

# 充液箱位置对航天器耦合特性影响分析\*

吕敬<sup>1</sup> 李俊峰<sup>1</sup> 王天舒<sup>1</sup> 岳宝增<sup>2</sup>

(1. 清华大学航天航空学院, 北京 100084) (2. 北京理工大学理学院, 北京 100081)

**摘要** 分析了液体非线性晃动时充液箱位置对带弹性帆板充液航天器刚-液-弹之间耦合特性的影响. 假设耦合系统绕系统质心做俯仰运动, 首先采用已推导的刚-液-弹耦合系统俯仰运动非线性动力学方程组, 得到系统固有频率, 给出固有频率简单近似解析表达式, 分析充液箱位置对系统各阶固有频率的影响. 随后应用多尺度法对耦合系统液体一阶主共振进行解析分析, 发现充液箱位置是决定幅频曲线软、硬特性转换点的重要参数. 给定外激励力矩时, 不同充液箱位置稳态解对应多解现象, 并随着激励频率改变, 稳态解幅值随充液箱位置的变化曲线发生分岔.

**关键词** 航天器姿态, 刚-液-弹耦合, 俯仰, 固有频率, 多尺度

## 引言

在航天技术中由于充液量的增大和航天器姿态指向精度的严格要求, 研究液体大幅晃动时带弹性帆板的充液航天器耦合系统非线性动力学特性具有重要意义, 充液箱位置是耦合系统中的一个重要参数, 它对航天器姿态的影响是充液航天器总体设计中必须考虑的问题.

文献中对充液贮箱耦合系统的动力学问题不论在理论分析与数值分析方面都已有较深入地研究<sup>[1-7]</sup>, 对航天器与弹性附件的耦合动力学问题也有很多讨论<sup>[8,9]</sup>, 但关于液体燃料、航天器与弹性附件耦合动力学问题的研究较少, 且在分析过程中液体为全充液, 忽略了非线性因素<sup>[10]</sup>.

本文采用已推导的刚-液-弹耦合系统非线性动力学方程组, 首先分析了充液箱位置对耦合系统各阶固有频率的影响. 随后用多尺度法对系统的稳态解进行近似解析分析, 分别得出充液箱位置对液体幅频曲线软、硬特性转换点及稳态解响应的关系, 这些结论对航天器的总体设计具有重要意义.

## 1 耦合系统动力学方程组

我们考虑如图1所示的刚-液-弹耦合系统, 假设液体不可压缩, 流动无旋, 动力粘性系数 $\mu$ 和 $\rho$ 密度为常数. 设 $Oxz$ 为惯性坐标系,  $Ox_z$ 为刚体固

连坐标系, 航天器可绕系统质心 $O$ 做俯仰运动, 转动角用 $\theta$ 表示. 分别用 $S, S_0, S_w$ 表示自由液面、未扰静液面、固壁与液体接触面, 液体区域、波高和液深分别记为 $\tau, \zeta, a$ , 而 $b, c, l$ 分别为贮箱长度、转动中心至静液面的距离、弹性帆板长度,  $M_0, \zeta, d$ 分别表示刚体与弹性体的质量、干湿比、刚体与弹性体的共同质心至充液箱底部的距离, 其中 $d$ 可代表充液箱位置.

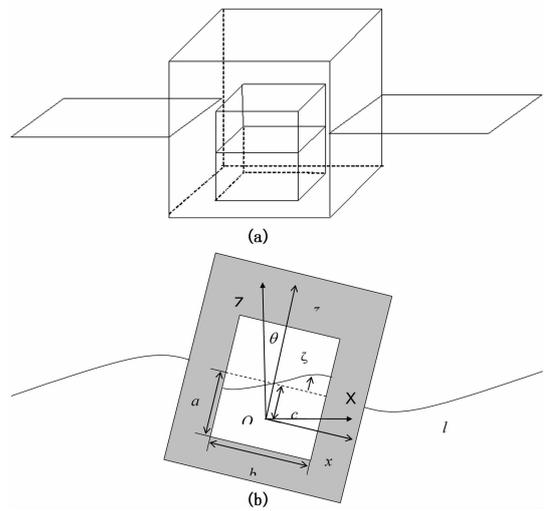


图1 航天器刚-液-弹耦合系统模型

(a) 三维示意图 (b) 平面示意图

Fig. 1 The rigid-liquid-elastic coupling system

(a) three dimensional model (b) two dimensional model

刚-液-弹耦合系统的动力学方程组为:

2006-10-10 收到第1稿, 2006-12-11 收到修改稿.  
\* 国家自然科学基金资助项目(10302013, 10572022)

$$J\dot{\Omega} + \frac{dH}{dt} + \Omega \times H + C\ddot{\eta} + M = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi - \Omega \times r)^2 - \frac{1}{2}(\Omega \times r)^2 - g \cdot r + \mu \varphi = 0 \quad (1b)$$

$$\ddot{\eta} + C^T \dot{\Omega} + \Lambda^2 \eta = 0 \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (\nabla \phi - \Omega \times r)^2 \cdot \nabla F \quad (1d)$$

其中  $J$  为刚体转动惯量与弹性体伴随转动惯量的和,  $\Omega$  为刚体角速度,  $H = \rho \int_r r \times \nabla \phi d\tau$  为液体动量矩,  $C$  为模态耦合系数阵,  $\Lambda$  为非约束模态频率,  $\eta$  为弹性附件模态坐标,  $F = z - \zeta$  为液体的自由液面,  $r$  为贮箱内液体质点的矢径,  $M$  为外加力矩。

俯仰运动时液体的速度势函数表示为  $\phi = \varphi + \psi \cdot \theta$ , 只考虑二维情况, 假设  $\varphi, \psi, \zeta$  为如下形式<sup>[2]</sup>:

$$\varphi = \sum_n u_n(t) \varphi_n(x, z),$$

$$\varphi_n(x, z) = \frac{\cosh(\frac{n\pi}{b}(z+a-c))}{\frac{n\pi}{b} \sinh(\frac{n\pi}{b}a)} \cos(\frac{n\pi}{b}(x + \frac{b}{2})) \quad (2)$$

$$\psi = x(z-c) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2b^2}{(i\pi)^3} [(-1)^i - 1] \times \frac{\sinh(i\pi(z+a/2-c)/b)}{\cosh(i\pi a/2b)} \cos(i\pi(x+b/2)/b) \quad (3)$$

$$\zeta = c + \sum_n v_n(t) \psi_n(x), \psi_n(x) = \cos[\frac{n\pi}{b}(x + \frac{b}{2})] \quad (4)$$

后面分析过程中, 液体截断到三阶模态, 弹性体截断到二阶模态, 随后用伽辽金法对液体动力方程(1b)和运动方程(1d)进行离散, 得到一阶常微分方程组, 具体表达式略。

其中转动中心距离静液面的距离可表达为刚体和弹性体的共同质心至充液箱底部的距离  $d$  和干湿比  $\zeta$  的函数:

$$c = \zeta d - (\zeta + 1) \left( \frac{1}{\zeta} - 1 \right) \frac{M_0}{2\rho b}, \zeta = \frac{M_0}{M_0 + \rho ab} \quad (5)$$

## 2 充液箱位置对固有频率的影响

### 2.1 固有频率分析

对系统一阶非线性常微分方程组进行分析, 质量矩阵和刚度矩阵分别为:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ a_{26} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{45} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & d_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

给出特征方程式

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 & -\alpha_1 \omega^2 & 0 & -\alpha_2 \omega^2 & -\alpha_3 \omega^2 & -\alpha_4 \omega^2 \\ a_{21} - a_{26} \omega^2 & b_{22} - \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{31} - \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} - a_{45} \omega^2 & 0 & 0 & d_{41} - \omega^2 & 0 & 0 \\ -c_1 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 - \omega^2 & 0 \\ -c_2 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

方程式(7)的解  $\omega$  即为耦合系统各阶固有频率, 但无法给出具体表达式. 因此首先取出常微分方程组中的质量矩阵  $M$  和刚度矩阵  $K$ , 由于  $KM^{-1}$  的非对角元素为小量, 所以其对角元素可以作为耦合系统各阶固有频率的近似表达式, 具体形式为

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{\alpha_1 a_{21} + b_{22} (\alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_2 - 1)}{\alpha_1 a_{26} + \alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_2 - 1}}$$

$$\omega_{12} = \sqrt{c_{31}}$$

$$\omega_{13} = \sqrt{\frac{\alpha_2 a_{41} + d_{41} (\alpha_1 a_{26} + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_2 - 1)}{\alpha_1 a_{26} + \alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_2 - 1}}$$

$$\omega_{e1} = \sqrt{\frac{(\alpha_1 a_{26} + \alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 - 1) \lambda_1^2}{\alpha_1 a_{26} + \alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_2 - 1}}$$

$$\omega_{e2} = \sqrt{\frac{(\alpha_1 a_{26} + \alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 - 1) \lambda_2^2}{\alpha_1 a_{26} + \alpha_2 a_{45} + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_2 - 1}} \quad (8)$$

其中  $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{e1}$  和  $\omega_{e2}$  分别为以液体第一阶、液体第二阶、液体第三阶、弹性体第一阶、弹性体第二阶为主的耦合系统近似固有频率值。

选取系统参数为  $a = 0.5 \text{ m}, b = 1 \text{ m}, \rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, M_0 = 1000 \text{ kg}, J = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \rho_l = 2.7 \times$

$10^3 \text{kg/m}^3, A = 0.01 \text{m}^2, l = 2 \text{m}, EI = 54 \text{N} \cdot \text{m}, \mu = 0$ , 调节参数  $g, c$  的大小, 近似固有频率相对误差很小, 例如取  $g = 0.01 \text{m/s}^2, c = 0 \text{m}$ ,  $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{e1}$  和  $\omega_{e2}$  的近似固有频率的相对误差分别为  $1.2'10^{-2}\%$ ,  $0, 3.7'10^{-4}\%$ ,  $1.4'10^{-2}\%$ ,  $3.5'10^{-4}\%$ , 所以下面采用近似表达式解析分析固有频率的变化规律.

### 2.2 充液箱位置对固有频率影响分析

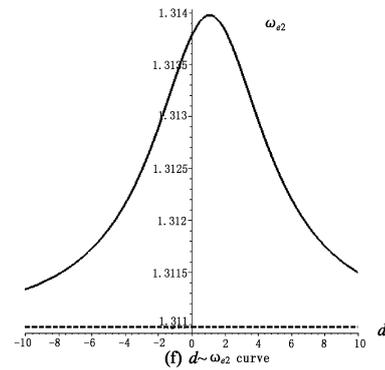
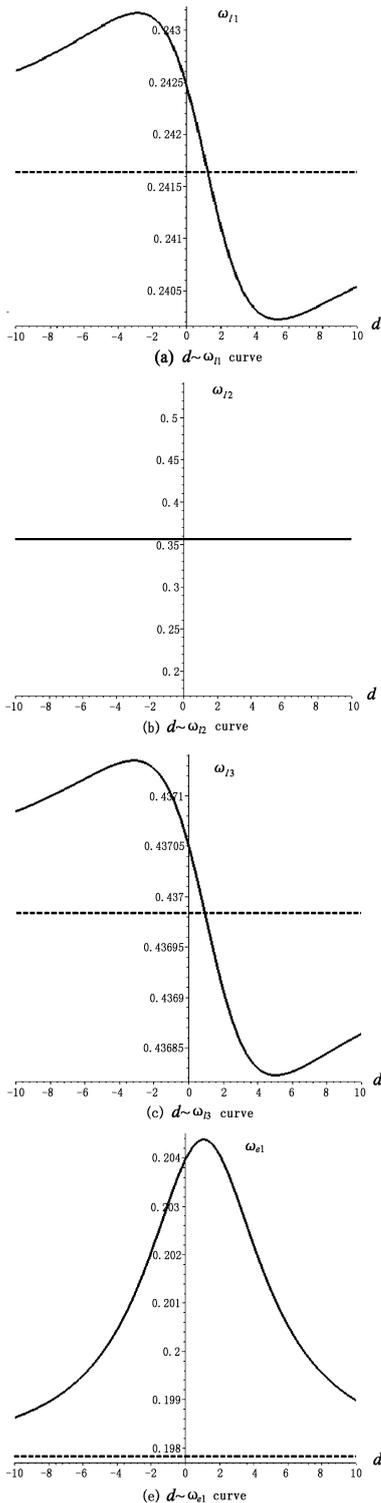


图2 ‘...’表示非耦合系统的各阶固有频率,

‘—’表示耦合系统各阶固有频率

Fig.2 ‘...’ presents uncoupled natural frequency,

‘—’ presents the natural frequency of the coupling system

给定  $a = 0.5 \text{m}, b = 1 \text{m}, M_0 = 1000 \text{kg}, J = 2000 \text{kg} \cdot \text{m}^2, \rho = 1000 \text{kg/m}^3$ , 分析刚-液-弹的相互耦合作用对系统固有频率的影响. 图2为  $g = 0.01 \text{m/s}^2$  时的  $d \sim \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{e1}, \omega_{e2}$  曲线图.

充液箱位置主要影响以液体非对称模态和弹性体为主的耦合系统各阶固有频率, 且以非线性关系变化. 以液体非对称模态为主的耦合系统固有频率当充液箱放置在航天器底部时略大, 放置在航天器顶部时略小. 以弹性体为主的耦合系统固有频率当液体质心与系统质心重合时最大.

### 3 充液箱位置对稳态解影响

#### 3.1 多尺度法求稳态解

首先将一阶常微分方程组乘其质量矩阵的逆矩阵使质量矩阵解耦, 随后应用多尺度法对耦合系统液体一阶主共振进行近似解析分析, 取  $\varepsilon$  为小参数, 令

$$\begin{aligned}
 u_i(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^2 \chi_{ij}(T_1, T_2, T_3) \varepsilon^{j+1}, \\
 v_i(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^2 v_{ij}(T_1, T_2, T_3) \varepsilon^{j+1}, \\
 q(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^2 J_j(T_1, T_2, T_3) \varepsilon^{j+1}, \\
 w(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^2 v_j(T_1, T_2, T_3) \varepsilon^{j+1}, \\
 h_i(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^2 m_{ij}(T_1, T_2, T_3) \varepsilon^{j+1}, \\
 y_i(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^2 g_{ij}(T_1, T_2, T_3) \varepsilon^{j+1} \tag{9}
 \end{aligned}$$

其中

$$w = \dot{\theta}, y_i = \dot{\eta}, \text{且 } T_1 = t, T_2 = \varepsilon t, T_3 = \varepsilon^2 t$$

所以

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \dots = D_1 + \varepsilon D_2 + \varepsilon^2 D_3 + \dots \quad (10)$$

将式(9)、(10)代入质量矩阵解耦后的一阶常微分方程组,比较  $\varepsilon$  的同次幂. 过程中设

$$\begin{aligned} v_{j0} &= A_j(T_2, T_3) e^{i\omega_j T_1} + \bar{A}_j(T_2, T_3) e^{-i\omega_j T_1}, (j=1,2,3) \\ \chi_{j0} &= i\omega_j A_j(T_2, T_3) e^{i\omega_j T_1} - i\omega_j \bar{A}_j(T_2, T_3) e^{-i\omega_j T_1}, \\ \vartheta_0 &= A_4(T_2, T_3) e^{i\omega_4 T_1} + \bar{A}_4(T_2, T_3) e^{-i\omega_4 T_1}, \\ \tilde{\omega}_0 &= i\omega_4 A_4(T_2, T_3) e^{i\omega_4 T_1} - i\omega_4 \bar{A}_4(T_2, T_3) e^{-i\omega_4 T_1}, \\ \mu_{k0} &= A_{k+4}(T_2, T_3) e^{i\omega_{k+4} T_1} + \bar{A}_{k+4}(T_2, T_3) e^{-i\omega_{k+4} T_1}, \\ \gamma_{k0} &= i\omega_{k+4} A_{k+4}(T_2, T_3) e^{i\omega_{k+4} T_1} - \\ & i\omega_{k+4} \bar{A}_{k+4}(T_2, T_3) e^{-i\omega_{k+4} T_1}, (k=1,2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}$ ,  $n = 1 \dots 6$ ,  $\omega_i$  为对应的各阶固有频率. 通过消除  $\varepsilon$  的各阶幂次方程的永年项,可知  $a_i = 0$  ( $i = 2 \dots 6$ ),得关于  $a_1$  的幅频响应曲线方程为:

$$[(f_{112} - \varepsilon\sigma)a_1 + f_{113}a_1^3]^2 + [f_{122}a_1 + f_{123}a_1^3]^2 = f_{111}^2 \quad (12)$$

其中  $f_{ijk}$  为  $c$  的函数,表达式略.

### 3.2 充液箱位置对幅频曲线软硬特性的影响

在实际中,随着液体燃料的不断消耗,液深值在不断变化,研究变液深的稳态解具有重要意义. 研究发现存在幅频曲线软、硬特性随液深转换的现象,三次项系数  $f_{113} = 0$  时为幅频曲线软、硬特性转换临界点,称软、硬特性转换时的液深值为临界液深,记为  $\bar{a}$ . 临界液深与充液箱位置有关,随着充液箱偏离质心,临界液深成非线性变化趋于一个常值,

当液体质心接近系统质心时随充液箱位置临界液深变化最快. 仍采用 2.1 中各系统参数,临界液深  $\bar{a}$  随充液箱位置  $d$  的变化曲线如图 3 所示.

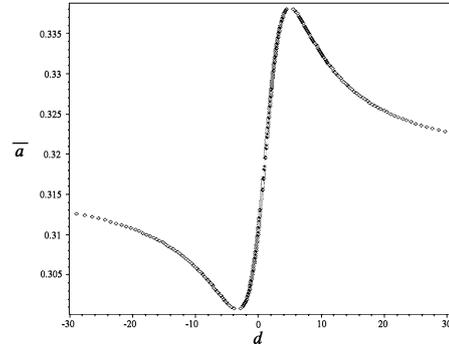
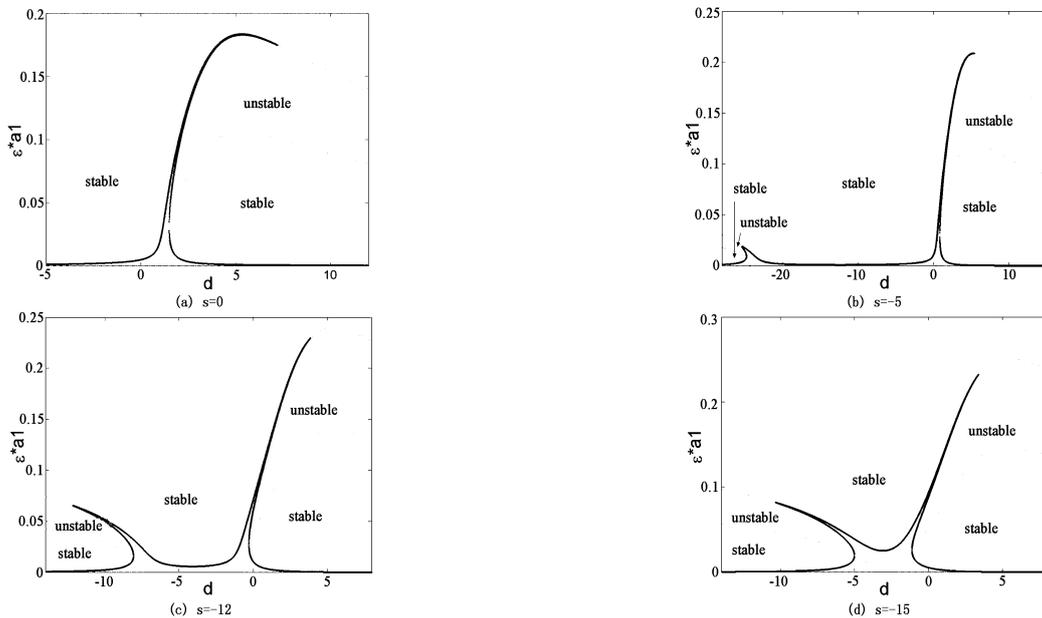


图3 临界液深  $\bar{a}$  随充液箱位置  $d$  的变化曲线  
Fig. 3 critical depth  $\bar{a}$  changing with  $d$

### 3.3 充液箱位置对稳态解幅值影响

固定液深,给定系统的调谐参数  $\sigma$  和外激励幅值  $p$ ,可得稳态解随充液箱位置的变化曲线. 在液体一阶频率处激励,随着充液箱位置的变化稳态响应由单值出现多解. 不同充液箱位置所对应的多解现象随着激励频率而变化. 当系统为软特性时,激励频率小于固有频率且远离固有频率时,多值点增加、移动且生长;当激励频率大于固有频率且远离固有频率时,多值点增加但最大峰值减小,如图 4 所示. 当系统为硬特性时,激励频率大于固有频率且远离固有频率时,多值点增加、移动且生长. 激励频率小于固有频率且远离固有频率时,多值点增加但最大峰值减小,即系统存在多解和分岔现象.



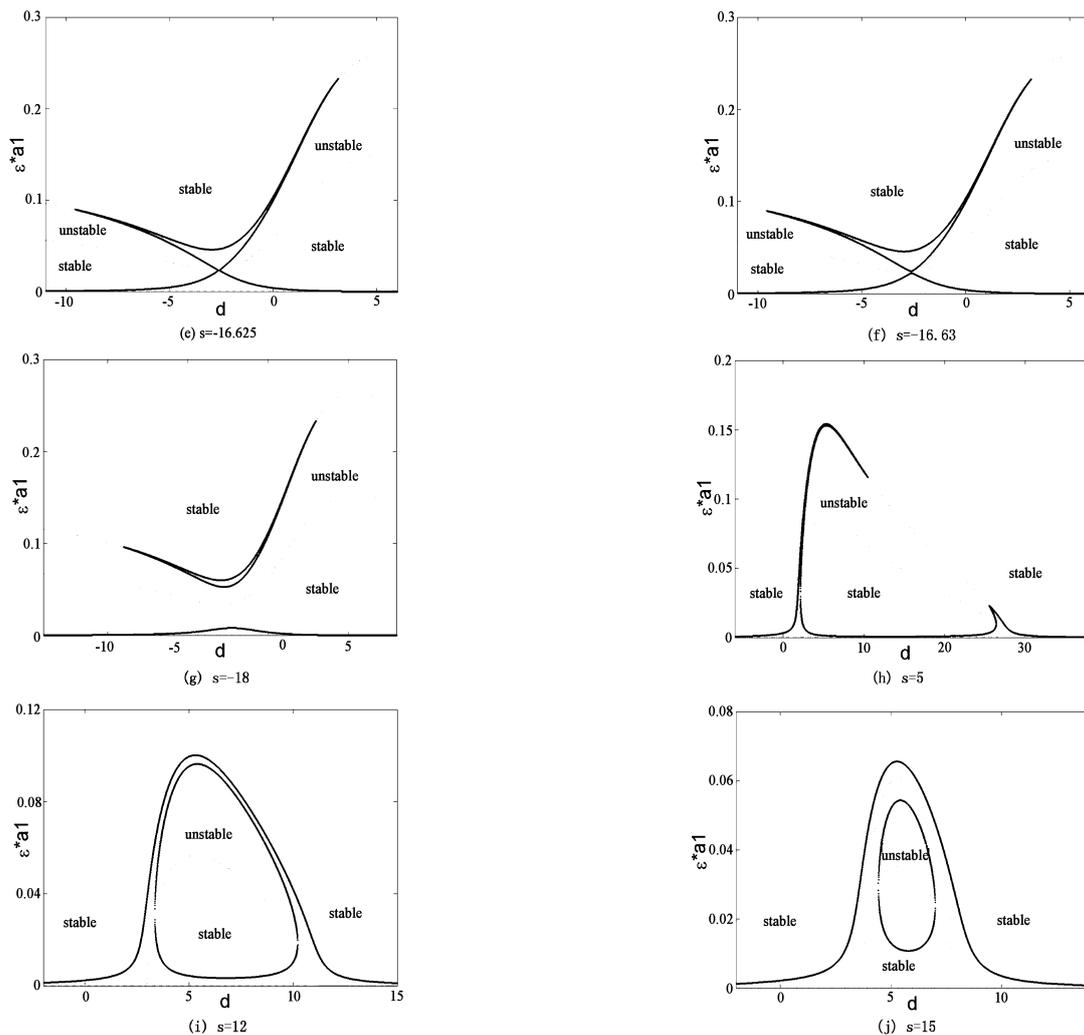


图 4  $a = 0.5$  时  $d - \varepsilon a_1$

Fig. 4  $d - \varepsilon a_1$  at  $a = 0.5$

### 4 结论

通过分析得出充液箱位置对带弹性帆板充液航天器耦合系统的固有频率及系统响应均有重要影响。

(1) 充液箱位置主要影响以液体非对称模态和弹性体为主的耦合系统各阶固有频率,且以非线性关系变化。以液体非对称模态为主的耦合系统固有频率当充液箱放置在航天器底部时略大,放置在航天器顶部时略小。以弹性体为主的耦合系统固有频率当液体质心与系统质心重合时最大。

(2) 充液箱位置是决定液体幅频曲线软硬特性转换点的重要参数,当液体质心接近系统质心时随充液箱位置临界液深变化最快。

(3) 充液箱位置的改变将使系统稳态响应产生多解现象,并随外激励频率的改变发生分岔。

### 参 考 文 献

- 1 Abramson H N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA; SP106,1966
- 2 Odd M. Faltinsen, Olav F. Rognebakke, Ivana. Lukovsky and Alexander N. Timokha. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. *J. Fluid Mech*, 2000, 407: 201 ~ 234
- 3 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学. 北京: 科学出版社, 2002 (Wang Zhaolin, Liu Yanzhu. Dynamics of liquid-filled system. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese))
- 4 曾江红. 多腔充液自旋系统动力学与液体晃动三维非线性数值研究[博士论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1996 (Zeng Jianghong. Dynamics of spinning system with partially liquid-filled tanks and numerical study of

- three - dimensional nonlinear liquid sloshing [ Ph D Thesis ]. Beijing: Tsinghua University, 1996 ( in Chinese )
- 5 岳宝增. 俯仰激励下三维液体大幅晃动问题研究. 力学学报, 2005, 37(2): 199 ~ 203 ( Yue Baozeng. Three dimensional large amplitude liquid sloshing under pitching excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(2): 199 ~ 203 ( in Chinese ) )
  - 6 贺元军, 王萍萍, 王本利, 马兴瑞. 谐波平衡法求解俯仰运动矩形贮箱中液体非线性晃动. 动力学与控制学报, 2004, 2(4): 29 ~ 33 ( He Yuanjun, Wang Pingping, Wang Benli, Ma Xingrui. Nonlinear sloshing of liquid in rectangular container under pitching excitation by harmonic balance method. *Journal of dynamics and control*, 2004, 2(4): 29 ~ 33 ( in Chinese ) )
  - 7 朱金林, 岳宝增. 部分充液卫星的非线性稳定性和动力学分析. 动力学与控制学报, 2004, 2(3): 1 ~ 5 ( Zhu Jinlin, Yue Baozeng. Nonlinear stability and dynamics analysis of a satellite with partially filled liquid. *Journal of dynamics and control*, 2004, 2(3): 1 ~ 5 ( in Chinese ) )
  - 8 李俊峰, 王照林. 带挠性伸展附件的航天器姿态动力学研究. 清华大学学报, 1996, 36(10): 35 ~ 40 ( Li Junfeng, Wang Zhaolin. Attitude dynamics of a spacecraft with deploying flexible appendages. *Journal of Tsinghua University ( Sci & Tech )*, 1996, 36(10): 35 ~ 40 ( in Chinese ) )
  - 9 Kalaycioglu S, Misra A K. Approximate solutions for vibration of deploying appendages. *J. Guid. Cont. Dyn.*, 1991, 14(2): 287 ~ 293
  - 10 程绪铎, 王照林, 李俊峰. 带弹性伸展附件充液航天器姿态动力学研究. 空间科学学报, 2000, 20(3): 271 ~ 277 ( Cheng Xuduo, Wang Zhaolin, Li Junfeng. Study on attitude dynamics of a liquid - filled spacecraft with elastic appendages. *Chinese Journal of Space Science*, 2000, 20(3): 271 ~ 277 ( in Chinese ) )

## ANALYSIS ON EFFECTS OF FUEL POSITION ON THE ATTITUDE OF SPACECRAFT WITH ELASTIC APPENDAGES \*

Lu Jing Li Junfeng Wang Tianshu Yue Baozeng

( School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China )

**Abstract** The effects of fuel position on the attitude of spacecraft with elastic appendages were studied under the condition that the fuel sloshes violently and assuming that the coupling system pitches round the mass center of the whole system. The coupling dynamics equations were deduced by using H-O principle, the analytical expressions of the natural frequencies of the coupling system were obtained, and the effects of fuel position on the natural frequencies of the coupling system were analyzed. Then the multiple scale method was employed to analyze the primary resonance of the rigid-liquid-elastic coupling system, which showed that the amplitude-frequency response switches between soft and hard spring type at the critical depth changed with the fuel position, and that, if given the force moment, the multi-value and bifurcation phenomena could occur.

**Key words** attitude of spacecraft, rigid-liquid-elastic coupling system, pitch, natural frequency, multi-scale method