

# 一类非线性切换系统输出与扰动的解耦\*

向伟铭 向峥嵘

(南京理工大学自动化学院, 南京 210094)

**摘要** 研究了一类单输入单输出非线性切换系统输出与扰动的完全解耦的可解性问题, 提出了此类非线性切换系统输出与扰动的完全解耦的充要条件, 并进一步给出了干扰可测并且能够用于反馈控制律的设计的情况下系统输出与扰动的完全解耦的条件. 最后给出了仿真实例说明了本文结果的有效性.

**关键词** 非线性切换系统, 输出扰动解耦, 状态反馈

## 引言

切换系统是一类重要的混杂系统, 是指由一组连续或离散动态子系统组成, 并按某种切换规则在各子系统间切换的动力系统<sup>[1]</sup>. 切换系统的稳定性研究是切换系统研究的一个重要方面, 而目前的主要的成果是关于线性切换系统, 并且已经渐成体系<sup>[2][3][4][5]</sup>. 非线性切换系统的研究成果还比较少, 文献[6]给出了一类具有三角特殊形式的非线性切换系统的二次稳定充分条件. 文献[7]在各子系统具有相同相关度和由此导出的坐标变换相同的假设下, 研究了非线性切换系统的镇定问题. 文献[8]提出了单输入单输出非线性切换系统一致标准形的概念, 并且研究具有一致标准形的非线性切换系统的镇定问题. 文献[9]研究了具有饱和执行器的切换系统的控制. 文献[10]对二阶切换系统的滑动模态进行了分析.

关于非线性切换系统的输出与扰动之间的解耦问题的研究的成果还未见到. 本文研究了一类单输入单输出非线性切换系统的输出与扰动解耦问题, 给出了该类非线性切换系统输出与扰动完全解耦的充要条件, 然后研究了在干扰可测并且能够用于反馈控制律设计的情况下, 给出了输出与扰动完全解耦的充要条件. 最后给出了仿真例子说明了本文结果的有效性.

## 1 问题的描述与预备知识

考虑由以下个子系统组成的非线性切换系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_i(x) + g_i(x)u_i + p_i(x)w_i \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$  是状态变量,  $u_i \in R, f_i, g_i (i = 1, 2, \dots, N)$  为光滑向量场, 并假设  $f_i(x)$  的平衡点为  $x_0 = 0, h(x)$  为光滑标量函数,  $w_i$  表示每个子系统的外部输入或扰动.

本文研究的问题是如何确保系统(1)的输出响应不受影响状态扰动的干扰, 即系统的输出与扰动完全解耦的可解性问题.

**假设 1:**  $g_i(x), f_i(x) - f_j(x) \in (\text{span}\{dh, dL_{f_1}h, \dots, dL_{f_1}^{r-2}h\})^\perp, \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$

**假设 2:**  $L_{g_i}L_{f_1}^{r-2}h(x_0) \neq 0, i = 1, \dots, N$

## 2 主要结果

下面给出本文的主要结论:

**条件 1:**  $p_i(x) \in (\text{span}\{dh, dL_{f_1}h, \dots, dL_{f_1}^{r-2}h\})^\perp, i \in \{1, \dots, N\}$

**定理 1** 如果非线性切换系统(1)满足假设 1 - 2, 那么当且仅当条件 1 满足时, 能够找到局部定义在  $x_0$  附近的反馈  $u_i = \alpha_i(x) + \beta_i(x)v_i$ , 使得系统的输出与扰动解耦的问题是解可的.

**证明:** 充分性证明: 系统满足假设 1 可得,

$$L_{f_i}^k h(x) = L_{f_1}^k h(x), \forall i = 1, 2, \dots, N; 0 \leq k \leq r - 1$$

如果系统再满足假设 2, 则说明该切换系统各个子系统的相对度都为  $r$ , 且有一个公共坐标变换. 而且  $L_{p_i}L_{f_1}^k h(x) = L_{p_i}L_{f_i}^k h(x), \forall i = 1, 2, \dots, N; 0 \leq k \leq r - 1$

2006-07-04 收到第 1 稿, 2006-11-17 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(60474034)和 2007 年度南京理工大学科研发展基金

系统满足条件 1,就意味着以下等式成立:

$$L_{p_i} L_{f_i}^k h(x) = L_{p_i} L_{f_i}^k h(x) = 0, \text{对 } x_0 \text{ 附近的所有 } x$$

和所有的  $0 \leq k \leq r-1, \forall i=1,2,\dots,N$

因此,如果系统满足假设 1-2 并且满足条件 1;通过局部非线性坐标变换  $z = \Phi(x)$ , 满足在  $x_0$  处雅可比矩阵非奇异,其中

$$\begin{cases} z_1 = \phi_1(x) = h(x) \\ z_2 = \phi_2(x) = L_f h(x) \\ \dots \\ z_r = \phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \\ z_{r+1} = \phi_{r+1}(x) \\ \dots \\ z_n = \phi_n(x) \end{cases}$$

再令  $\xi = [z_1, \dots, z_r]^T, \eta = [z_{r+1}, \dots, z_n]^T$ , 系统(1)可变换成以下形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = b_i(\xi, \eta) + a_i(\xi, \eta) u_i \\ \dot{\eta} = q_i(\xi, \eta) + p_i(\xi, \eta) u_i + k_i(\xi, \eta) w_i \\ y = z_1 \end{cases} \quad (2)$$

选择如下状态反馈:  $u_i = -\frac{b_i(\xi, \eta)}{a_i(\xi, \eta)} + \frac{v_i}{a_i(\xi, \eta)}$ , 该

反馈产生如下系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = v_i \\ \dot{\eta} = q_i(\xi, \eta) + p_i(\xi, \eta) \left( \frac{v_i}{a_i(\xi, \eta)} - \frac{b_i(\xi, \eta)}{a_i(\xi, \eta)} \right) + k_i(\xi, \eta) w_i \\ y = z_1 \end{cases} \quad (3)$$

可以看到,系统的输出即状态变量  $z_1$  已经完全从扰动  $w_i$  解耦了.

必要性证明:设  $u_i = \alpha_i(x) + \beta_i(x) v_i$  为可以使系统输出与扰动解耦的任意反馈. 考虑闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_i(x) + g_i(x) \alpha_i(x) + g_i(x) \beta_i(x) v_i + p_i(x) w_i \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4)$$

由题设可得,当  $v_i = 0$  时,输出  $y(t)$

$$y^{(k)}(t) = L_{f_i+g_i \alpha_i}^k h(x(t)) + L_{p_i} L_{f_i+g_i \alpha_i}^{k-1} h(x(t)) w_i(t),$$

$$\forall i=1,2,\dots,N; 0 \leq k \leq r$$

要使得  $y(t)$  独立于  $w_i(t)$ , 必须使

$$L_{p_i} L_{f_i+g_i \alpha_i}^{k-1} h(x) = 0, \forall i=1,2,\dots,N; 0 \leq k \leq r$$

而由文献[11]知

$$L_{f_i+g_i \alpha_i}^{k-1} h(x) = L_{f_i}^k h(x), \forall i=1,2,\dots,N; 0 \leq k \leq r-1$$

又因为满足假设 1-2, 所以

$$L_{f_i}^k h(x) = L_{f_i}^k h(x), \forall i=1,2,\dots,N; 0 \leq k \leq r-1$$

因此  $L_{p_i} L_{f_i}^k h(x) = 0$ .

由于  $L_{p_i} L_{f_i}^k h(x) = \langle dL_{f_i}^k h(x), p(x) \rangle$ , 于是, 上述条件等价于

$$p_i(x) \in (\text{span} \{ dh, dL_{f_i} h, \dots, dL_{f_i}^{r-1} h \})^\perp$$

考虑在某些情况下扰动可以被测量, 并且可以将这些测量运用到控制律的设计中去, 系统的输出与扰动解耦问题的可解条件 1 可以进一步被减弱为如下条件 2.

$$\begin{aligned} \text{条件 2: } p_i(x) &\in (\text{span} \{ dh, dL_{f_i} h, \dots, dL_{f_i}^{r-2} h \})^\perp, \\ &i \in \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

对于扰动可以被测量这种情况, 有以下结果.

**定理 2:** 如果切换系统(1)中的扰动  $w_i(x)$  可测并用于反馈控制律设计, 系统(1)满足假设 1-2, 那么当且仅当满足条件 2 时, 能够找到局部定义在  $x_0$  附近的反馈  $u_i = \alpha_i(x) + \beta_i(x) v_i + \gamma_i(x) w_i$ , 使得系统的输出与扰动解耦的问题是解的.

**证明:** 考虑采用如下的一个控制:  $u_i = \alpha_i(x) + \beta_i(x) v_i + \gamma_i(x) w_i$ , 在满足假设 1-2 的情况下, 闭环系统为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_i(x) + g_i(x) \alpha_i(x) + g_i(x) \beta_i(x) v + \\ &\quad [g_i(x) \gamma_i(x) + p_i(x)] w_i \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (5)$$

由前面的论述可以知道, 输出扰动解耦的可解问题为需要寻找一组函数  $\gamma_i(x)$  来满足:

$$[g_i(x) \gamma_i(x) + p_i(x)] \in (\text{span} \{ dh, dL_{f_i} h, \dots, dL_{f_i}^{r-1} h \})^\perp$$

该条件等价于

$$\begin{aligned} 0 &= L_{g_i \gamma_i} L_{f_i}^k h(x) = L_{g_i} L_{f_i}^k h(x) \gamma_i(x) + L_{p_i} L_{f_i}^k h(x), \\ &0 \leq k \leq r-1 \end{aligned}$$

由相对度定义, 这个表达式等价于:

$$L_{p_i} L_{f_i}^k h(x) = 0, 0 \leq k \leq r-2 \quad (6)$$

$$L_{p_i} L_{f_i}^{r-1} h(x) = -L_{g_i} L_{f_i}^{r-1} h(x) \gamma_i(x) \quad (7)$$

因此只要选择  $\gamma_i(x) = -\frac{L_{p_i} L_{f_i}^{r-1} h(x)}{L_{g_i} L_{f_i}^{r-1} h(x)}$ , 总能满足式

(7). 借助扰动测量反馈, 切换系统(1)的输出扰动解耦问题的充要条件可以简化为式(7). 即

$$p_i(x) \in (\text{span}\{dh, dL_{f_1}h, \dots, dL_{f_1}^{r-2}h\})^\perp$$

说明 1: 定理 2 中的  $L_{p_i}L_{f_1}^k h(x) = 0$  对于所有直到  $r-2$  的  $k$  都必须成立, 但不必到  $r-1$ . 因此条件 2 要比条件 1 弱一些.

### 3 数值例子

在文献[8]给出的数值例子上加上扰动项  $p_i w_i, i=1, 2$ , 即考虑本文系统(1), 其中:

$$f_1 = \begin{bmatrix} -8x_1 + 21x_3 \\ 16x_1^2 - 42x_1x_3 + x_3x_4 \\ -2x_1 + 5x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix}; g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2x_1 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_1 = \frac{3}{t+1}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 9x_1 - 52x_3 \\ -17x_1^2 + 104x_1x_3 + x_2 \\ 3x_1 - 16x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix}; g_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; p_2 = \begin{bmatrix} 0.5x_3 \\ -x_1x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2 = \frac{9\sin(t)}{43t}$$

易证系统满足假设 1-2 和条件 1, 选择坐标变换  $z = \Phi(x) = [x_4, x_2 + x_1^2, x_3, x_1]$ ,  $\Phi(0) = 0$ , 其雅可比矩阵非奇异. 由文献[8]取  $u_1(z) = \frac{-z_1z_3 - 3z_1 - 4z_2}{2 + 2z_3}$ ,  $u_2(z) = \frac{-2z_1 - 4z_2}{2z_4^2 + 1}$ , 可将切换系统的 2 个子系统转化为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z_2 \\ \dot{x}_2 = -3z_1 - 4z_2 \\ \dot{x}_3 = 5z_3 - 2z_4 + \frac{-z_1z_3 - 3z_1 - 4z_2}{2 + 2z_3} + z_3w_1 \\ \dot{x}_4 = 21z_3 - 8z_4 + w_1 \\ y = z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 - 4z_2 \\ \dot{z}_3 = -16z_3 + 3z_4 + \frac{-2z_1 - 4z_2}{2z_4^2 + 1} + w_2 \\ \dot{z}_4 = -52z_3 + 9z_4 + \frac{-2z_1z_4 - 4z_2z_4}{2z_4^2 + 1} + 0.5z_3w_2 \\ y = z_1 \end{cases}$$

选择初始条件为  $x_0 = [1, 0, 0, 1]$ , 切换规则为每过 0.08s 就切换到另一个子系统, 闭环系统的响应如图 1 所示.

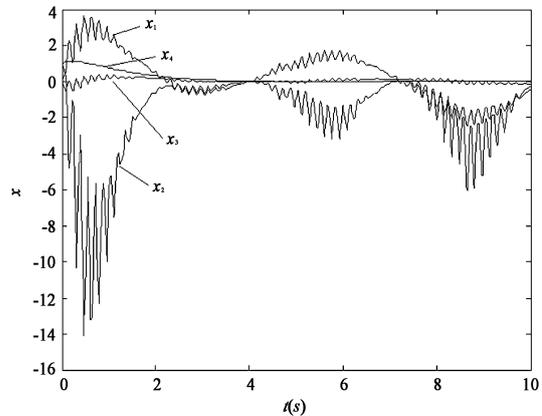


图 1 有扰动时切换系统状态

Fig. 1 State response of the closed-loop system with disturbance

从图 1 可以看出, 状态  $x_1, x_2, x_3$  明显地受到扰动的影响, 而状态  $y = x_4$  却完全不受扰动的影响, 即实现了输出与扰动的完全解耦.

### 4 结论

本文研究了一类非线性切换系统的输出与扰动解耦的问题, 给出了该类非线性切换系统输出与扰动完全解耦的充要条件, 然后研究了在干扰可测并且能够用于反馈控制律设计的情况下, 给出了输出与扰动完全解耦的充要条件. 最后给出了仿真例子说明了本文结果的有效性.

### 参 考 文 献

- 1 Decarlo R, Branicky M S, Lennartson B. Perspective and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of IEEE*, 2000; 1069 ~ 1082
- 2 A. Balluchi et al. Mixed models of computation in the design of automation engine control. *Proceedings of conference on Decision and control*, Orlando, Florida, 2001; 3108 ~ 3133
- 3 Liberzon D. *Switching in systems and control*. Boston; MA: Birkhuser, 2003
- 4 王洪礼, 乔宇, 张锋, 张伯俊. 汽车四轮转向动力系统的 Hybrid 控制研究, *动力学与控制学报*, 2003, 1(1): 53 ~ 58 (Wang Hongli, Qiao Yu, Zhang Feng, Zhang Bojun. Research on hybrid control for vehicle 4WS dynamic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2003, 1(1): 53 ~ 58 (in Chinses))

- 5 Michael S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic control*, 1998, 43(4): 475 ~ 482
- 6 Zhao Shengzhi, Zhao Jun. Quadratic stability of switched nonlinear systems in block – triangular form. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(4): 631 ~ 633
- 7 Nael H El – Farra, Panagiotis D Christofides. Feedback control of switched nonlinear systems using multiple lyapunov functions. Proceedings of American Control Conference, Arlington, 2001: 3496 ~ 3502
- 8 赵胜芝, 李建华, 赵军. 单输入单输出切换系统的一致标准形及可镇定性. *控制与决策*, 2005, 20(10): 1161 ~ 1164 (Zhao Shengzhi, Li Jianhua, Zhao Jun. Uniform normal form and stabilizability of single – input single – output switched systems. *Control and Decision*, 2005, 20(10): 1161 ~ 1164 (in Chinses))
- 9 Song Yang, Xiang Zhengrong, Chen Qingwei and Hu Weili. Saturating control of linear switched systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 2006, 4(1): 36 ~ 41
- 10 Song Yang, Xiang Zhengrong, Chen Qingwei and Hu Weili. Analysis of sliding mode in planar switched systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(5): 743 ~ 749
- 11 Isidori A. *Nonlinear Control Systems*, 3rd Edition. Berlin: Springer – Verlag, 1995

## OUTPUT AND DISTURBANCE DECOUPLING OF SWITCHED NONLINEAR SYSTEMS \*

Xiang Weiming Xiang Zhengrong

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract** This paper studied the solvability of output and disturbance decoupling problem of single-input single-output switched nonlinear systems with uniform normal norm. The sufficient and necessary condition for the solvability of output and disturbance decoupling was obtained; and if disturbance was measured and utilized for designing state feedback controller, the condition could be weakened. The simulation results show that the proposed methods are effective.

**Key words** switched nonlinear systems, output and disturbance decoupling, state feedback