

双轮共轴移动式倒立摆动力学建模与状态反馈控制*

王凯 王士敏

(北京航空航天大学理学院控制与系统科学系,北京 100083)

摘要 应用第一类拉格朗日方法对系统进行力学分析,建立了以电机转矩为输入且轮在轴向无滑移的非完整约束下系统的数学模型. 双轮共轴移动式倒立摆的运动控制目标是移动式倒立摆在二维平面内按指定的方向和速度运动,同时保持摆杆平衡. 利用状态反馈,构造闭环系统的状态方程,通过极点配置求得控制量. 仿真结果验证了系统状态方程的正确性和控制方法的合理性.

关键词 非完整约束, 移动式倒立摆, 拉格朗日方程, 状态反馈, 极点配置, 仿真

引言

双轮共轴移动式倒立摆系统两个轮位于同一轴线上,由电机驱动,是一个非完整约束系统. 控制目标是移动式倒立摆在二维平面内按指定的方向和速度运动,同时保持摆杆平衡. 倒立摆系统是检验各种控制方法的理想模型,近来两轮移动式倒立摆模型引起了广泛关注,以此模型为基础一种商业产品 Segway 已经面世,其关键是解决在空载、载人、前进、后退、旋转以及刹车等各种运动状态下,如何保持车体系统平衡的问题.

文献[3]在状态反馈等自动控制理论的基础上研究新的控制算法. CPU 根据传感器采集的数据实时计算控制系统平衡所需的脉宽调制信号,控制两个直流电机的转矩,使车体在各种运行状态下保持平衡. 文献[4]利用状态反馈和输出反馈,构造闭环系统的状态空间方程. 但是他们均是把该系统看作是完整约束系统,选取3个广义坐标描述系统状态. 本文考虑车轮受非完整约束,选取4个广义坐标描述系统状态. 该系统是具有3个自由度,2个控制量的非完整欠驱动系统. 在优化极点配置的基础上,利用状态反馈算法对系统进行控制. 并用 MATLAB 进行仿真,根据仿真结果进行分析,得到合理的反馈极点,使系统的动态和稳态性能指标符合实际的要求.

1 两轮移动式倒立摆的数学模型

1.1 系统结构

如图1所示,共轴的两轮分别由两个独立电机

驱动,倒立的摆杆固联在轮轴上,可随轮轴自由迴转. 控制系统由 DSP(Digital Signal Processor), PWM(Pulse Wide Modulation)调速电机,陀螺仪,码盘及加速度传感器组成,陀螺仪通过检测摆杆倾角、角速度及加速度,传感器通过检测倒立摆运动的加速度,为控制系统提供状态信号. 如图1所示, xyz 为惯性直角坐标系, O 为轮轴中点, $OXYZ$ 为随 O 点运动的平动坐标系, O 点在惯性系中的位置为 (x, y, R) . $X'Y'Z'$ 为摆杆的随体坐标系, 两轮的轴线方向为 Y' 轴, 车体前进方向恒垂直于轮轴, 摆杆方向为 Z' 轴. 两轮轮距为 $2D$, R 为两轮半径, G 为摆杆质心, l 为 OG 间距, m_p 为摆杆质量, m 为轮的质量, φ_l, φ_r 分别为左右轮转角, 轮轴在水平面的转角 θ 为偏航角, 摆杆与铅垂线夹角 α 为俯仰角.

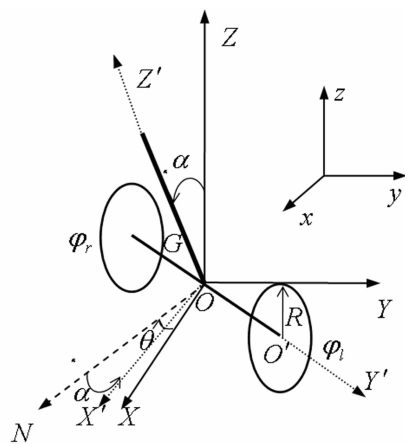


图1 系统坐标系及几何参数

Fig. 1 Geometric parameters and coordinate systems for the system

2006-10-10 收到第1稿,2007-02-02 收到修改稿.

*国家自然科学基金资助项目(10672006)

1.2 动力学方程

摆杆、轮轴相对于平动坐标系 $OXY'Z$ 作定点运动, 其角速度为

$$\Omega = (\omega_{X'} \ \omega_{Y'} \ \omega_{Z'}) = (-\dot{\theta}\sin\alpha \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\theta}\cos\alpha)^T$$

其惯量矩阵 $I = \begin{pmatrix} I_{X'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z'} \end{pmatrix}$

摆杆的转动相对质心运动(定点运动)的动能

$$T_1 = \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega = \frac{1}{2} (I_{X'} \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + I_{Y'} \dot{\alpha}^2 + I_{Z'} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha)$$

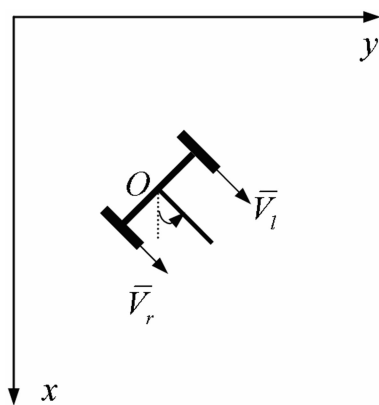


图2 O点速度

Fig.2 Velocity of O

左右车轮的速度如图2所示分别为:

$\bar{V}_l = R\dot{\varphi}_l (\sin\bar{\theta}i + \cos\bar{\theta}j)$, $\bar{V}_r = R\dot{\varphi}_r (\sin\bar{\theta}i + \cos\bar{\theta}j)$, O 点的速度 $\bar{V}_0 = \frac{1}{2}(\bar{V}_l + \bar{V}_r)$, $\bar{r}_{OC} = l\bar{k}'$, 其中 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}'$ 分别为 X, Y, Z' 单位向量。

摆杆质心的速度:

$$\begin{aligned} \bar{V}_C &= \bar{V}_0 + \bar{\Omega} \times \bar{r}_{OC} = \left[\frac{R}{2}(\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r) \sin\theta + \right. \\ & \left. l\dot{\alpha} \cos\alpha \cos\theta - l\dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta \right] i + \left[\frac{R}{2}(\dot{\varphi}_l + \right. \\ & \left. \dot{\varphi}_r) \cos\theta + l\dot{\alpha} \cos\alpha \sin\theta - l\dot{\theta} \sin\alpha \cos\theta \right] j \end{aligned}$$

摆杆随质心平动动能:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_p V_C^2 = \frac{1}{2} m_p \left[\frac{R^2}{4} (\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r)^2 + \right. \\ & \left. l^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + lR(\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r) \times \right. \\ & \left. (\dot{\alpha} \cos\alpha \sin 2\theta + \dot{\theta} \sin\alpha \cos 2\theta) \right] \end{aligned}$$

左右车轮转动动能:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{\omega a} (\dot{\varphi}_l^2 + \dot{\varphi}_r^2) + I_{\omega b} \dot{\theta}^2$$

其中 $I_{\omega a}, I_{\omega b}$ 分别为轮关于轮轴和轮的任一直径的

转动惯量。

左右车轮平动动能 $T_4 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\varphi}_l^2 + \dot{\varphi}_r^2)$, 系统势能 $V = m_p g l \cos\alpha$, 系统的总动能 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$, 拉格朗日函数 $L = T - V$, 系统约束方程:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta \\ \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + \dot{D}\theta - R\dot{\varphi}_r \\ \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - \dot{D}\theta - R\dot{\varphi}_l \end{bmatrix} = 0$$

系统的运动方程由第一类 Lagrange 方程表示为:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = Q + \Phi^T(q)\lambda \quad (1)$$

其中:

$$M(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_6 \end{pmatrix}, \quad V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_6 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = a_2 = 0$$

$$a_3 = (I_{X'} + m_p l^2) \sin^2 \alpha + I_{Z'} \cos^2 \alpha + 2I_{\omega b} + lR \sin\alpha \cos 2\theta$$

$$a_4 = I_{Y'} + m_p l^2 \cos^2 \alpha + lR \cos\alpha \sin 2\theta$$

$$a_5 = a_6 = \frac{1}{2} m_p lR \sin\alpha \cos 2\theta + \frac{1}{4} m_p R^2 + mR^2 +$$

$$lR \cos\alpha \sin 2\theta + I_{\omega a}$$

$$b_1 = b_2 = 0$$

$$b_3 = (I_{X'} - I_{Z'} + m_p l^2) \dot{\theta} \dot{\alpha} \sin 2\alpha + m_p lR (\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r) (2\theta \sin\alpha \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos\alpha \cos 2\theta)$$

$$b_4 = -(I_{X'} - I_{Z'} + m_p l^2) \dot{\theta}^2 \sin 2\alpha + lR (\dot{\varphi}_l + \dot{\varphi}_r) \times \dot{\theta} \cos\alpha \cos 2\theta + m_p l^2 \dot{\alpha}^2 \sin\alpha (\cos\alpha - 2) + m_p g l \sin\alpha$$

$$b_5 = b_6 = lR [3\dot{\theta} \dot{\alpha} \cos\alpha \cos 2\theta - \sin\alpha \sin 2\theta (\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\theta}^2)]$$

$$Q = E(q)\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix}$$

其中 $\tau = \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix}$ 为左右轮电机输入转矩矩阵。

非完整约束矩阵

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & D & 0 & -R & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -D & 0 & 0 & -R \end{bmatrix}$$

由 $\Phi(q)S(q) = 0$ 解得

$$S(q) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & \frac{D}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{D}{R} \end{bmatrix}$$

因此

$$\dot{q}S(q)\gamma \quad \gamma = [\dot{\alpha}, v, \dot{\theta}]^T \quad (2)$$

其中 v 为 O 点的速度.

对(1)式左乘 S^T 消除拉格朗日乘子 λ 得

$$S^T M(q) \dot{S} \dot{\gamma} + S^T M(q) \dot{S} \dot{\gamma} + S^T V(q, \dot{q}) = S^T E(q) \tau \quad (3)$$

从(2)式可将 $\dot{\varphi}_r, \dot{\varphi}_l$ 表示成 $v, \dot{\theta}$ 的函数

$$\dot{\varphi}_r = \frac{1}{R}(v + D\dot{\theta}), \quad \dot{\varphi}_l = \frac{1}{R}(v - D\dot{\theta}) \quad (4)$$

系统的控制目标是在二维平面内按指定的方向和速度运动并保持摆杆平衡. 用(4)式替换(3)式相应变量, 重新选取系统的广义坐标为 $q_r = [x, y, \theta, \alpha]^T$, 系统状态变量 $X_r = [x, y, \theta, \alpha, \dot{x}, v, \dot{\theta}]^T$, 由(3)式解得

$$\dot{X}_r = f(X_r) + g(X_r)U \quad (5)$$

$$f(X_r) = \begin{pmatrix} S_r \gamma \\ -(S^T M S)^{-1} S^T (M \dot{S} \dot{\gamma} + V(q, \dot{q})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_r) \\ f_2(X_r) \end{pmatrix}$$

$$f_1(X_r) = [v \cos\theta \quad v \sin\theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$$

$$f_2(X_r) = [f_2[1] \quad f_2[2] \quad f_2[3]]^T$$

$$f_2[1] = \frac{1}{2D_\alpha} [2\dot{\theta}^2 H \sin 2\alpha + m_p^2 l^2 R^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha -$$

$$(2m_p^2 l^2 R^2 + 4I_{\omega a} m_p l + 4mm_p l R^2) g \sin \alpha]$$

$$f_2[2] = K_\alpha \dot{\theta}^2 + \frac{m_p^2 l^2 R^2 g \sin 2\alpha}{2D_\alpha} - \frac{I_Y m_p l R^2 + m_p^2 l^3 R^3}{D_\alpha} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha$$

$$f_2[3] = \frac{1}{G_\alpha} [(I_Z' - I_X' - m_p^2 l^2) R^2 \dot{\alpha} \dot{\theta}^2 \sin 2\alpha - m_p l R^2 v \dot{\theta} \sin \alpha]$$

$$g(X_r) = \begin{pmatrix} O_{4 \times 2} \\ (S^T M S)^{-1} S^T E \end{pmatrix} = [g_1(X_r) \quad g_2(X_r)],$$

$$g_1(X_r) = \begin{pmatrix} O_{4 \times 1} \\ g[5] \\ g[6] \\ g[7] \end{pmatrix}, \quad g_2(X_r) = \begin{pmatrix} O_{4 \times 1} \\ g[5] \\ g[6] \\ -g[7] \end{pmatrix}$$

$$g[5] = \frac{(m_p + 2m)R^2 + 2I_{\omega a} + m_p l R \cos \alpha}{D_\alpha}$$

$$g[6] = -\frac{(m_p l R \cos \alpha + m_p l^2 + I_Y)R}{D_\alpha}$$

$$g[7] = -\frac{RD}{G_\alpha}$$

$$D_\alpha = [m_p^2 l^2 \cos^2 \alpha - (m_p^2 + 2mm_p)l^2 - (m_p +$$

$$2m)I_Y]R^2 - 2I_{\omega a}(m_p l^2 + I_Y)$$

$$G_\alpha = (-m_p l^2 + I_Z' - I_X')R^2 \cos^2 \alpha + 2I_{\omega a} D^2 +$$

$$(m_p l^2 + I_X' + 2I_{\omega a} + 2mD^2)R^2$$

$$K_\alpha = [-4I_Y m_p l R^2 - 3m_p^2 l^3 R^2 + m_p R^2 l (I_X' -$$

$$I_Z')] \sin \alpha + [m_p l R^2 (I_X' - I_Z') + m_p^2 l^3 R^2] \sin 3\alpha$$

$$H = (\frac{1}{2}m_p R^2 + mR^2 + I_{\omega a})(I_Z' - I_X') - (mR^2 + I_{\omega a})m_p l^2$$

$$u = \tau = \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix}, \quad S_r(q) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\sin \alpha = \alpha, \cos \alpha = 1$ 在平衡位置部分线性化,

由于 $f_1(X_r) = [v \cos\theta \quad v \sin\theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$ 中含有 $v \cos\theta, v \sin\theta$, 系统仍为非线性系统. 重新选取系统状态变量 $X = [s, v, \alpha, \dot{\alpha}, \theta, \dot{\theta}]^T$, 其中 s 为车体在前进速度 v 方向上的位移. 可得线性系统状态方程

$$\dot{X} = AX + BU \quad (6)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B2 & B2 \\ 0 & 0 \\ B4 & B4 \\ 0 & 0 \\ B6 & B6 \end{bmatrix}$$

$$D_\alpha' = (2mm_p l^2 + 2mI_Y + m_p I_Y)R^2 + 2I_{\omega a}(m_p l^2 + I_Y)$$

$$G_\alpha' = (I_Z' + 2I_{\omega a} + 2mD^2)R^2 + 2I_{\omega a} D^2$$

$$A2 = -\frac{m_p^2 l^2 R^2 g_\alpha}{D_\alpha'}$$

$$A4 = \frac{m_p^2 R^2 l + 2I_{\omega a} m_p l + 2mm_p R^2 l}{D_\alpha'} g_\alpha$$

$$B2 = \frac{m_p R l + I_{yy} + m_p l^2}{D_\alpha'} R$$

$$B4 = -\frac{(m_p + 2m)R^2 + 2I_{\omega a} + m_p l R}{D_\alpha'}$$

$$B6 = -\frac{RD}{G'_\alpha}$$

2 控制系统设计

对系统的控制目标有两个,在车体运动时控制摆杆俯仰角 α 及车体偏航角 θ . (6)式显示该系统有两个输入即左右轮转矩 τ_l, τ_r 为系统的控制量. 在此多变量系统中,输入对系统输出均有影响. 即左右轮转矩对 α, θ 都有影响. 为了解耦,我们设计两个分别控制 α, θ 的控制器,反演出产生相应的控制力矩 τ_α, τ_θ . 解耦单元如图 3, U_{α}, U_{θ} 分别表示 τ_α, τ_θ , 把 τ_α, τ_θ 转化为左右轮转矩 τ_l, τ_r .

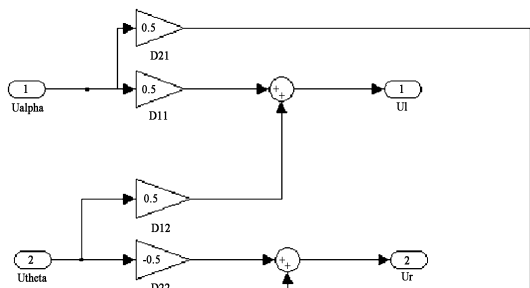


图3 解耦单元

Fig.3 Decoupling subsystems

$$\begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

把(7)式代入(6)式得到:

$$BU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B2 & B2 \\ 0 & 0 \\ B4 & B4 \\ 0 & 0 \\ B6 & -B6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B2(D_{11} + D_{21}) & B2D_{12} + D_{22} \\ 0 & 0 \\ B4(D_{11} + D_{21}) & B2D_{12} + D_{22} \\ 0 & 0 \\ B6(D_{11} - D_{21}) & B6D_{12} - D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

为达到解耦的目的故取

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

系统状态方程

$$\dot{X} = AX + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B2 & 0 \\ 0 & 0 \\ B4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

系统状态方程现在可改写成两个不同的系统

1)以摆杆俯仰角 α 描述的摆杆系统

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = A44 \begin{bmatrix} s \\ v \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + B41 [\tau_\alpha]$$

$$A44 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B41 = \begin{bmatrix} 0 \\ B2 \\ 0 \\ B4 \end{bmatrix}$$

2)以车体偏航角 θ 描述的车体偏航角系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = A22 \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + B21 [\tau_\theta]$$

$$A22 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B21 = \begin{bmatrix} 0 \\ B6 \end{bmatrix}$$

仿真参数如下: $m_p = 35\text{kg}, m = 5\text{kg}, R = 0.25\text{m}, l = 0.75\text{m}, D = 0.20\text{m}, I_x = 2.1073\text{kgm}^2, I_y = 1.8229\text{kgm}^2, I_z = 0.6490\text{kgm}^2, I_{\omega a} = 0.1563\text{kgm}^2, I_{\omega b} = 0.0781\text{kgm}^2$. 运用 MATLAB 能控性矩阵计算函数 CTRB 运算求得

$$\text{rank}[B41 \quad A41B41 \quad A41^2B41 \quad A41^3B41] = 4$$

$$\text{rank}[B21 \quad A22B21] = 2$$

能控性矩阵均为满秩阵,满足系统状态完全可控的充分必要条件,上述两系统均可控,可以任意配置系统极点,从而求出反馈矩阵.

一般来说,将指定的特征根配置在原点的左侧,离原点越远,控制动作就越迅速,但相应地需要更大的控制力和快速的灵敏度.配置多组不同的极点进行仿真比较可知,配置极点离原点越远,虽然需要相对大的控制力,但是系统达到稳定的时间越短,即控制动作就越迅速,灵敏度高.

3 系统仿真与极点配置

系统仿真是用 MATLAB 软件中 Simulink 工具箱来实现的.应用 Simulink 设计的控制系统如图 4

所示. 图中 State - Space 模块填入了在平衡位置附近线性化后得到的系统状态空间方程. 然后用 1 个 BusSelector 输出位移、速度、摆角、摆角速度、转角和转角速度 6 个量之后用 2 个 Gain 及解耦单元构成状态反馈, 同时用示波器输出这 6 个量.

为了使系统具有良好的动态性能, 配置多组不同的极点进行仿真, 并进行系统性能的比较. 最后将系统的极点配置在 $[-1.75 + \sqrt{3}i, -1.75 - \sqrt{3}i, -8.3 + 3i, -8.3 - 3i]$ 及 $[-1 + i, -1 - i]$, 计算出系统状态反馈矩阵

$$K_{\alpha} = [-177.3611 \quad -140.1935 \quad -565.6795 \quad -151.6825]$$

$$K_{\theta} = [-3.5132 \quad -3.5132]$$

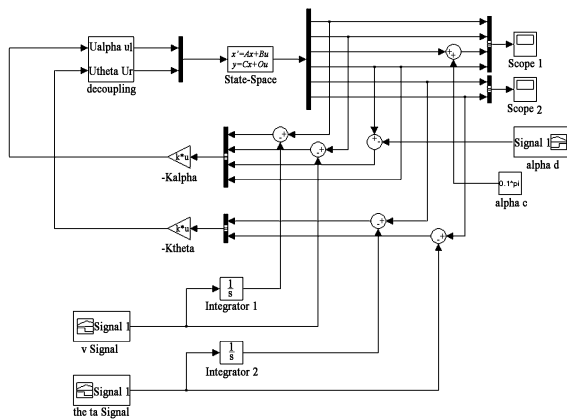


图 4 控制系统
Fig. 4 Control system

系统工作状态 1:

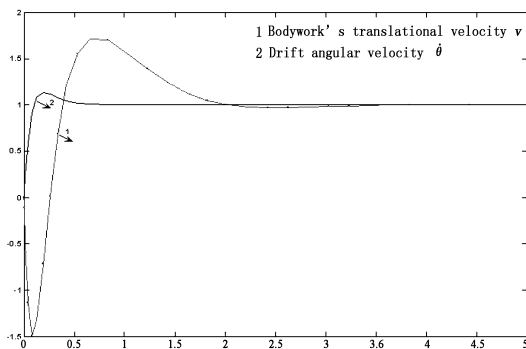


图 5 车体平动速度、偏航角速度阶跃响应曲线
Fig. 5 v and θ response to a step signal

考虑摩擦, 系统的初始状态取为 $X_0 = [0, 0, 0, 1\pi, 0, 0, 0]$, 从 0 时刻开始给系统阶跃信号, 要求最终车体以 1m/s 的速度平动, 同时以 1rad/s 的角速度转弯, 倒立摆系统平动速度、偏航角速度的响应曲线, 如图 5 所示, 其调整时间分别为: 3.5s 和

0.9s. 摆杆俯仰角和角速度响应曲线, 如图 6 所示, 为使摆杆回到平衡位置, 摆杆开始角速度较大, 然后迅速收敛到 0, 摆杆俯仰角速度和角度调整时间分别为: 2.1s 和 1.2s.

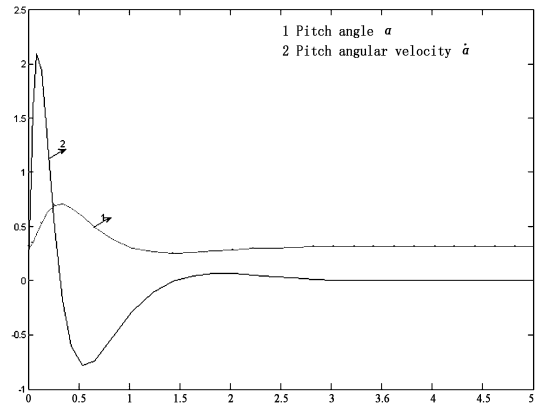


图 6 摆杆俯仰角、角速度阶跃响应曲线
Fig. 6 α and $\dot{\alpha}$ response to a step signal

系统工作状态 2:

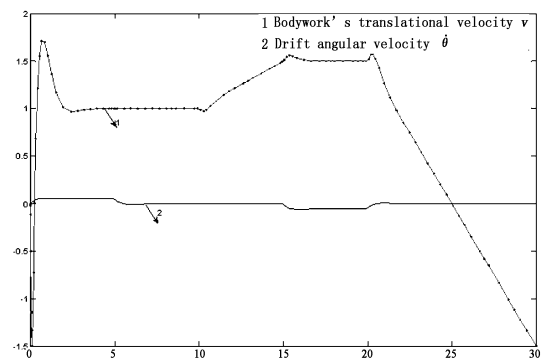


图 7 系统按规划运动响应曲线
Fig. 7 v and θ response to programming signals

做如下规划: 前 10 秒车速保持在 1m/s, 同时以 0.05rad/s 的角速度转弯. 10 到 15 秒车作匀加速直线运动, 加速度为 0.1m/s^2 . 15 到 20 秒车速保持在 1.5m/s, 同时以 0.05rad/s 的角速度反向转弯. 20 到 30 秒匀减速直线运动, 加速度 -0.15m/s^2 . 系统响应见图 7. 仿真结果显示系统能迅速响应输入指令, 移动式倒立摆在二维平面内按指定的方向和速度运动, 同时保持摆杆平衡, 达到了控制目标.

4 结论

本文研究两轮移动式倒立摆运动中的平衡控制问题, 利用第一类 Lagrange 方法建立了系统的数学模型, 讨论了将极点配置在期望的区域内的状

态反馈控制方法,该方法能够保证移动式倒立摆在二维平面内以给定的移动速度和转动角速度运动,并且保持摆杆平衡.从仿真结果可以看出,该方法可以保证系统具有一定的动态和稳态性能,不仅满足闭环系统的内部动态特性要求,也兼顾了抑制外部扰动对系统的影响.由此可知,极点配置控制方法可以实现摆杆的倒立平衡控制.

参 考 文 献

- 1 郑大钟. 线性系统理论. 北京:清华大学出版社,1990 (Zheng Dazhong. Linear system theory . Beijing: Tsinghua University Press,1990(in Chinese))
- 2 K. Pathak, J . Franch, Sunil K. Agrawal. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on Robotics*, 2005,3:505 ~ 513
- 3 屠运武. 自平衡控制系统的建模与仿真. 系统仿真学报, 2004,4:839 ~ 841 (Tu Yunwu. Model and simulation of self - balance control system. *Journal Of System Simulation*,2004,4:839 ~ 841 (in Chinese))
- 4 杨兴明. 两轮移动式倒立摆的运动控制. 合肥工业大学学报,2005,11:1485 ~ 1488 (Yang Xingming. Motion control of a two - wheel mobile inverted pendulum. *Journal Of Hefei University Of Technology*, 2005,11:1485 ~ 1488 (in Chinese))
- 5 H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. Nonlinear dynamical control systems. Berlin, Germany:Springer - Verlag,1990
- 6 Richard C. Dorf, Robert H. Bishop. Modern control systems. Pearson Education,2002
- 7 魏克新,王云亮. MATLAB语言与自动控制系统设计. 北京:机械工业出版社,1997 (Wei Kexin, Wang Yunliang. MATLAB and control systems design. Beijing: China Machine Press, 1997(in Chinese))

DYNAMIC MOTION AND STATE FEEDBACK CONTROL OF A TWO-WHEELED COAXIAL MOBILE INVERTED PENDULUM *

Wang Kai Wang Shimin

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract A two-wheeled coaxial inverted pendulum system was derived using the wheel motor torques as inputs and taking the nonholonomic no-slip constraints into account by Lagrange method. The purpose was to make the mobile inverted pendulum move at the reference translational speed and rotational speed in the two-dimensional plane while keeping its link balanced. The state-space function of the closed-loop system was established through state feedback, and the input was deduced from the pole placement. The simulation result shows the validity of the system's state equation and the reasonableness of the control method.

Key words nonholonomic, mobile inverted pendulum, Lagrange method, state feedback, pole placement, emulation