 & 36 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  时,  $m_A \approx 25.2875$ .

取 Lyapunov 函数

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e$$

它沿误差系统(5)对  $t$  的导数为

$$\dot{V} = e^T \dot{e} = e^T (Ae + Be - Ke) \leq e^T \frac{A + A^T}{2} e +$$

$$M m_B e^T e - e^T Ke \leq m_A e^T e + M m_B e^T e - e^T Ke =$$

$$e^T (m_A I + M m_B I - K) e \triangleq e^T P e$$

其中  $P = \text{diag}(m_A + M m_B - k_1, m_A + M m_B - k_2, m_A + M m_B - k_3, m_A + M m_B - k_4)$ .

显然当  $k_i$  满足  $k_i > m_A + M m_B (i = 1, 2, 3, 4)$

时,  $P$  负定, 从而  $\dot{V}$  是负定的. 此时误差系统(5)在原点全局渐近稳定, 即对于任意的初始条件  $x(0)$  和  $y(0)$ , 均有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e = 0$ . 于是有以下定理:

**定理 1** 当系统(3)中耦合强度矩阵  $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  满足  $k_i > m_A + M m_B (i = 1, 2, 3, 4)$  时, 耦合系统(3)和(2)在全局范围内同步.

**注 1** 定理 1 给出的是耦合系统(3)与(2)同步的充分条件. 事实上, 在更弱的条件系统也能实现同步(后面的数值仿真将进一步说明).

**注 2** 以上线性耦合的方法需要估计系统(2)的界, 而目前系统(2)确切的界未知. 为克服这点不足, 以下提出了非线性耦合同步的方法.

### 2.2 非线性耦合同步

在耦合系统(3)中取为状态变量的函数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & -y_3 & y_2 & y_3 \\ 0 & \tilde{k}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{k}_4 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \tilde{k}_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4) \text{ 为}$$

待定参数, 这时称系统(3)与(2)是非线性耦合的.

此时误差系统(4)为

$$\dot{e} = Ae + (B - K)e \quad (6)$$

其中  $B - K = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & y_3 & -y_2 & -y_3 \\ -y_3 & -\tilde{k}_2 & -x_1 & 0 \\ y_2 & x_1 & -\tilde{k}_3 & -x_1 \\ y_3 & 0 & x_1 & -\tilde{k}_4 \end{bmatrix}$ , 则有  $\frac{1}{2} [(B - K) +$

$$(B-K)^T] = \text{diag}(-\bar{k}_1, -\bar{k}_2, -\bar{k}_3, -\bar{k}_4) \underline{\Delta} \bar{k}$$

取 Lyapunov 函数

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e$$

它沿误差系统(6)对  $t$  的导数为

$$\dot{V} = e^T \dot{e} = e^T A e + e^T (B-K) e = e^T \frac{A+A^T}{2} e + e^T \tilde{K} e \underline{\Delta} \tilde{P} e$$

$$\text{其中 } \tilde{P} = \begin{bmatrix} -a-\bar{k}_1 & a/2 & 0 & 1/2 \\ a/2 & c-\bar{k}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b-\bar{k}_3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & d-\bar{k}_4 \end{bmatrix}$$

要使  $\tilde{P}$  负定,  $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$  必须同时满足以下条件:

$$(I) \Delta_1 = -a - \bar{k}_1 < 0$$

$$(II) \Delta_2 = (a + \bar{k}_1)(k_2 - c) - \frac{a^2}{4} > 0$$

$$(III) \Delta_3 = -(b + \bar{k}_3) \Delta_2 < 0$$

$$(IV) \Delta_4 = (d - \bar{k}_4) \Delta_3 - \frac{1}{4}(k_2 - c)(k_3 + b) > 0 \quad (7)$$

于是可取  $\bar{k}_1 = \bar{k}_3 = 0$  且

$$\bar{k}_2 > c + \frac{a}{4}, \bar{k}_4 > d + \frac{\bar{k}_2 - c}{4a(\bar{k}_2 - c) - a^2} \quad (8)$$

此时,  $\tilde{P}$  负定, 从而  $\dot{V}$  是负定的. 故误差系统(6)在原点全局渐近稳定, 即对于任意的初始条件  $x(0)$  和  $y(0)$ , 均有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e = 0$ . 于是有以下定理:

**定理 2** 当系统(3)中  $K = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 & y_3 \\ 0 & \bar{k}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{k}_4 \end{bmatrix}$  且

$\bar{k}_2, \bar{k}_4$  满足条件(8)时, 耦合系统(3)与(2)在全局范围内同步.

### 3 数值仿真

在以下数值仿真实验中系统参数取, 初始值均取为, 且各方程均用四阶 Runge-Kutta 方法求解.

图 2 给出了系统(3)与(2)在耦合强度和均分别取  $[0, 100, 0, 100]$  这组值时, 分别在线性和非线性耦合情形下的误差衰减情况, 说明两系统趋于同步.

图 3 给出了耦合系统(3)与(2)在耦合强度和均取  $[0, 21, 0, 2]$  这组值时, 分别在线性和非线性耦合情形下的误差衰减情况.

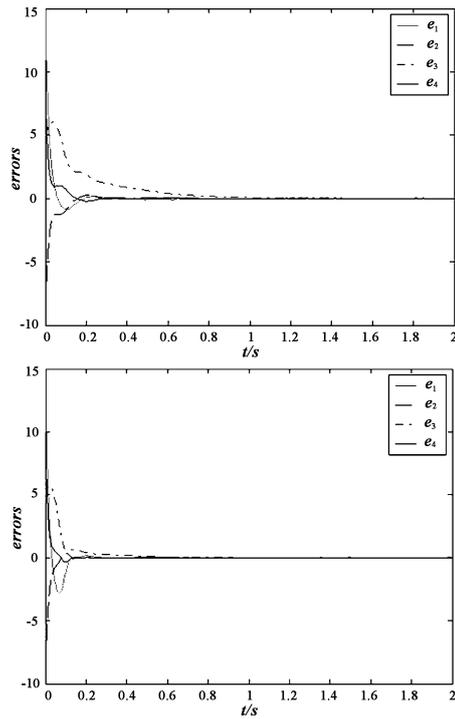


图 2 (a)线性耦合时误差图; (b)非线性耦合时误差图

Fig. 2 (a)The errors of linearly coupled synchronization;

(b)The errors of nonlinearly coupled synchronization

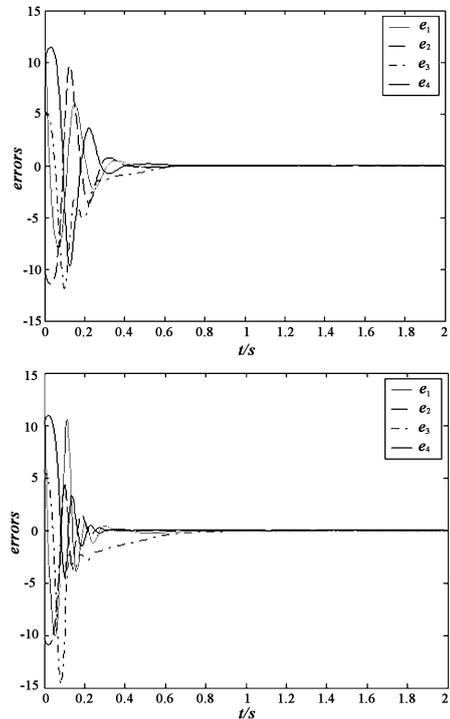


图 3 (a)线性耦合时误差图; (b)非线性耦合时误差图

Fig. 3 (a)The errors of linearly coupled synchronization;

(b)The errors of nonlinearly coupled synchronization

从图可见, (i) 定理 1 和定理 2 给出的是同步的充分条件, 实验中的取值均比定理条件弱, 仍实现了同步, 说明同步条件可以减弱. (ii) 对图 3 与

图2 进行比较可见,对于线性耦合情形增大耦合强度并不一定提高系统趋向同步的速度,而对于非线性耦合情形增大系统趋向同步的速度加快.

#### 4 结论

本文分别给出了两个恒同的超混沌 Lü 系统在线性耦合和非线性耦合情况下实现全局同步的充分条件. 用 Lyapunov 方法从理论上证明了结论,并通过数值仿真验证了控制方法的有效性.

#### 参 考 文 献

- 1 Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic system. *Phys. Rev. Lett*, 1990, 64(8): 821 ~ 824
- 2 Chen G, Dong X. From chaos to order; Singapore: World Scientific, 1998
- 3 胡岗, 萧井华, 郑志刚. 混沌控制. 上海: 上海科技教育出版社, 2000 (Hu gang, Xiao jinhua, Zheng zhigang. Chaos control. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000 (in Chinese))
- 4 郑志刚. 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为. 北京: 高等教育出版社, 2004 (Zheng zhigang. Spatiotemporal dynamics and collective behaviors in coupled nonlinear systems. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))
- 5 Khalil H. K. Nonlinear systems. USA. Prentice Hall, 1996
- 6 Chen G R and Dong X N. From chaos to order; Methodologies, Perspectives and Applications. 1998, Singapore: World Scientific
- 7 Lü J, Zhou T, Zhang S. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 14: 529 ~ 541
- 8 Li D, Lu J, Wu X. Linearly coupled synchronization of the unified chaotic systems and the Lorenz systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 23: 79 ~ 85
- 9 Ju H. Park. Stability criterion for synchronization of linearly coupled unified chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 23: 1319 ~ 1325
- 10 Tao C, Lu J, Lü J. The feedback synchronization of a unified chaotic system. *Acta Phys Sinica*, 2005, 52: 1595 ~ 1605
- 11 Aimin Chen, Jun-an Lu, Jinhu Lü, Simin Yu. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A*, 2006, 364: 103 ~ 110
- 12 高洁, 陆君安. 不确定参数下的四维超混沌吕系统的最优同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (Gao jie, Lu junan. Optimal synchronization of hyperchaotic Lü system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (in Chinese))
- 13 陈保颖. 线性反馈实现 Lü 系统的混沌同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (Linear feedback control for synchronization of Lü chaos system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (in Chinese))
- 14 陈保颖, 包芳勋. 连续混沌系统的混沌同步控制. *动力学与控制学报*, 2004, 2(4): 14 ~ 18 (Chen baoying, Bao fangxun. Chaos synchronization control of continuous chaos system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 14 ~ 18 (in Chinese))

## LINEARLY AND NONLINEARLY COUPLED SYNCHRONIZATION OF HYPERCHAOTIC Lü SYSTEMS \*

Jia zhen Deng guangming

(Department of Maths and Physics, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract** This paper analyzed the synchronization of a new hyperchaotic system-hyperchaotic Lü system introduced by Aimin chen et al. Two sufficient conditions for the global synchronization of two identical linearly and nonlinearly coupled hyperchaotical Lü systems were given respectively. The conclusions were proved theoretically based on Lyapunov method. Finally, numerical simulations were given to demonstrate the feasibility of the theoretical conclusion.

**Key words** hyperchaotic system, coupled system, synchronization

Received 9 December 2006, revised 3 January 2007.

\* The project supported by National Natural Science Foundation of China(60574045)