

单自由度不确定滞回系统振动响应的区间分析方法

邱志平 顾笑冬 李登峰

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

摘要 利用区间理论并结合求解不确定非线性结构动力学响应的泰勒方法的二阶展开, 推导出求解由滞回环本身的不确定性引起的、单自由度不确定滞回系统响应的有效数值方法, 得到了系统响应的上下界. 并与概率分析方法求得的系统响应进行比较分析, 其计算结果与概率方法结果基本相吻合. 当求解由滞回环本身的不确定性引起的非线性振动系统的不确定响应问题, 而滞回环本身的不确定性统计信息较少概率方法无法适用时, 利用本文所推导的区间方法可为工程实际提供参考.

关键词 不确定非线性系统, 不确定滞回系统, 非线性不确定振动, 区间分析

引言

许多工程实际系统由于大幅变形而进入非线性状态, 由于非线性而呈现出滞回性态, 在周期运动中导致正向运动与反向运动时的恢复力-位移曲线形成滞回环. 其效应主要表现为刚度的减少和能量耗散的增加, 呈现出复杂的非线性. 系统的瞬时恢复力不仅依赖于该瞬时的位移, 而且取决于该瞬时的速度方向, 使得力方程中出现了多值函数, 从而给系统的响应分析带来了极大的困难. 在研究不确定^[1]滞回系统领域, 人们大多针对激励的不确定性, 大体上可分为等效线性化方法、一般等效线性化方法、功率平均法、标准随机平均法等. 这些研究都没有给出由于滞回环本身的不确定性而引起的非线性不确定振动系统的响应, 但由于材料性态的不确定性, 必然导致不确定滞回系统的非线性不确定振动模型, 大量的工程实验得出的结论也证明了滞回环本身存在着明显的不确定性. 用概率的方法处理这种不确定性引起的响应的不确定性的时候, 概率方法本身所要求的样本统计信息量比较大, 在工程实际中求得滞回环本身的样本信息成本又比较高, 出于这方面的考虑, 人们希望能寻找一种更为经济实用的方法处理类似的问题, 本文所提出的区间处理方法就是基于以上的考虑, 在已知滞回环本身不确定因子的区间中点和半径的前提下, 推导求得不确定响应的区间分布, 这在工程实际中显然比采用大量实验所得

到的样本统计信息要经济得多. 为了证明本方法的切实可行性, 文中证明了区间方法所得到的不确定响应的范围包含了概率方法所得到的不确定响应范围, 数值算例很好的证明了这一点.

1 非线性滞回模型的具体表述

单自由度不确定滞回系统的运动微分方程通常可以表示为如下的形式:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz(b, x, \dot{x}, t) = F(t) \quad (1)$$

初始条件为

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (2)$$

式中 m 为系统的质量; c 为系统的阻尼; k 为系统的初始刚度; α 为屈服后与屈服前系统刚度的比值; x, \dot{x}, \ddot{x} 分别为系统的位移、速度、加速度; $F(t)$ 为系统所受的外界激励; $z(b, x, \dot{x}, t)$ 为系统的非线性滞回力, 非线性滞回力的模型可以表达式为

$$\dot{z} = -r|\dot{x}|z|z|^{n-1} - \beta\dot{x}|z|^n + A\dot{x} \quad (3)$$

式中 γ, β, A, n 是滞回环参数, 其中 α, β 控制滞回环的形状, A 控制滞回环的幅值, n 控制滞回环曲线的光滑性; $b = (b_i)_s$ 为 s 阶的不确定参数向量, 其中可以包含不确定载荷参数和不确定结构参数, 这里取用以描述滞回环的参数 (γ, β, A) 为不确定参数, 其不确定参数向量为 $b = \{\gamma, \beta, A\}^T$, 在式(3)中取 $n = 1$ 时可简化模型的非线性滞回力为

$$\dot{z} = -r|\dot{x}|z - \beta\dot{x}|z| + A\dot{x} \quad (4)$$

为了给出非线性滞回力的具体函数表达式, 根

据滞回力 z 和速度 \dot{x} 的不同取值分四种情况展开如下:

$$\dot{z} = \begin{cases} [A - (\gamma + \beta)z] \dot{x} & \dot{x} \geq 0, z \geq 0 \\ [A - (\gamma - \beta)z] \dot{x} & \dot{x} \geq 0, z \leq 0 \\ [A + (\gamma - \beta)z] \dot{x} & \dot{x} \leq 0, z \geq 0 \\ [A + (\gamma + \beta)z] \dot{x} & \dot{x} \leq 0, z \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

由上式得到滞回力 z 和系统位移 x 的微分表达式

$$\frac{dz}{dx} = \begin{cases} A - (\gamma + \beta)z & \dot{x} \geq 0, z \geq 0 \\ A - (\gamma - \beta)z & \dot{x} \geq 0, z \leq 0 \\ A + (\gamma - \beta)z & \dot{x} \leq 0, z \geq 0 \\ A + (\gamma + \beta)z & \dot{x} \leq 0, z \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

对上式积分即可得到滞回力 z 和系统位移 x 的函数关系式,根据 (γ, β) 的不同关系分三种情况讨论如下.

(1) $\gamma \neq \pm\beta$ 时

$$z(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma + \beta} [A - e^{-(\gamma + \beta)(x + x_0)}] & \dot{x} \geq 0, z \geq 0 \\ \frac{1}{\gamma - \beta} [A - e^{-(\gamma - \beta)(x + x_0)}] & \dot{x} \geq 0, z \leq 0 \\ \frac{1}{\gamma - \beta} [e^{-(\gamma + \beta)(x + x_0)} - A] & \dot{x} \leq 0, z \geq 0 \\ \frac{1}{\gamma + \beta} [e^{(\gamma + \beta)(x - x_0)} - A] & \dot{x} \leq 0, z \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中 x_0 为滞回环曲线与横轴的交点,其值可由反对称性 $z(a) = -z(-a)$ 得出, a 为预先给定的系统响应的位移最大幅值.取速度大于零时,由滞回力 z 和系统位移 x 的函数关系的两个表达式得

$$z(a) = \frac{1}{\gamma + \beta} [A - e^{-(\gamma + \beta)(a + x_0)}] \quad (8)$$

$$z(-a) = \frac{1}{\gamma - \beta} [A - e^{-(\gamma - \beta)(-a + x_0)}] \quad (9)$$

由以上两式即可得到 x_0 应满足的方程为

$$(\gamma + \beta)e^{-(\gamma - \beta)(-a + x_0)} + (\gamma - \beta)e^{-(\gamma + \beta)(a + x_0)} - 2A\gamma = 0 \quad (10)$$

解以上非线性方程即可得到 x_0 的数值解.

(2) $\gamma = -\beta$ 时

$$z(x) = \begin{cases} A(x + x_0) & \dot{x} \geq 0, z \geq 0 \\ \frac{1}{\gamma - \beta} [A - e^{-(\gamma - \beta)(x + x_0)}] & \dot{x} \geq 0, z \leq 0 \\ \frac{1}{\gamma - \beta} [e^{(\gamma - \beta)(x - x_0)} - A] & \dot{x} \leq 0, z \geq 0 \\ A(x - x_0) & \dot{x} \leq 0, z \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

根据情况(1)类似的处理方法可得到 x_0 应满足的方程为

$$e^{-(\gamma - \beta)(-a + x_0)} - 2A(\gamma - \beta)(a + x_0) - A = 0 \quad (12)$$

式中 a 为预先给定的系统响应位移最大幅值,解以上非线性方程即可得到 x_0 的数值解.

(3) $\gamma = \beta$ 时

$$z(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma + \beta} [A - e^{-(\gamma + \beta)(x + x_0)}] & \dot{x} \geq 0, z \geq 0 \\ A(x + x_0) & \dot{x} \geq 0, z \leq 0 \\ A(x - x_0) & \dot{x} \leq 0, z \geq 0 \\ \frac{1}{\gamma + \beta} [e^{(\gamma + \beta)(x - x_0)} - A] & \dot{x} \leq 0, z \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

根据情况(1)类似的处理方法可得到应满足的方程为

$$e^{-(\gamma + \beta)(a + x_0)} + A(\gamma + \beta)(a - x_0) - A = 0 \quad (14)$$

式中 a 为预先给定的系统响应位移最大幅值,解以上非线性方程即可得到 x_0 的数值解.

2 概率分析方法

对于单自由度不确定滞回系统(1),假定不确定参数 b 为随机参数,动态响应 x 为随机变量^[2],则随机变量(过程) x 为随机参数 b 的函数,即 $x = x(b)$,定义 $\mu = E(x) = \bar{x}, \sigma^2 = E(x - \bar{x})^2 = Var(x)$ 分别代表 x 的均值和方差.取二阶均值和一阶方差,有

$$E(x) = x(E(b)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i \partial b_j} Cov(b_i, b_j) \quad (15)$$

$$Var(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_j} \right) Cov(b_i, b_j) \quad (16)$$

式中 $\partial \bar{x} / \partial b_i = \partial x / \partial b_i |_{b=\bar{b}}, \partial^2 \bar{x} / \partial b_i \partial b_j = \partial^2 x / \partial b_i \partial b_j |_{b=\bar{b}}$.假设随机参数是相互独立的,以上两式推导为

$$E(x) = x(E(b)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} Var(b_i) \quad (17)$$

$$Var(x) = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} \right)^2 Var(b_i) \quad (18)$$

由以上两式可知,在求动态响应的均值和方差的时候,涉及到响应的一阶灵敏度和二阶灵敏度^[3],因此,将方程(1)两边在 $E(b)$ 附近展开成二阶 Taylor 表达式^[4],然后合并同阶项,可得到与方程(1)相一致的零阶、一阶和二阶方程

零阶方程

$$m\bar{\ddot{x}} + c\bar{\dot{x}} + \alpha k\bar{x} + (1 - \alpha)k\bar{z} = \bar{F}(t) \quad (19)$$

一阶方程

$$m \frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} + c \frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} + \alpha k \frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} = \frac{\partial \bar{F}(t)}{\partial b_i} - (1 - \alpha)k \frac{\partial \bar{z}}{\partial b_i} \quad (20)$$

二阶方程

$$m \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} + c \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} + \alpha k \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} = \frac{\partial^2 \bar{F}(t)}{\partial b_i^2} - (1 - \alpha)k \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial b_i^2} \quad (21)$$

利用非线性滞回力的具体表达式,代入以上各方程求解,即可得到相应的灵敏度的数值解.从而求得动态响应的均值和方差.

3 区间分析方法

假定不确定参数 b 的上界和下界是给定的,根据区间数学定义,则可得到动态响应区间如下:

$$x^I(b, t) = [x_-(b, t), x_+(b, t)] \quad (22)$$

其中 $x_-(b, t)$, $x_+(b, t)$ 分别代表动态响应区间的下界与上界.

对于不确定参数因子 b , 定义区间中心为:

$$b^c = (b_i^c) = m(b^I) = \left(\frac{b + \bar{b}}{2} \right)$$

$$b_i^c = m(b_i^I) = \left(\frac{b_i + \bar{b}_i}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (23)$$

区间半径为:

$$\Delta b = \text{rad}(b^I) = \frac{(\bar{b} - b)}{2} \quad (24)$$

因此,不确定参数因子的区间^[5]可以表示为

$$b^I = [b_-, \bar{b}] = [b^c - \Delta b, b^c + \Delta b] \quad (25)$$

将 $x(b, t)$ 以二阶 Taylor 级数^[6]展开得:

$$x(b, t) = x(b^c + \delta, t) = x(b^c, t) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial x(b^c, t)}{\partial b_i} \delta b_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 x(b^c, t)}{\partial b_i \partial b_j} \delta b_i \delta b_j \quad (26)$$

其中, $\delta b_i \in \Delta b_i^I = [-\Delta b_i, \Delta b_i]$

$$\frac{\partial x(b^c, t)}{\partial b_i} = \frac{\partial x(b, t)}{\partial b_i} \Big|_{b=b^c}, \quad \frac{\partial^2 x(b^c, t)}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{\partial^2 x(b, t)}{\partial b_i \partial b_j} \Big|_{b=b^c}$$

根据区间数学中区间扩张^[7]的思想,得到结构动态响应的区间为:

$$x^I(b, t) = x(b^c, t) + \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial x(b^c, t)}{\partial b_i} \right| \Delta b_i^I + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial^2 x(b^c, t)}{\partial b_i \partial b_j} \right| \Delta b_i^I \Delta b_j^I \quad (27)$$

其中上界和下界分别为

$$\bar{x}(b, t) = x(b^c, t) + \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial x(b^c, t)}{\partial b_i} \right| \Delta b_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial^2 x(b^c, t)}{\partial b_i \partial b_j} \right| \Delta b_i \Delta b_j \quad (28)$$

和

$$x_-(b, t) = x(b^c, t) - \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial x(b^c, t)}{\partial b_i} \right| \Delta b_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial^2 x(b^c, t)}{\partial b_i \partial b_j} \right| \Delta b_i \Delta b_j \quad (29)$$

由此得到用区间分析方法表示的结构动态响应的表达式.由以上两式可知,只要已知不确定参数的区间中心和半径,就能得到动态响应区间的上下界.

4 区间分析方法与概率分析方法的比较

根据概率论和数理统计理论可定义概率方法所得到的包含动态响应 x 取值的区间如下

$$x^I = [E(x) - k\sqrt{\text{Var}(x)}, E(x) + k\sqrt{\text{Var}(x)}] \quad (30)$$

将概率方法得到的动态响应的均值和方差的表达式(17)、(18)带入上式,可得

$$\bar{x}(b, t) = x(E(b), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} \text{Var}(b_i) + k \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} \right)^2 \text{Var}(b_i)} \quad (31)$$

$$x_-(b, t) = x(E(b), t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} \text{Var}(b_i) - k \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} \right)^2 \text{Var}(b_i)} \quad (32)$$

式中 k 为考虑到动态响应的概率分布情况的一个正整数. \bar{x} 为响应的上界, x_- 为响应的下界. 式(31)、(32)即为用概率方法所得到的不确定响应的上下界.

为了方便与概率分析方法的比较,假定我们在概率方法中通过样本试验得到不确定参数因子的均值与方差,用区间的表示方法,则不确定参数因子的取值可表示成如下的形式:

$$b^I = [d, \bar{b}] = [E(b) - k\sqrt{\text{Var}(b)}, E(b) + k\sqrt{\text{Var}(b)}] \quad (33)$$

代入区间方法所推导出的结构动态响应表达式(28)、(29)可得响应区间的上界和下界分别为

$$\bar{x}(b, t) = x(E(b), t) + \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial x(E(b), t)}{\partial b_i} \right| \sqrt{\text{Var}(b_i)} + \frac{1}{2} k^2 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial^2 x(E(b), t)}{\partial b_i \partial b_j} \right| \sqrt{\text{Var}(b_i) \text{Var}(b_j)} \quad (34)$$

和

$$\underline{x}(b,t) = x(E(b),t) - \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial x((E(b),t))}{\partial b_i} \right| \sqrt{Var(b_i)} - \frac{1}{2} k^2 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial^2 x(E(b),t)}{\partial b_i \partial b_j} \right| \sqrt{Var(b_i) Var(b_j)} \quad (35)$$

其中 $E(b)$ 为结构参数均值, $Var(b)$ 为其方差, k 为考虑到概率分布情况的一个正整数. 式(34)、(35)即为用区间方法所得到的不确定响应的上下界.

对于式(34)、(35), 为了求得 $\frac{\partial x^2(E(b),t)}{\partial b_i \partial b_j}$, 可

对方程(1)两边分别求偏导. 可得如下方程

$$m \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i \partial b_j} + c \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i \partial b_j} + \alpha k \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{\partial^2 \bar{F}(t)}{\partial b_i \partial b_j} - (1 - \alpha) k \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial b_i \partial b_j} \quad (36)$$

求解以上微分方程即可得到相应的 $\frac{\partial x^2(E(b),t)}{\partial b_i \partial b_j}$.

比较区间方法的上下界(34)、(35)与概率方法的上下界(31)、(32), 显然有以下不等式成立

$$k \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial x((E(b),t))}{\partial b_i} \right| \sqrt{Var(b_i)} \geq k \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial b_i} \right)^2 Var(b_i)}$$

$$\frac{1}{2} k^2 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial^2 x(E(b),t)}{\partial b_i \partial b_j} \right| \sqrt{Var(b_i) Var(b_j)} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial b_i^2} Var(b_i)$$

由此可知区间分析方法得到的响应范围要比概率分析方法得到的响应范围大. 即区间分析方法的结果包含了概率分析方法的分析结果.

5 数值算例

对于不确定参数 b , 在概率方法中假定为随机参数, 用样本试验测得的向量 $b \{ \gamma, \beta, A \}$ 的前两阶矩分别为 $E(\gamma) = 0.1, \sigma_\gamma = 0.005E(\gamma), E(\beta) = 0.9, \sigma_\beta = 0.005E(\beta), E(A) = 2.0, \sigma_A = 0.005E(A)$; 系统的质量 $m = 1.0\text{kg}$, 取无阻尼状态, 初始刚度 $k = 100\text{N/m}$, 屈服后与屈服前的刚度比值 $\alpha = 0.05$, 外界激励 $F(t) = 500\sin(10\pi t)$.

应用本文所提到的方法结合相应的数值方法^[8] 计算系统相应的位移随时间变化的均值曲线和标准差曲线, 如图1和图2

不确定响应区间分析方法和概率分析方法的

比较如图3

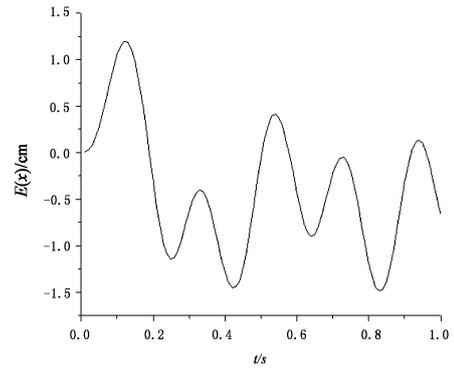


图1 位移均值曲线

Fig.1 Displacement Mean Value

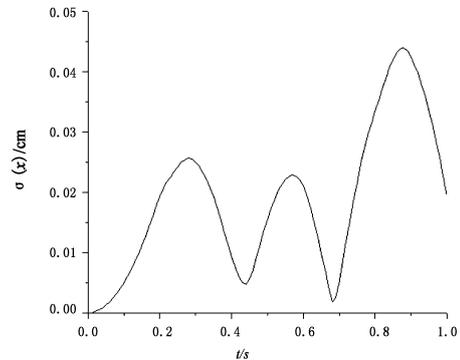


图2 位移标准差曲线

Fig.2 Displacement Standard Deviation

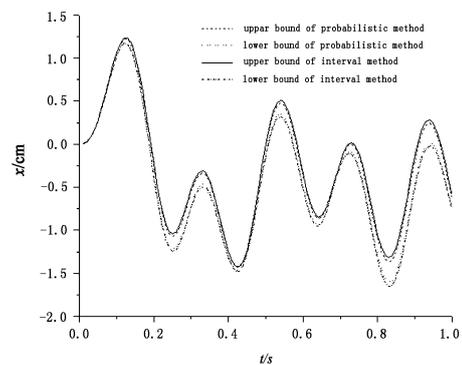


图3 区间分析方法与概率方法的比较

Fig.3 Comparison between Interval Analysis Method and Probabilistic Method

由上图可见, 区间方法求解的上下界包含了用概率方法求解的上下界, 与理论推导吻合得很好, 并且区间上下界与概率的上下界彼此很接近, 再次表明了本文所推导的区间分析方法具有其本身的工程实际意义.

6 结论

非线性振动是当今力学中一个重要的研究方

向,滞回系统又是非线性振动领域中的一种典型模型,在研究不确定滞回系统领域,人们大多针对激励的不确定性,这些研究都没有给出由于滞回环本身的不确定性而引起的非线性不确定振动系统的响应,而用传统的概率方法对样本的要求很高,当滞回环本身的不确定性统计信息较少概率方法无法适用时,求解系统的不确定响应就成了一个严峻的问题.本文针对滞回环本身的不确定性,利用区间理论并结合求解不确定非线性结构动力学响应的泰勒方法的二阶展开,推导出单自由度不确定滞回系统振动响应的区间求解方法,并与传统的概率分析方法比较,证明了本文提出的区间分析方法是一种实用有效的数值方法.

参 考 文 献

- 1 张圣坤. 不确定性问题的有限元方法及其应用. 固体力学学报,1987,(3):277~281 (Zhang Shengkun. Finite element method and application for uncertain problem. *Acta Mechanica Sinica*,1987,(3):277~281 (in Chinese))
- 2 朱位秋. 随机振动. 北京:科学出版社,1992 (Zhu Weiqiu. Random vibration. Beijing:Science Press,1992 (in Chinese))
- 3 张义民,闻邦椿,刘巧伶. 动力响应灵敏度分析中的长期项消除. 振动工程学报,1998,11(4):462~466 (Zhang Yimin, Wen Bangchun, Liu Qiaoling. Avoid of secular term of sensitivity analysis for dynamic response. *Journal of Vibration Engineering*,1998,11(4):462~466 (in Chinese))
- 4 张义民,刘巧伶,闻邦椿. 多自由度非线性随机参数振动系统响应分析的概率摄动有限元法. 计算固体力学学报,2003,2:8~11 (Zhang Yimin, Liu Qiaoling, Wen Bangchun. Probability perturbation finite element method for response analysis of multi-degree-of-freedom nonlinear vibration systems with random parameters. *Journal of Computational Solid Mechanics*,2003,2:8~11 (in Chinese))
- 5 邱志平,顾元宪. 有界不确定参数结构位移范围的区间摄动法. 应用力学学报,1998,8:255~258 (Qiu Zhiping, Gu Yuanxian. Perturbation methods for evaluating the bounds on displacements of structures with uncertain but bounded parameters. *Applied Mechanics Journal*,1998,8:255~258 (in Chinese))
- 6 Qiu Z P, Chen S H, and Song D T. The displacement bound estimation for structures with an interval description of uncertain parameters. *Communications in Numerical Methods in Engineering*,1995,12(1):1~12
- 7 Moore, R E. Methods and applications of interval analysis. Prentice-hall. Inc. London:1979
- 8 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法. 北京:清华大学出版社,1997 (Wang Xucheng, Shao min. Basic principle of finite element method and numerical method. Beijing:Tsinghua publishing press,1997 (in Chinese))

VIBRATION ANALYSIS ON UNCERTAIN SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM HYSTERETIC SYSTEM USING INTERVAL ANALYSIS METHOD

Qiu Zhiping Gu Xiaodong Li Dengfeng

(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract Combining the interval theory with the second order expansion of Taylor method for solving uncertain non-linear structure dynamics, we derived an effective numerical method to solve Uncertain Single-Degree-of-Freedom Hysteretic System, whose uncertainty was caused by the stochastic hysteretic loop itself, and obtained the upper boundary and the lower boundary of the response. The result of the proposed method was close to that obtained by probabilistic approach. When the uncertainty of non-linear vibration systems is caused by the stochastic hysteretic loop itself, and the uncertain statistics information of the stochastic hysteretic loop itself is so little that the probabilistic approach is unsuitable, the proposed method can still provide reference for the engineering.

Key words uncertain non-linear systems, uncertain stochastic hysteretic system, uncertain non-linear vibration, interval analysis