

基于反步法的混沌系统函数投影同步*

唐新华¹ 陆君安¹ 张伟伟²

(1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072) (2. 邢台学院数学系, 邢台 054001)

摘要 针对最新提出的 Lü 混沌系统和超 Lü 混沌系统的耦合系统, 在响应系统中加入控制项 v , 通过变换和反步设计, 利用 Lyapunov 稳定性理论, 实现了驱动-响应耦合系统之间的函数投影同步, 使驱动响应系统之间按照任意给定的有界尺度函数 $\alpha(t)$ 演化. 数值试验验证了理论分析的正确性.

关键词 投影同步, 反步设计, 尺度函数, 函数投影同步

引言

自从 Pecora 和 Carroll^[1] 首次提出耦合混沌系统可以实现同步以来, 混沌系统的同步成为非线性科学研究中的一大热点. 人们对混沌同步现象的研究大致有以下几个方面^[2]: 混沌系统完全(精确)同步(CS), 混沌系统相同步(PS), 混沌系统互同步(Mutual Synchronization)(包括相同混沌振子的互同步, 互相耦合的不同混沌系统间的混沌互同步等), 广义混沌同步(GS), 混沌系统延迟同步(LS)等.

1999年, Mainieri^[3] 等人在研究部分线性混沌系统中观察到一种新的同步现象—投影同步. 即在耦合某些部分线性混沌系统时, 在一定条件下, 不仅可以使耦合的驱动-响应系统状态的输出相位锁定, 而且各对应状态的振幅还按某一比例关系演化, 并且指出这一比例依赖于混沌系统的演化和初始条件的选取. 投影同步技术已经在混沌保密通讯及混沌加密领域中应用并且有广泛的应用前景.

Xu 等人^[4] 通过对耦合驱动-响应系统中的响应系统加入控制项实现了非部分线性系统的投影同步, 从而突破了投影同步只局限于部分线性系统的界限. Li^[5] 也通过对耦合系统的响应系统加入控制实现了 Chen 系统和 Lorenz 系统的投影同步. 但是以前的文章都是研究驱动-响应系统之间按照某一常数尺度因子演化, 但是实际问题中有时需要驱动-响应系统之间按照某一时间函数演化, 即所谓函数投影同步. 本文针对最新提出的 Lü 系统和超 Lü 系统的耦合系统, 在响应系统加入控制项 v ,

通过变换把耦合驱动-响应系统的误差系统转化为反步形式, 然后采用反步法并结合 Lyapunov 稳定性理论^[6] 实现了驱动-响应系统间的函数投影同步, 即驱动-响应系统之间按照某一时间函数 $\alpha(t)$ 演化. 数值试验验证了理论分析的正确性.

1 函数投影同步

函数投影同步是指驱动响应系统按照一个时间函数 $\alpha(t)$ 演化, 即系统的对应分量依照 $\alpha(t)$ 成比例. 考虑如下形式的混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_m = f(x_m) \\ \dot{x}_s = g(x_m, x_s) + v \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})$, $x_s = (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})$, $f: R^n \rightarrow R^n$, $g: R^{2n} \rightarrow R^n$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是设计的控制器, 下标 'm' 和 's' 分别代表驱动响应系统. 若存在函数 $\alpha(t)$ ($\alpha(t) \neq 0$) 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m - \alpha(t)x_s\| = 0$$

就称系统 x_m 和 x_s 达到函数投影同步, 称 $\alpha(t)$ 为时间尺度函数. 下面假设 $\alpha(t)$ 满足: $\alpha(t)$ 在 $[0, \infty]$ 内连续, 可导且有界.

2 Lü 系统的函数投影同步

Lü 系统由吕金虎和陈关荣在 2002 年发现^[7], 根据 Vanecek 和 Celikovskiy 的标准, Lorenz 系统满足 $a_{12}a_{21} > 0$, Chen 系统满足 $a_{12}a_{21} < 0$, Lü 系统满足 $a_{12}a_{21} = 0$, 它是一个连接 Lorenz 系统和 Chen 系统的临界系统. Lü 系统的动力学方程为:

2007-01-02 收到第 1 稿, 2007-04-23 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目(60574045)、软件工程国家重点实验室开放基金(SKLSSE05-14)和水资源与水电工程科学国家重点实验室开放基金项目(2005C010)

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

其中 a, b, c 为常数, 当 $a = 36, b = 3, c = 20$ 时 Lü 系统为一个混沌吸引子. 现在, 作如下形式的耦合:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = a(y_m - x_m) \\ \dot{y}_m = -x_m z + cy_m \\ \dot{z} = x_m y_m - bz_m \\ \dot{x}_s = a(y_s - x_s) + v_1 \\ \dot{y}_s = -x_s z + cy_s + v_2 \end{cases} \quad (3)$$

根据函数投影同步的定义作误差系统:

$$e_1 = x_m - \alpha(t)x_s, \quad e_2 = y_m - \alpha(t)y_s$$

则相应的误差动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= ae_2 - ae_1 - \dot{\alpha}(t)x_s - \alpha(t)v_1 \\ \dot{e}_2 &= -ze_1 + ce_2 - \dot{\alpha}(t)y_s - \alpha(t)v_2 \end{aligned}$$

用反步法逐步设计误差的 Lyapunov 函数, 设 $z_1 = e_1$, 则

$$\dot{z}_1 = ae_2 - az_1 - \dot{\alpha}(t)x_s - \alpha(t)v_1$$

把 e_2 看成输入设计反馈控制 $e_2 = \varphi(z_1)$ 来稳定原点 $z_1 = 0$, 构造关于 z_1 的 Lyapunov 函数 $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$.

对 V_1 求导得 $\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1(a\varphi(z_1) - az_1 - \dot{\alpha}(t)x_s - \alpha(t)v_1)$, 为使 z_1 在原点稳定选择 $\varphi(z_1) = 0, v_1 = -\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}x_s$ 得到 $\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = -az_1^2$ 负定. 从而 z_1 的原点是全局指数稳定的.

为运用反步法, 应用变量代换

$$z_2 = e_2 - \varphi(z_1) = e_2$$

系统的形式转化为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= az_2 - az_1 \\ \dot{z}_2 &= -zz_1 + cz_2 - \dot{\alpha}(t)y_s - \alpha(t)v_2 \end{aligned}$$

取 $V = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2$ 作为复合 Lyapunov 函数, 得到

$$\dot{V} = -az_1^2 + z_2(az_1 - zz_1 + cz_2 - \dot{\alpha}(t)y_s - \alpha(t)v_2)$$

为使得 (z_1, z_2) 系统在原点稳定, 取 $v_2 = \frac{1}{\alpha(t)}(az_1 - zz_1 + (c+1)z_2 - \dot{\alpha}(t)y_s)$, 得到 $\dot{V} = -az_1^2 - z_2^2$ 负定.

由 Lyapunov 稳定性理论知原系统的误差在零点指数稳定, 即得到 Lü 系统的函数投影同步, 原来耦合混沌系统的驱动-响应系统按照时间尺度函数 $\alpha(t)$ 演化.

下面的数值仿真实验说明了这种方法的有效

性. 图 1 和图 2 中取 $a = 36, b = 3, c = 20, \alpha(t) = 12 + \sin t$, 初始点 $(0.1, 1, 30, 12, 10)$, 误差为 $e_1 = x_m - (12 + \sin t)x_s, e_2 = y_m - (12 + \sin t)y_s$.

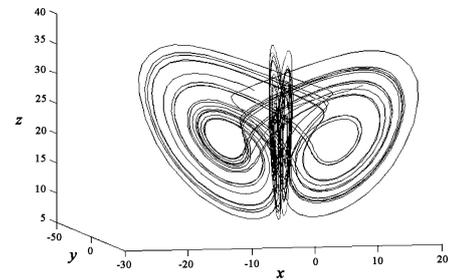


图 1 系统的函数投影同步图象

Fig. 1 Function projective synchronization of system

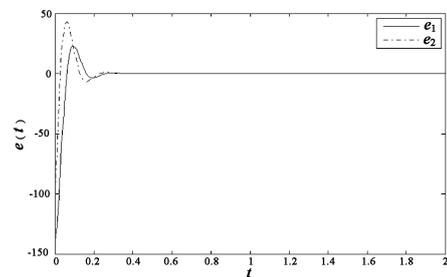


图 2 函数投影同步发生时误差随时间演化的图象

Fig. 2 The error vector figure of function projective synchronization

3 超 Lü 混沌系统的函数投影同步

超混沌系统是指系统状态方程必须满足两个条件: 1) 状态方程的维数至少是四维而且阶数至少是二阶; 2) 原系统至少有两个正的 Lyapunov 指数且所有 Lyapunov 指数之和要小于零. 最新提出的超 Lü 混沌系统^[8,9]的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + u \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{u} = xz + du \end{cases} \quad (4)$$

其中 a, b, c 是与 Lü 系统中相同的常数, d 是控制参数, 当 $a = 36, b = 3, c = 20, d = 1.3$ 时系统表现超混沌.

依如下形式耦合超 Lü 系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = a(y_m - x_m) + u \\ \dot{y}_m = -x_m z + cy_m \\ \dot{z} = x_m y_m - bz_m \\ \dot{u} = x_m z_m + du \\ \dot{x}_s = a(y_s - x_s) + u + v_1 \\ \dot{y}_s = -x_s z + cy_s + v_2 \\ \dot{z}_s = x_s y_s - bz_s + v_3 \end{cases} \quad (5)$$

根据函数投影同步的定义作误差系统:

$$e_1 = x_m - \alpha(t)x_s, e_2 = y_m - \alpha(t)y_s, e_3 = z_m - \alpha(t)z_s$$

则相应的误差动力学方程为

$$\dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + (1 - \alpha(t))u - \dot{\alpha}(t)x_s - \alpha(t)v_1$$

$$\dot{e}_2 = -x_m z_m + \alpha(t)x_s z_s + ce_2 - \dot{\alpha}(t)y_s - \alpha(t)v_2$$

$$\dot{e}_3 = x_m y_m - \alpha(t)x_s y_s - be_3 - \dot{\alpha}(t)z_s - \alpha(t)v_3$$

用反步法逐步设计误差的 Lyapunov 函数, 设 $z_1 = e_1$ 则

$$\dot{z}_1 = ae_2 - az_1 + (1 - \alpha(t))u - \dot{\alpha}(t)x_s - \alpha(t)v_1$$

把 e_2 看成输入, 设计反馈控制律 $e_2 = \varphi_1(z_1)$ 来稳定原点 $z_1 = 0$.

构造关于 z_1 的 Lyapunov 函数 $V_1 = \frac{1}{2} z_1^2$. V_1 的

导数 $\dot{V} = z_1 \dot{z}_1 = z_1 (a\varphi_1(z_1) - az_1 + (1 - \alpha(t))u - \dot{\alpha}(t)x_s - \alpha(t)v_1)$, 再选择 $\varphi_1(z_1) = 0, v_1 = (\frac{1 - \alpha(t)}{\alpha(t)})u - \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}x_s$ 得到 $\dot{V} = z_1 \dot{z}_1 = -az_1^2$ 为负定.

从而 z_1 的原点是全局指数稳定的. 为运用反步法, 应用变量代换

$$z_2 = e_2 - \varphi_1(z_1) = e_2$$

系统的形式转化为 (此时 (z_1, z_2) 系统要写成如下反步形式)

$$\dot{z}_1 = az_2 - az_1$$

$$\dot{z}_2 = -x_m e_3 - \alpha(t)z_s(x_m - x_s) + cz_2 - \dot{\alpha}(t)y_s - \alpha(t)v_2$$

把 e_3 看成反馈控制律 $e_3 = \varphi_2(z_1, z_2)$ 来稳定系统 (z_1, z_2) 的原点.

取 $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2$ 作为复合 Lyapunov 函数, 得

$$\dot{V}_2 = -az_1^2 + z_2 (az_1 - x_m \varphi_2(z_1, z_2) - \alpha(t)z_s(x_m - x_s) + cz_2 - \dot{\alpha}(t)y_s - \alpha(t)v_2)$$

为使得 (z_1, z_2) 系统在原点稳定, 取

$$v_2 = \frac{1}{\alpha(t)} (az_1 - \alpha(t)z_s(x_m - x_s) + (c+1)z_2 - \dot{\alpha}(t)y_s),$$

$$\varphi_1(z_1) = 0$$

得到 $\dot{V}_2 = -az_1^2 - z_2^2$ 负定, 由 Lyapunov 稳定性理论知 (z_1, z_2) 的原点是全局指数稳定的, 再次应用变量代换

$$z_3 = e_3 - \varphi_2(z_1, z_2)$$

系统的形式转化为

$$\dot{z}_1 = az_2 - az_1$$

$$\dot{z}_2 = -x_m e_3 - z_2 - az_1$$

$$\dot{z}_3 = x_m y_m - \alpha(t)x_s y_s - bz_3 - \dot{\alpha}(t)z_s - \alpha(t)v_3$$

取 $V = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2$, 求导得

$$\dot{V} = -az_1^2 - z_2^2 + z_3(-x_m z_2 + x_m y_m - \alpha(t)x_s z_s - bz_3 - \dot{\alpha}(t)z_s - \alpha(t)v_3)$$

为使得 (z_1, z_2, z_3) 系统的原点稳定, 选

$$v_3 = \frac{1}{\alpha(t)} (1-b)z_3 - \alpha(t)x_s y_s + x_m y_m - x_m z_2 - \dot{\alpha}(t)z_s$$

使得 $\dot{V} = -az_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ 负定.

由 Lyapunov 稳定性理论知, (z_1, z_2, z_3) 系统的原点也是误差系统 (e_1, e_2, e_3) 的原点是全局指数稳定的. 从而得到超 Lü 系统达到了函数投影同步, 且原来耦合混沌系统的驱动-响应系统按照尺度函数 $\alpha(t)$ 演化. 下面图 3 的数值仿真实验说明了这种方法的有效性, 其中图 3 (a) 超 Lü 混沌系统的函数投影同步图象; 图 3 (b) 超 Lü 混沌系统的函数投影同步图象分别在 $x-y, x-z, y-z$ 三个平面上的投影, 设初始点为 $(0.1, 1, 30, 2, 12, 13, 2)$, 仿真中参数选择: $a = 36, b = 3, c = 20, d = 1.3, \alpha(t) = 3 + \sin(t)$. 图 4 为函数投影同步发生时误差随时间演化的图象.

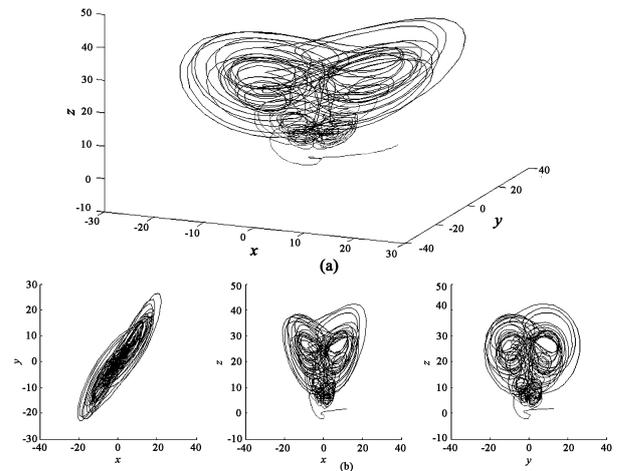


图 3 (a) 超 Lü 混沌系统的函数投影同步图象;

(b) 超 Lü 混沌系统的函数投影同步图象

Fig. 3 (a) Function projective synchronization of hyperchaotic system; (b) Function projective synchronization of hyperchaotic system at x-y, x-z and y-z plane

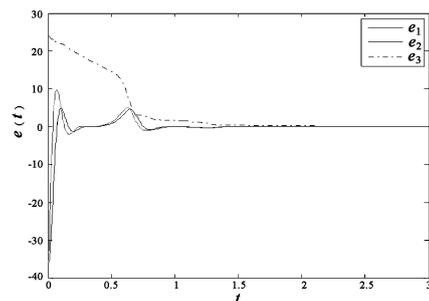


图 4 函数投影同步发生时误差随时间演化的图象

Fig. 4 The error vector figure of function projective synchronization

4 结论

本文对混沌系统耦合驱动-响应系统中的响应系统加入控制项 v 采用反步设计法并结合稳定性理论实现了驱动-响应系统之间的函数投影同步,而且这样控制后可以使驱动响应系统按照任意给定的尺度函数演化.本文分别以系统和最新提出的超混沌系统为例实现了驱动-响应系统之间的函数投影同步,而且这样控制后可以使驱动响应系统按照任意给定的尺度函数演化.这种方法可以用于其他类似的混沌及超混沌系统的函数投影同步.

参 考 文 献

- 1 Pecora L M, Carrol T L. Synchronization in chaotic systems. *Phy Rev Lett*, 1990, 64(8): 821 ~ 824
- 2 刘杰, 陈士华, 陆君安. 统一混沌系统的投影同步与控制. *物理学报*, 2003. 52(07): 1595 ~ 05 (Liu Jie, Chen Shi - Hua, Lu Jun - an. Projective synchronization in a unified chaotic system and its control. *Acta Phys, Sin*, 2003. 52(07): 1595 ~ 05 (in Chinese))
- 3 Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three - dimensional chaotic systems. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(15): 3042 ~ 3045
- 4 Xu Daolin, Li Zhigang. Controlled projective synchronization in nonpartially - linear chaotic systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(6): 1395 ~ 1402
- 5 Guo - hui Li. Generalized projective synchronization of two chaotic systems by using active control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 30: 77 ~ 82
- 6 Hassan K. Khalil 著 朱义胜, 董辉, 李作洲, 等译. 非线性系统(第三版). 北京: 电子工业出版社, 2005 (Hassan K. Khalil. *Nonlinear System*, Third Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005 (in Chinese))
- 7 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003 (Chen, G. Lü, J. *Dynamics Analysis, Control and Synchronization of the Lorenz System Family* 2003, (in Chinese) (Science Press, Beijing))
- 8 Aimin Chen, Junan Lu, Jinhua Lü, Simin Yu. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A*, 2006, 364: 103 ~ 110
- 9 高洁, 陆君安. 不确定参数下的四维超混沌吕系统的最优同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (Gao jie, Lu Junan. Optimal synchronization of hyperchaotic Lü system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (in Chinese))

THE FUNCTION PROJECTIVE SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC SYSTEM USING BACKSTEPPING DESIGN *

Tang Xinhua¹ Lu Jun-an¹ Zhang Weiwei²

(1. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(2. Department of Mathematics, Xingtai University, Xingtai 054001, China)

Abstract The function projective synchronization of the coupled systems and the coupled hyperchaotic systems was discussed. The backstepping method was derived to achieve the function projective synchronization between the coupled systems. A scaling function was introduced. Then the coupled system can synchronize up to any preferred scaling function. Numerical simulations confirm the theoretical results.

Key words projective synchronization, backstepping design, scaling function, function projective synchronization

Received 2 January 2007, revised 23 April 2007.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60574045), the Open Funds of the State Key Laboratory of Software Engineering (SKLSE05-14) and the Open Funds of the State Key Laboratory of Water - Resource and Water - Electricity Engineering Science