

分析两端扭转弹簧约束下简支输流管道的动力特性*

包日东¹ 闻邦椿²

(1. 沈阳化工学院, 沈阳 110142) (2. 东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110004)

摘要 研究了两端受扭转弹簧约束的简支输流管道的固有频率特性和静态失稳临界流速. 根据梁模型横向弯曲振动模态函数, 由端部支承和约束边界条件得到了其模态函数的一般表达式. 根据动力方程的特征方程, 具体分析了约束弹性刚度、流体压强、流速和管截面轴向力等参数对管道固有频率特性和静态失稳临界流速的影响. 数值分析表明, 约束弹性刚度的增大使管道的固有频率和失稳临界流速明显提高; 流体流速、压强和管截面受到的轴向压力的增加使管道的固有频率和失稳临界流速降低. 当管道的固有频率和失稳临界流速较低时, 可以通过增加端部约束的方法来提高.

关键词 输流管道, 简支, 弹性约束, 固有频率, 临界流速

引言

两端支承输流管道已有许多文献从多角度分析和探讨了其动力特性和动力稳定性^[1-4]. Holmes^[5]用 Lyapunov 直接法严格证明了两端简支或两端固支输流管道在定常流作用下不会发生颤振失稳. 两端固支输流管道, 会由于各种因素的影响造成支承的松动, 使得其端部约束介于两端固支和两端简支之间的一种中间支承状态, 这种约束状态可以用两端受扭转弹簧约束下的简支梁来模拟. 文献^[6]将管道简化为两端简支后考虑 Winkler 模型地基和双参数模型地基反力的作用, 利用幂级数法分析了流速和复频的关系, 得出增大弹性地基参数可提高失稳临界流速的结论. 文献^[7]对两端受扭转弹簧约束的简支输流管在其支承简谐运动激励下的振动特性问题进行了实验研究, 考察了不同流速下激振频率变化对输流管道振动响应形态的影响规律. 得出了在某些频率段上管道会发生多周期的复杂运动, 并通过倍周期分岔而进入混沌运动. 本文根据梁模型横向弯曲振动模态函数一般表达式, 由两端受扭转弹簧约束的简支输流管的边界条件得到了其模态函数的一般表达式, 采用 Galerkin 法将运动方程在模态空间内展开, 根据特征方程分析其固有频率特性和失稳临界流速随各参数的变化规律.

1 运动方程

如图 1 所示两端扭转弹簧约束下简支输流管道, 考虑 Kelvin - Voigt 粘弹性管材、管内流体压力效应和管截面轴向力作用, 其梁模型振动方程为^[8]

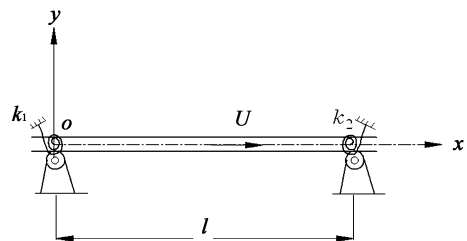


图 1 扭转弹簧约束下简支管道模型

Fig. 1 Schematic of simply supported elastic restrained pipeline

$$\mu EI \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2m_f U \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (m_f U^2 + A_f P - T) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

上式中, y 为管道横向位移, μ 为管道粘性系数, EI 为管道抗弯刚度, m_f 为单位长度上管内流体的质量, m 为单位长度上管道的总质量, P 为管道内压强, T 为轴向力, A_f 为管道过流截面积, U 为管内流体流速.

引入如下的无量纲量, 将方程 (1) 化为无量纲形式.

$$w = \frac{y}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \beta = \frac{m_f}{m}, u = \sqrt{\frac{m_f}{EI}} UL, \tau = \sqrt{\frac{EI}{m}} \frac{t}{L^2},$$

2007-01-06 收到第 1 稿, 2007-03-09 收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (50075010) 资助项目

$$p = \frac{L^2}{EI} PA_f, \Gamma = \frac{L^2}{EI} T, \sigma = \sqrt{\frac{EI\mu}{mL^2}} \quad (2)$$

$$\ddot{w} + \sigma \dot{w}'''' + 2\beta^{0.5} u \dot{w}' + w'''' + (u^2 + p - \Gamma) w'' = 0 \quad (3)$$

采用 Galerkin 展式将式(3)在模态空间内展开, 设其解为 $w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi) q_i(\tau)$, 则式(3)化为

$$\sigma \sum_{i=1}^2 \phi_i'''' \dot{q}_i + \sum_{i=1}^2 \phi_i'''' q_i + (u^2 + p - \Gamma) \sum_{i=1}^2 q_i + 2\beta^{0.5} u \sum_{i=1}^2 \phi_i' \dot{q}_i + \sum_{i=1}^2 \phi_i \ddot{q}_i = 0 \quad (4)$$

方程(4)两边同乘以模态函数 $\phi_j(\xi)$, ($j = 1, 2$), 然后在区间 $[0, 1]$ 上进行积分, 经过计算和整理后可得

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{C} = -\mathbf{B}^{-1}(\phi \mathbf{B}_1 + 2\beta^{0.5} u \mathbf{B}_2),$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{B}_1 + (u^2 + p - \Gamma) \mathbf{B}_3],$$

$$B(i, j) = \int_0^1 \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi,$$

$$B_1(i, j) = \int_0^1 \phi_i''''(\xi) \phi_j(\xi) d\xi,$$

$$B_2(i, j) = \int_0^1 \phi_i'(\xi) \phi_j(\xi) d\xi,$$

$$B_3(i, j) = \int_0^1 \phi_i''(\xi) \phi_j(\xi) d\xi,$$

$$\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2\}^T, (i, j = 1, 2).$$

引入状态参数 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T = \{q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2\}^T$, 将方程(5)化为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & c_{11} & c_{12} \\ k_{21} & k_{22} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

这里, k_{ij}, c_{ij} ($i, j = 1, 2$) 为矩阵 \mathbf{K}, \mathbf{C} 的元素.

2 模态函数及频率方程

如图 1 所示两端扭转弹簧约束下简支管道的边界条件为

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \phi''(0) = k_1 \phi'(0), \\ \phi(1) = 0, \phi''(1) = -k_2 \phi'(1) \end{cases} \quad (7)$$

k_1, k_2 为无量纲的扭转弹性系数.

梁模型横向弯曲振动模态函数一般表达式为^[9]

$$\phi(\xi) = C_1 \sin \lambda \xi + C_2 \cos \lambda \xi +$$

$$C_3 \sinh \lambda \xi + C_4 \cosh \lambda \xi \quad (8)$$

其中系数 C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 由边界条件确定. 将式(8)代入式(7)可得下列关于 C_i 的方程组

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ FC_1 + C_2 + FC_3 - C_4 = 0 \\ C_1 \sin \lambda + C_2 \cos \lambda + C_3 \sinh \lambda + C_4 \cosh \lambda = 0 \\ (G \cos \lambda - \sin \lambda) C_1 - (G \sin \lambda + \cos \lambda) C_2 + \\ (G \cosh \lambda + \sinh \lambda) C_3 + (G \sinh \lambda + \cosh \lambda) C_4 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式(9)是关于 C_i 的线性方程组, 其中 $F = k_1/\lambda, G = k_2/\lambda$ 它有非零解的唯一条件是其系数行列式为零, 展开后可得

$$FG + [2 \sinh \lambda + (F + G) \cosh \lambda] \sin \lambda + [(-F - G) \sinh \lambda - FG \cosh \lambda] \cos \lambda = 0 \quad (10)$$

此即为频率方程, 它是关于基本未知量 λ 的超越方程, 用数值方法(如对分法)解此方程可得到系统的各阶特征值 λ_i .

另外, 由方程组(9)可得

$$\begin{aligned} C_2 &= -C_4 = \frac{F(\sin \lambda - \sinh \lambda)}{F \cosh \lambda + 2 \sinh \lambda - F \cos \lambda} C_1 \\ C_3 &= \frac{F \cos \lambda - F \cosh \lambda - 2 \sin \lambda}{F \cosh \lambda + 2 \sinh \lambda - F \cos \lambda} C_1 \end{aligned} \quad (11)$$

因此满足频率方程(10)的模态函数为

$$\phi(\xi) = \sin \lambda \xi + \eta(\cos \lambda \xi - \cosh \lambda \xi) + \zeta \sinh \lambda \xi \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{F(\sin \lambda - \sinh \lambda)}{F \cosh \lambda + 2 \sinh \lambda - F \cos \lambda}, \\ \zeta &= \frac{F \cos \lambda - F \cosh \lambda - 2 \sin \lambda}{F \cosh \lambda + 2 \sinh \lambda - F \cos \lambda}. \end{aligned} \quad (13)$$

当 $k_1 = k_2 = 0$ 时, $F = G = 0$, 因 $\sinh \lambda \neq 0$, 此时频率方程为 $\sin \lambda = 0$, 满足此频率方程的模态函数为 $\phi(\xi) = \sin \lambda$, 此即为两端简支梁的频率方程和模态函数. 当 $k_1 \rightarrow \infty, k_2 \rightarrow \infty$ 时, 相当于两端固支梁, 本文取 $k_1 = k_2 = 1e10$, 通过数值计算得到频率方程的特征值为 $\lambda_1 = 4.730040316, \lambda_2 = 7.8532045305$ 与两端固支梁前两阶特征值几乎相等. 取 $k_1 = k_2 = k$, 特征值随扭转弹性系数 k 的变化情况如图 2 所示. 特征值随扭转弹性系数的增大而增大, 当 $k < 50$ 时, 其变化较大, 从 $k = 0$ 时的 $\lambda_1 = \pi, \lambda_2 = 2\pi$ 增大到 $k = 50$ 时的 $\lambda_1 = 4.56291875, \lambda_2 = 7.59112317$; 尔后增加较缓慢, 当 $k = 200$ 时, $\lambda_1 = 4.684259541, \lambda_2 = 7.778370$,

已基本接近两端固支时的特征值.

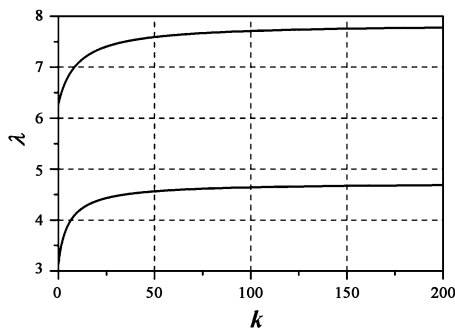


图2 特征值随弹性系数 k 的变化

Fig.2 Variation of eigenvalues with elastic coefficient

3 管道的动力特性

方程组(6)中 A 的特征方程为

$$\omega^4 + \omega^3 P_1 + \omega^2 P_2 + \omega P_3 + P_4 = 0 \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} P_1 &= -c_{11} - c_{22}, \\ P_2 &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} - k_{11} - k_{22}, \\ P_3 &= k_{11}c_{22} + k_{22}c_{11} - k_{12}c_{21} - k_{21}c_{12}, \\ P_4 &= k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12}. \end{aligned} \quad (15)$$

式(14)构成广义本征值问题,其本征值为复数,振动的频率和衰减系数由复本征值的虚部和实部完全确定.取计算参数值为 $k_1 = k_2 = k; u = 2; p = 10; \beta = 0.3; \Gamma = 5; \sigma = 0.002$; 当讨论某参数对动力特性的影响时,此参数值取变化的值.当特征方程有一零特征值时, $P_4 = 0$, 据此可以确定系统静态失稳(又称屈曲失稳、发散失稳)临界流速 u_c . 计算结果如图3~图9所示,分析说明如下.

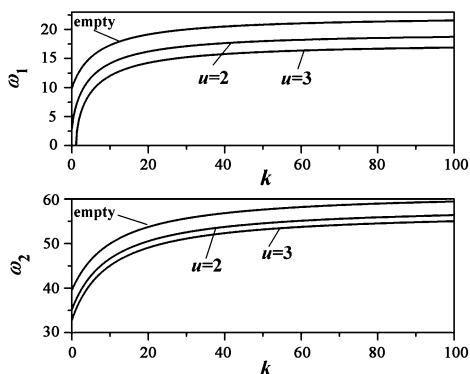


图3 固有频率随弹性系数 k 的变化

Fig.3 Variation of natural frequency with elastic coefficient

(1) 图3所示为输流管道前二阶固有频率随扭转弹性刚度的变化情况.从图中看出,管道前二阶固有频率随弹性刚度的增大而显现增大趋势.当 $k < 50$

时,其变化较大,尔后增加较缓慢.说明对于两端受扭转弹簧约束的简支管道的模向振动,扭转弹性刚度对固有频率的影响主要表现在其弹性系数较小时.因此,对于简支管道的模向振动,只要稍加约束其角转动即可达到提高管道的固有频率的目的.

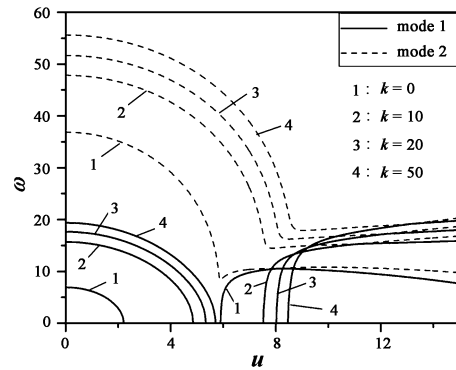


图4 固有频率随流体流速 u 的变化

Fig.4 Variation of natural frequency with flow rate

(2) 图4所示为管道固有频率随流体流速的变化曲线.从图中得出,管道的固有频率随流体流速的增大而下降,随扭转弹性系数的增加而上升.对于简支管道($k = 0$),当无量纲流速 u 达到 π 时,管道即发生静态失稳^[10].增加扭转弹簧的约束后,如 $k = 10$ 时,一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 4.85$; $k = 20$ 时,一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 5.33$; $k = 50$ 时,一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 5.71$.从图中还可看出,管道一阶静态失稳后,随无量纲流速的继续增大,管道会出现一阶和二阶的耦合振动.

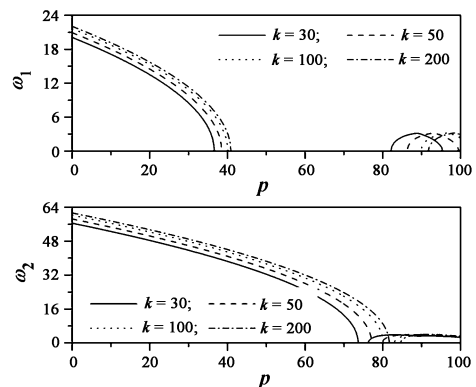


图5 固有频率随流体压强 p 的变化

Fig.5 Variation of natural frequency with fluid pressure

(3) 图5所示为管道固有频率随管内流体压力的变化情况.从图5看出,固有频率随流体压力的增大而下降,当固有频率降为零时,管道发生静

态失稳. 同时还可得到, 提高扭转弹性系数 k , 可以提高使管道发生静态失稳的无量纲压力; 当管道发生二阶静态失稳后, 管道也会出现一阶和二阶的耦合振动.

(4) 管道在操作或铺设中产生的轴向力对其固有频率的影响如图 6 所示. 无量纲轴向力 Γ 为负时表示管道截面轴向受压, 为正时表示管道截面轴向受拉. 从图中看出, 轴向压力使管道固有频率下降, 而轴向受拉时其固有频率上升. 增加扭转弹性系数可以提高使管道发生静态失稳的无量纲轴向压力. 因此, 在管道操作或铺设中应尽量避免使管道产生轴向压力, 特别是对于热管道, 应避免温差产生轴向压力而使管道的固有频率下降, 同时可以适当提高约束的扭转弹性系数来提高管道的固有频率.

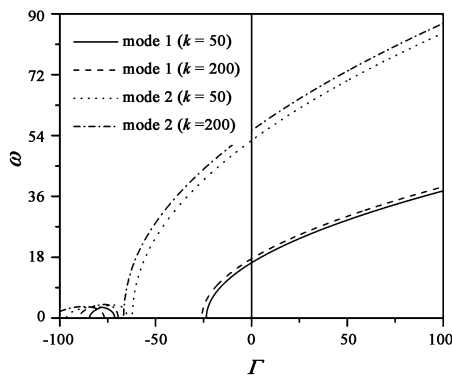


图 6 固有频率随管截面轴向力的变化

Fig. 6 Variation of natural frequency with axial force

(5) 临界流速随管内流体压力的变化情况如图 7 所示. 从图 7 看出, 临界流速随管道内流体压力的增大而下降, 随扭转约束弹性系数的增加而上升. 当静态失稳临界流速下降到零时, 说明在此压力下即使管内流体不流动也会发生静态失稳.

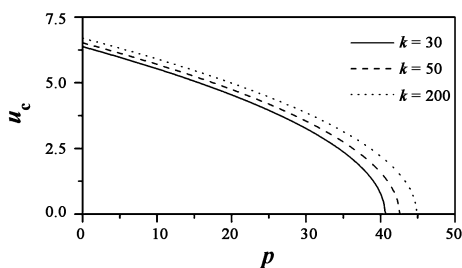


图 7 临界流速 u_c 随流体压强 p 的变化

Fig. 7 Variation of critical flow rate with fluid pressure

(6) 图 8 所示为静态失稳临界流速随约束弹性刚度的变化情况. 从图中看出, 静态失稳临界流

速随着约束弹性刚度的增大而上升, 在 k 小于 50 时其上升幅度很快, 而后上升趋于平缓, 计算结果与图 4 的结论一致, 即 $k = 10$ 时, 一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 4.85$; $k = 20$ 时, 一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 5.33$; $k = 50$ 时, 一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 5.71$; $k = 200$ 时, 一阶静态失稳临界流速可提高到 $u = 5.91$.

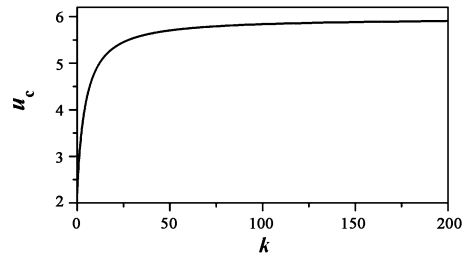


图 8 临界流速 u_c 随弹性系数 k 的变化

Fig. 8 Variation of critical flow rate with elastic coefficient

(7) 图 9 所示为失稳临界流速随管截面所受的无量纲轴向力 Γ 的变化曲线, Γ 为负表示管截面受到压力作用, Γ 为正则表示管截面受到拉力的作用. 所得到的结果与图 (6) 中的结论相对应, 即轴向压力使管道失稳临界流速下降, 而轴向拉力则使管道失稳临界流速上升.

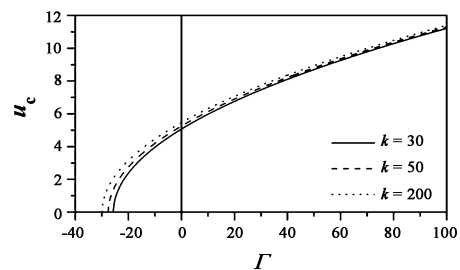


图 9 临界流速 u_c 随管截面轴向力的变化

Fig. 9 Variation of critical flow rate with axial force

4 结语

对于两端固支的输流管道理想化模型, 工程实际中的往往由于各种因素的影响而使支承发生松动, 其端部约束介于两端固支和两端简支之间的一种中间支承状态, 如仍采用理想固支模型来进行动力分析, 必须使结果与实际产生较大的误差. 本文的这种将约束状态用受扭转弹簧约束下的两端简支梁来模拟, 且约束弹性刚度可以根据管道实际来选取, 其分析比较灵活, 能仿真管道实际支承情况, 计算结果比较接近工程实际. 采用本文所述方法, 计算工作量也不会增加太多.

参 考 文 献

- 1 Lee S I, Chung J. New non-linear modeling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 1998, 12: 883 ~ 918
- 2 Jin J D. Stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 208: 427 ~ 439
- 3 冯振宇, 王忠民, 赵凤群. 简支 Kelvin 模型粘弹性输流管道的动力稳定性. *工程力学*, 2004, 21(1): 185 ~ 190 (Feng Zhenyu, Wang Zhongmin, Zhao Fengqun. Dynamic stability of kelvin viscoelastic pipes conveying fluid with both ends simply supported. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(1): 185 ~ 190 (in Chinese))
- 4 金基铎, 杨晓东, 尹峰. 两端铰支输流管道在脉动内流作用下的稳定性和参数共振. *航空学报*, 2003, 24(4): 317 ~ 322 (Jin Jiduo, Yang Xiaodong, Yin Feng. Stability and parametric resonances of a pinned-pinned pipe conveying pulsating fluid. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2003, 24(4): 317 ~ 322 (in Chinese))
- 5 Holmes P J. Pipes supported at both ends cannot flutter. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, 45: 619 ~ 622
- 6 王忠民, 冯振宇, 赵凤群, 等. 弹性地基输流管道的耦合模态颤振分析. *应用数学和力学*, 2000, 21(10): 1060 ~ 1068 (Wang Zhongmin, Feng Zhenyu, Zhao Fengqun, et al. Analysis of coupled-mode flutter of pipes conveying fluid on the elastic foundation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(10): 1060 ~ 1068 (in Chinese))
- 7 邹光胜, 金基铎, 沙云东. 简谐激励下输流管动态响应特性的实验研究. *振动、测试与诊断*, 2001, 21(1): 26 ~ 29 (Zou Guangsheng, Jin Jiduo, Sha Yundong. Experimental study on vibration of pipes conveying fluid under harmonic excitation. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2001, 21(1): 26 ~ 29 (in Chinese))
- 8 Paidoussis M P, Issid N T. Dynamics stability of pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, 33(2): 267 ~ 294
- 9 刘延柱, 陈文良, 陈立群. *振动力学*. 北京: 高等教育出版社, 1998: 130 ~ 135 (Liu Yanzhu, Chen Wenliang, Chen Liqun. *Mechanic of vibration*. Beijing: Higher Education Press, 1998: 130 ~ 135 (in Chinese))
- 10 Blevins R D. *Flow-induced vibration*. New York: Van Nostrand-Reinhold, 1977: 289 ~ 305

ANALYSIS ON DYNAMIC CHARACTERISTICS OF SIMPLY SUPPORTED PIPELINE CONVEYING FLUID ELASTIC RESTRAINS *

Bao Ridong¹ Wen Bangchun²

(1. *Shenyang Institute of Chemical Technology, Shenyang 110142, China*)

(2. *School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China*)

Abstract This paper investigated the natural frequency and static critical flow velocity of simply supported pipes conveying fluid with both ends restrained elastically. The expression of vertical vibration mode-function of pipeline was derived from the boundary condition of simply supports with elastic restrained beam. The effects of restraining elastic coefficient, fluid pressure, fluid flow rate and axial force of pipe section on the characteristics of natural frequency and static critical instability flow velocity were calculated and analyzed based on the eigenequation. The numerical results show that the natural frequency and critical instability flow velocity are proportional to elastic restraining coefficient, but is proportional conversely to flow velocity, fluid pressure and axial sectional drawn force of pipe. It is a convenient and effective way to increase the natural frequency and critical instability flow velocity of pipeline through additional elastic restraining with proper coefficient on two ends while their values are low.

Key words pipeline conveying fluid, simply support, elastic restrain, natural frequency, critical flow velocity

Received 6 January 2007, revised 9 March 2007.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50075010)