

WB法在声固耦合分析中的应用

彭伟才 何锃 黄飞

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 描述了耦合振动声系统建模技术的基本概念. 根据WB法的基本原理, 将结构位移和声压展开成波函数和特解函数的叠加. 应用加权余量法将结构和声学边界条件以及结构与声耦合界面上的连续性条件转换成近似积分, 推导出一组由代数方程表示的耦合模型. 求解方程的未知系数, 再代入展开式得到耦合结构与声系统的响应预报. 通过分析二维的算例表明这种预报技术计算量小而精度高, 因此可应用到中频的分析.

关键词 中频响应, 耦合振动声, Trefftz法, 数值预报技术

引言

现在分析结构与声耦合的数值方法中基于单元技术的主要是基于有限元, 无限元和边界元方法^[1-3]. 这些方法中, 连续的域或边界被离散成小的单元. 由于每一个单元上的场变量采用近似的形函数描述, 为了达到要求的精度, 需要大量的单元. 在动态问题中, 数值解还出现发散现象^[4]. 随着频率的增加, 发散误差也增加, 于是网格密度和迭代次数(为了达到要求的精度)也随着频率增加. 因此基于单元的方法在分析结构与声耦合时被约束在低频段. 对于高频, 结构和声波长比结构-声系统的几何特征要小得多, 以至于数值模型变得很大, 即使今天的计算机也需要很长的时间.

对于耦合的结构与声问题, 计算效率和精度的冲突比非耦合的结构或声要严重得多. 首先要求声压加载到弹性结构上以及耦合界面上的结构和流体的法向位移连续; 结构和声问题必须同时求解, 导致耦合模型的尺寸要充分的大. 其次耦合模型的数值解程序没有非耦合模型效率高, 在耦合模型中, 至少在常用的声压和结构位移格式中, 不是对称的. 最后缩减模态的模式展开法对结构-声耦合问题计算效率大大降低. 最合适的是选择耦合系统的模态. 然而耦合系统的模态不再是对称的, 所以耦合模态的计算成了非对称的特征值问题, 如此非常耗时以至于在实际问题中变得不可能实现. 一般的是选择非耦合结构和非耦

合声模态, 得到的是对称和计算效率高的特征值问题. 然而事实上非耦合的声模态有零位移项, 意味着需要大量高阶的非耦合模态来满足耦合界面上的法向位移连续. 此外较小的几何尺寸、材料属性和误差的变化可能意味着在中频和高频响应中很大的变化.

WB(Wave based)方法由 K. U. Leuven 的噪声和振动研究组采用间接 Trefftz^[5]方法推导而来. 它的基本思想类似于有限元中的模态叠加. WB方法中的结构和声学场变量展开成作为齐次波方程的通解和非齐次波方程的特解的叠加. 与有限元相比, 结构和声域不需要划分成小的单元以及采用简单的形函数在每个单元内求解动力学方程, 整个域采用更加复杂的形函数来描述. WB法的一个重要前提是已经求得用来作为结构和声场变量表达式的T单元函数集合^[6].

本文描述了耦合振动声系统建模技术的基本概念. 通过分析二维的算例表明这种预报技术计算量小而精度高, 因此可应用到中频的分析.

1 基本理论

1.1 定义

WB法的详细讨论见^[7]. 图1所示为2D结构与声耦合模型. 声域 Ω 的边界 Ω_a 包括四个部分($\Omega_a = \Omega_p \cup \Omega_v \cup \Omega_z \cup \Omega_s$). 在边界 Ω_p , Ω_v 和 Ω_z 分别为压力, 法向速度和法向阻抗边界条件, 而 Ω_s 由一固支弹性平板组成. 腔内充满密度为 ρ_0 和声速

为 c 的流体. 板长为 L , 厚度为 t . 板材料属性为: 密度为 ρ_s , 泊松比为 ν , 弹性模量为 E 和材料损耗因子为 η . 法向集中力 F 作用在板的 $r_F(x'_F)$ 处.

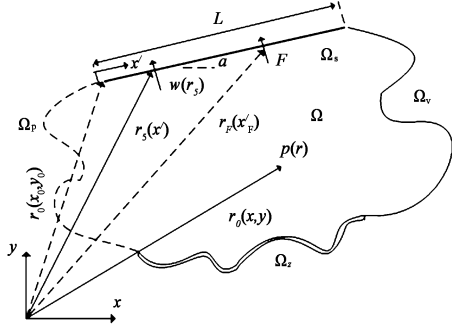


图1 二维结构与声耦合模型

Fig. 1 Two-dimensional coupled vibro-acoustic system

域 Ω 内任意点 $r(x, y)$ 的声压 p 由 Helmholtz 方程控制

$$\nabla^2 p(r) + k^2 p(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (1)$$

其中 $k = \omega / c$ 为流体中的声波数. 定义原点在 $r_0(x_0, y_0)$ 的一维板坐标系 x' , 如图 1.

板的法向位移 w 由 Kirchhoff 板弯曲运动方程控制

$$\frac{d^4 w(x')}{dx'^4} - k_b^4 w(x') = \frac{F}{D} \delta(x', x'_F) + \frac{p(x_0 + x' \cos \alpha, y_0 + x' \sin \alpha)}{D} \quad (2)$$

其中结构弯曲波数 k_b 和板弯曲刚度 D 为

$$k_b = \sqrt[4]{\frac{\rho_s t \omega^2}{D}}, D = \frac{Et^3(1+j\eta)}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

耦合结构与声问题的边界条件:

$$p(r) = \bar{p}(r), \quad r \in \Omega_p \quad (4)$$

$$\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(r)}{\partial n} = \bar{v}_n(r), \quad r \in \Omega_v \quad (5)$$

$$\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(r)}{\partial n} = \frac{p(r)}{\bar{Z}(r)}, \quad r \in \Omega_z \quad (6)$$

$$\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(r)}{\partial n} = j\omega w(r), \quad r \in \Omega_s \quad (7)$$

其中 $\bar{p}(r)$ 为已知压力函数, $\bar{v}_n(r)$ 为已知法向速度函数和 $\bar{Z}(r)$ 为已知法向阻尼函数.

结构固支边界条件为:

$$w(0) = w(L) = \frac{dw(0)}{dx'} = \frac{dw(L)}{dx'} = 0 \quad (8)$$

因为薄壁结构只有在低频和中频范围内结构与声耦合效应最明显. 对于这种情况, 剪切变形和转动

惯性在板弯曲运动中都可以忽略, 所以可以采用 Kirchhoff 板理论而不采用更一般的 Mindlin 板理论.

1.2 场变量展开式

全场定义的基函数 Φ_a 的线性组合作为压力精确解 $p(x, y)$ 的近似值 $\hat{p}(x, y)$

$$p(x, y) \approx \hat{p}(x, y) = \sum_{a=1}^{n_a} p_a \Phi_a(x, y) = \Phi(x, y) \mathbf{p} \quad (9)$$

其中向量 $\mathbf{p} (n_a \times 1)$ 中的 p_a 表示声波函数的未知系数. 矩阵 $\Phi (1 \times n_a)$ 中的每个函数 $\Phi_a(x, y)$ 都是满足齐次 Helmholtz 方程 (1) 的声波函数. 波函数的选择在文献 [8] 中已经给出.

稳态板的位移 $w(x')$ 利用解的展开式 $\hat{w}(x')$ 近似

$$w(x') \approx \hat{w}(x') = \sum_{s=1}^4 w_s \Psi_s(x') + \sum_{a=1}^{n_a} p_a \hat{w}_a(x') + \hat{w}_F(x') = \Psi \mathbf{w} + \hat{\mathbf{w}} \mathbf{p} + \hat{w}_F(x') \quad (10)$$

向量 $\mathbf{w} (4 \times 1)$ 中 w_s 的表示结构波函数的未知系数. 矩阵 $\Psi (1 \times 4)$ 中的四个结构波函数 $\Psi_s(x')$ 为四阶板动力学方程 (3) 的四个线性独立齐次解

$$\Psi_s(x') = \exp(-j^s k_b x'), (s=1 \cdots 4) \quad (11)$$

函数 $\hat{w}_F(x')$ 为非齐次方程 (2) 在力 F 作用时的特解函数

$$\hat{w}_F(x') = \frac{-jF}{4Dk_b^3} (\exp(-jk_b |x' - x'_F|) - j \exp(-k_b |x' - x'_F|)) \quad (12)$$

矩阵 $\hat{\mathbf{w}} (1 \times n_a)$ 中的每个函数 $\hat{w}_a(x')$ 是非齐次方程 (2) 在声压力载荷下的特解. 在这个分布压力的激励下, 无限大板的位移可以用特解函数表示

$$\hat{w}_a(x') = \frac{\Phi_a(x_0 + x' \cos \alpha, y_0 + x' \sin \alpha)}{D[(k_{a,x} \cos \alpha + k_{a,y} \sin \alpha)^4 - k_b^4]} \quad (13)$$

从上面的定义可以得出结论: 不管声和结构波函数的系数 p_a 和 w_s 值为多少, 结构位移的展开式 (10) 都精确满足板的控制方程 (2).

2 耦合结构与声模型

既然场变量展开式 (9) 和 (10) 优先满足控制动力学方程 (1) 和 (3), 那么声学 and 结构波函数的系数 p_a 和 w_s 仅仅由边界条件决定. 在数值计算中边界条件采用近似的满足.

对于二维声问题, 只有声学边界条件要转换成近似积分公式, 而结构边界条件能够精确的满足.

2.1 声学边界条件

对于边界条件, 可以通过加权余量法在积分意

以上强制满足,得到加权余量公式表达式

$$\int_{\Omega_p} \frac{-j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} (\hat{p} - \bar{p}) d\Omega + \int_{\Omega_s} \tilde{p} \left(\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} - \bar{v}_n \right) d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{p} \left(\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} - \frac{\hat{p}}{Z} \right) d\Omega + \int_{\Omega_s} \tilde{p} \left(\frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} - j\omega \hat{w} \right) d\Omega = 0 \quad (14)$$

类似在 Galerkin 加权程序中的方法,加权函数 \tilde{p} 是声波函数 Φ_a 的线性组合

$$\tilde{p}(x, y) = \sum_{a=1}^{n_a} \tilde{p}_a \Phi_a(x, y) = \Phi \tilde{p} \quad (15)$$

将场变量展开式(9)和(10)和加权函数(15)代入加权余量公式(14)得到

$$\tilde{p}^T [(A_{aa} + C_{aa})p + C_{as}w - f_a] = 0 \quad (16)$$

其中 T 表示转置.

矩阵 A_{aa} ($n_a \times n_a$) 定义为

$$A_{aa} = \int_{\Omega_p + \Omega_s + \Omega} \frac{j}{\rho_0 \omega} \Phi^T \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Omega - \int_{\Omega_p} \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial n} \Phi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{Z} \Phi^T \Phi d\Omega \quad (17)$$

矩阵 C_{aa} ($n_a \times n_a$) 定义为

$$C_{aa} = - \int_{\Omega_s} j\omega \Phi^T \hat{w} d\Omega \quad (18)$$

矩阵 C_{as} ($n_a \times 4$) 定义为

$$C_{as} = - \int_{\Omega_s} j\omega \Phi^T \Psi d\Omega \quad (19)$$

向量 f_a ($n_a \times 1$) 定义为

$$f_a = \int_{\Omega_s} j\omega \Phi^T \hat{w}_F d\Omega \quad (20)$$

既然加权余量公式对任意的加权函数 \tilde{p} 都成立,那么方程(16)中方括号内的表达式为零. 这得到 n_a 个代数方程和 $4 + n_a$ 个未知波函数系数 w_s 和 p_a .

$$[C_{as} \quad A_{aa} + C_{aa}] \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix} = f_a \quad (21)$$

2.2 结构边界条件

方程(8)的四种结构边界条件定义在离散位置. 将场变量(9)和(10)代入边界条件得到下列结构边界条件的矩阵格式

$$[A_{ss} \quad C_{sa}] \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix} = f_s \quad (22)$$

矩阵 A_{ss} (4×4) 由结构边界条件中的微分算子作用结构波函数矩阵 Ψ_s 得到.

$$A_{ss} = [\Psi_s(0) \quad \Psi_s(L) \quad \frac{d\Psi_s(0)}{dx'} \quad \frac{d\Psi_s(L)}{dx'}]^T \quad (23)$$

耦合矩阵 C_{sa} ($4 \times n_a$) 由结构边界条件中的微分算子作用特解函数 ($1 \times n_a$) 得到

$$C_{sa} = [\hat{w}_a(0) \quad \hat{w}_a(L) \quad \frac{d\hat{w}_a(0)}{dx'} \quad \frac{d\hat{w}_a(L)}{dx'}]^T \quad (24)$$

向量 f_s (4×1) 由结构边界条件中的微分算子作用在特解函数得到

$$f_s = \left\{ -\hat{w}_F(0) \quad -\hat{w}_F(L) \quad -\frac{d\hat{w}_F(0)}{dx'} \quad -\frac{d\hat{w}_F(L)}{dx'} \right\}^T \quad (25)$$

2.3 耦合结构与声模型

联合结构边界条件(22)和声边界条件的加权余量公式(21)得到耦合结构与声模型

$$\begin{bmatrix} A_{ss} & C_{sa} \\ C_{as} & A_{aa} + C_{aa} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s \\ f_a \end{pmatrix} \quad (26)$$

求解上式中未知波函数系数 w_s 和 p_a , 然后代入展开式(9)和(10)即得到耦合结构与声系统的响应预报.

3 算例

如图2所示为结构与声耦合系统. 域的特征尺寸为 $L_x = 1.5\text{m}$, $L_y = 1.0\text{m}$. 声腔中充满空气, 密度 $\rho_a = 1.225\text{kg/m}^3$, 声速 $c = 340\text{m/s}$. 其中在 $x = 0\text{m}$ 的边附有法向阻尼为 Z 的绝缘材料, 另一边为铝板: 泊松比 $\nu = 0.3$, 弹性模量 $E = 90 \times 10^9\text{N/m}^2$, 密度 $\rho_s = 2790\text{kg/m}^3$, 材料损耗因子 $\eta = 0$, 厚度 $t = 2 \times 10^{-3}\text{m}$, 长度 $L = 0.75\text{m}$. 其余边界条件为刚性壁 $\bar{v} = 0\text{m/s}$. 点 $x'0 = 0.5\text{m}$ 作用单位力 F .

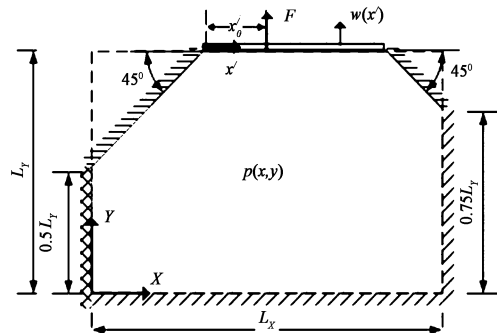


图2 结构与声耦合系统

Fig.2 Coupled structural acoustic system

计算了两种情况:

* 假设法向阻尼 Z 为无穷大(即刚性壁), 采用4个结构和150个声波函数 ($n_{a1} = 44$, $n_{a2} = 29$), 计算频率为200Hz.

* 假设法向阻尼 $Z = \rho_a c (1 - 2j)\text{kg/m}^2\text{s}$, 采用

4 个结构和 300 个声波函数 ($n_{a1} = 89, n_{a2} = 59$), 计算频率为 1000Hz.

图 3 和 4 为第一种情况的计算结果. 图 3 为板的法向位移和耦合界面上流体的法向位移的实部; 图 4 为声腔压力的实部的分布. 两个图中都没有虚部, 因为结构和声没有阻尼.

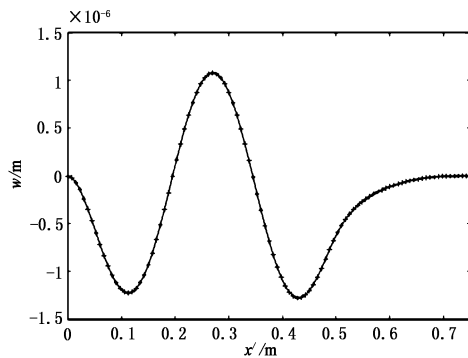


图 3 200Hz 时板的法向位移 (-) 和耦合界面上流体的法向位移 (+)

Fig. 3 Real part of the normal plate displacement (-) and the normal fluid displacement (+) along the coupling interface at 200 Hz

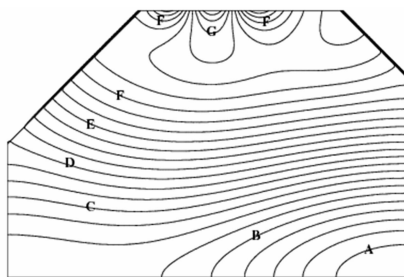


图 4 200Hz 时声腔的压力实部的分布

Fig. 4 Contour plot of the real part of the cavity pressure at 200 Hz (A = -0.3, B = -0.2, C = -0.1, D = 0.0, E = 0.1, F = 0.2, G = 0.3)

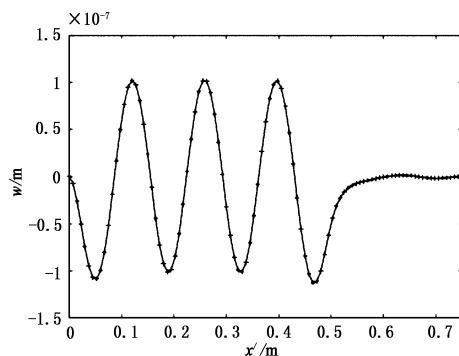


图 5 1000Hz 时板的位移 (-) 和耦合界面上流体的法向位移 (+)
Fig. 5 Real part of the normal plate displacement (-) and the normal fluid displacement (+) along the coupling interface at 1000 Hz

图 3 可以看出计算结果满足板的固支边界条件以及流固耦合界面上法向位移连续条件. 图 4 可以看出压力等高线垂直于声腔的刚性壁部分, 也就

是在这些边界上没有法向压力梯度, 即满足法向速度为零的边界条件.

图 5 和 6 为第二种情况的计算结果. 图 5 为板的法向位移的实部; 图 6 为声腔压力的实部的分布.

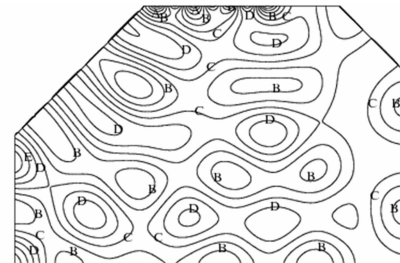


图 6 1000Hz 时声腔的压力实部的分布

Fig. 6 Contour plot of the real part of the cavity pressure at 1000 Hz (A = -0.12, B = -0.06, C = 0, D = 0.06, E = 0.12)



图 7 1000Hz 时声腔的压力虚部的分布

Fig. 7 Contour plot of the imaginary part of the cavity pressure at 1000 Hz (A = -0.12, B = -0.06, C = 0, D = 0.06, E = 0.12)

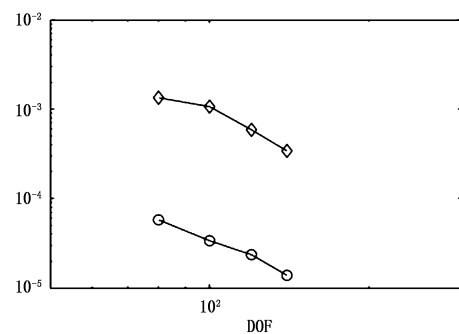


图 8 200Hz 时板位移 (○) 和压力 (◇) 的收敛曲线
Fig. 8 Structural (○) and acoustic (◇) convergence curves at 200 Hz

从以上图中可看出计算结果都满足边界条件. 图 8 为 $x' = 0.30\text{m}$ 处板法向位移与 $(0.75\text{m}, 0.25\text{m})$ 处压力的收敛曲线. 从图中看出 WB 法具有较好的收敛性.

4 结论

本文讨论了一种新的基于 Trefftz 建模方法的 WB 法. 整个域内的场变量 (结构的位移或者声压)

由精确满足动力学方程齐次部分的波函数和非齐次动力学方程的特解函数组成. 这样连续域场变量分布的确定转化为确定波函数分布的离散问题. 既然后者的展开式优先满足控制动力学方程, 波函数的分布仅仅由声和结构边界条件确定, 可以转换成加权余量或者最小二乘格式. WB法允许引入 Trefftz 建模方法到耦合结构与声模型, 这样即使较差的数值条件也不会影响数值结果收敛于精确解.

本文描述了二维耦合振动声系统建模技术的基本概念. 计算了板与非规则声腔的耦合振动, 边界条件考虑了法向速度和阻尼情况. 因为该方法的误差主要来自边界条件的积分, 从计算结果可以得知: 板和声场是满足边界条件的, 也可证明计算结果是收敛的. 算例表明这种预报技术计算量小而精度高, 因此可为中频振动分析提供了一种新的研究思路.

参 考 文 献

- 1 Zienkiewicz O C, Taylor R L, Zhu J Z et al. The finite element method - the three volume set (6th ed.). Butterworth-Heinemann, 2005
- 2 Von Estorff O. Boundary elements in acoustics: Advances and Applications. WITpress, 2000
- 3 Astley R J. Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 49: 951 ~ 976
- 4 Deraemaeker, Babuska I, Ph. Bouillard. Dispersion and pollution of the FEM solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 471 ~ 499
- 5 Kita E, Kamiya N. Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering Software*, 1995, 24: 3 ~ 12
- 6 Masson P, Redon E, Priou J P et al. The application of the Trefftz method to acoustics. In: Crocker M, editor. Proceedings of the Third International Congress on Air- and Structure-borne Sound and Vibration, Montreal, 1994, 1809 ~ 1816
- 7 Desmet W. A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis. Ph. D. dissertation, K. U. Leuven, 1998
- 8 彭伟才, 何程. WB法在多域声学分析中的应用. *动力学与控制学报*, 2006, 4(3): 278 ~ 283 (Peng Weicai, He Zeng. Wave based method for multi-domain acoustic analysis. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(3): 278 ~ 283 (in Chinese))

APPLICATION OF WAVE BASED METHOD TO COUPLED STRUCTURAL -ACOUSTIC ANALYSIS

Peng Weicai He Zeng Huang Fei

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract This paper described the basic concept of the technique for the modeling of coupled vibro-acoustic system. According to the principle of WB method, the structural and acoustic domains were approximated in terms of wave functions and particular solutions. The acoustical and structural boundary conditions, and the continuity of the normal fluid and structural displacements along the coupling interface, were transformed into a weighted residual formulation, which resulted in a set of algebraic equations represented by the wave model. Solving the model for the unknown wave function contributions and back-substituting the results into the expansions yielded the prediction of the dynamic response of the coupled vibro-acoustic system. It was illustrated through a two dimensional validation example that the new prediction technique yielded a high accuracy with a substantially smaller computational effort, so that the new prediction technique could be applied to mid-frequency analysis.

Key words mid-frequency analysis, coupled vibro-acoustic, Trefftz method, numerical prediction technique