

压电复合梁高阶有限元模型与主动振动控制研究

蒋建平 李东旭

(国防科技大学航天与材料工程学院,长沙 410073)

摘要 大型柔性空间结构的振动控制问题引起了广泛的关注. 压电材料以其低质量、宽频带和适应性强等特点,非常适合于柔性空间结构的振动控制. 本文针对上下表面粘贴有分布式压电传感器和作动器的智能层梁结构,提出了一种考虑压电材料对结构质量、刚度影响的高阶有限元模型. 考虑到空间结构可能承受较大的热载荷,在模型中计及了压电材料的热电耦合效应. 采用常增益负反馈控制方法、常增益速度负反馈控制方法、Lyapunov 反馈控制方法和线性二次型调节器方法(LQR)设计主动控制器,实现了智能层梁结构脉冲激励下的振动主动控制. 仿真结果表明,LQR 方法更能有效的实现结构振动控制,并且具有更低的作动器峰值电压,但不能消除热载荷引起的结构静变形.

关键词 主动振动控制, 柔性空间结构, 压电材料, 有限元, Lyapunov 反馈, LQR 方法

引言

大型柔性空间结构,如大型空间天线、太阳能帆板等,具有低频率、低阻尼、轻质量和大跨度的特点,任何外界干扰都可能引起这些结构持续大幅的振动,严重时将影响航天器工作甚至导致航天任务的失败. 因此,必须采取措施对其有害振动进行抑制^[1].

主动振动控制技术被认为是解决大型柔性结构振动控制问题的一种有效的方法^[2]. 压电材料具有正逆压电效应,既可作为传感器也可作为作动器,并且具有低质量、宽频带,高灵敏度和容易安装等特点,非常适合于大型柔性空间结构的振动控制. 近 20 年来,利用压电材料实现柔性结构的振动控制成为了结构振动控制领域内研究的热点问题^[3-9].

迄今为止,有限元方法在建立智能结构动力学模型时得到了广泛的应用^[6-9]. Tzou 和 Tseng^[6]提出了一种包含电势自由度的压电有限元模型,并采用该有限元模型分析了一个具有分布式压电传感器和作动器平板的动力学性能. G. Song 等^[7]建立了一表面粘贴有压电陶瓷片的悬臂复合材料梁的有限元模型,采用正位置反馈和应变速率负反馈的控制策略对该复合材料梁进行控制. Ha 等^[8]利用

8 节点三维体单元,研究了承受力学和电载荷的包含分布式压电陶瓷片的层状复合结构的动力学和静力学问题. S. Narayanan 等^[9]基于 Timoshenko 梁理论和一阶剪切变形理论,提出了包含压电材料质量和刚度影响的梁、板单元,并采用 LQR 等控制方法实现了结构的振动控制.

本文针对上下表面粘贴分布式压电传感器和作动器的层梁结构,采用高阶位移场假设,提出了一种包含压电材料质量和刚度影响的高阶有限元模型. 并在模型中考虑了压电材料的热电耦合效应. 对简单负反馈控制方法、常增益速度负反馈控制方法、Lyapunov 反馈控制方法和 LQR 方法在智能层梁结构振动控制中的应用进行了对比研究. 认为 LQR 方法更为有效,并且产生的作动器电压峰值较低,但也无法消除热载荷引起的结构静变形.

1 压电层梁结构有限元建模

上下表面粘贴分布式压电传感器和作动器的层梁结构如图 1 所示. 假设压电材料与基体结构之间为理想粘贴,忽略粘贴层对结构质量刚度的影响. 反馈控制系统根据传感器测得的电压信号,依据控制规律设定施加在作动器上的作动电压,驱动作动器产生有效的控制力和力矩,对主体结构变形或振动进行抑制. 图中为作用在结构上的干扰力.

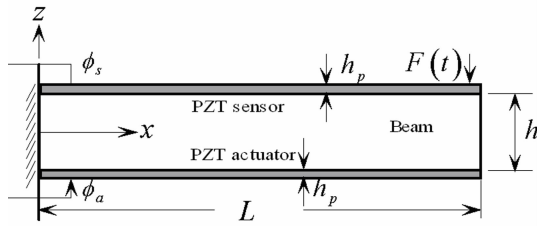


图1 压电层梁结构

Fig. 1 Piezoelectric layers beam structure

1.1 高阶位移场

假设梁上任意一点的位移场为

$$U(x, z, y, t) = u(x, t) + z(\phi_x(x, t) - \frac{dw(x)}{dx}) - z^3 \frac{4}{3h^2} \phi_x$$

$$W(x, z, y, t) = w(x, t) \tag{1}$$

其中, x 轴沿水平方向, z 轴为横向或垂直轴, y 轴为垂直纸面向内. 函数 $U(x, z, t)$ 和 $W(x, z, t)$ 分别代表任意点的水平轴向和横向位移, 只考虑 xz 平面内运动, 因此 y 向位移为零. 设层合梁的总厚度为 h , 上下表面的位置分别为 $z = h/2$ 和 $z = -h/2$. 函数 $u(x, t)$ 和 $w(x, t)$ 分别表示中面的水平位移和横向位移, 而 $\phi_x(x, t)$ 表示剪切旋转角. 将位移场写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z \frac{d}{dx} & z(1 - \frac{4}{3h^2} z^2) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi_x \end{bmatrix} \tag{2}$$

1.2 应变位移关系

假设结构变形为小变形, 根据应变的定义 ε_{ij}

$$= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ 得}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -z \frac{d^2}{dx^2} & z(1 - z^2 \frac{4}{3h^2}) \frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - z^2 \frac{4}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi_x \end{bmatrix} \tag{3}$$

1.3 压电本构方程

包含弹性场、电场和热场耦合关系的压电材料线性本构关系为^[9]

$$\{\sigma\} = [c] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} - \{\lambda\} \theta \tag{4}$$

$$\{D\} = [e] \{\varepsilon\} + [\chi] \{E\} + \{p\} \theta \tag{5}$$

式中, $\{D\}$ 为电位移矢量; $\{E\}$ 为电场矢量; $\{\sigma\}$ 为应力矢量; $\{\varepsilon\}$ 为应变矢量; $\{\lambda\}$ 为热应力系数; $\{p\}$ 为热电系数; θ 为总体温度变化; $[c]$ 为弹性矩阵; $[e]$ 为压电应力常数矩阵; $[\chi]$ 为介电常数矩阵;

1.4 有限元公式

采用 2 节点 8 自由度 Hermitian 梁单元, 梁单元节点位移与单元坐标如图 2 所示.

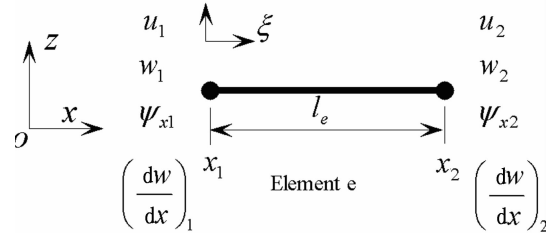


图2 梁单元及局部坐标系

Fig. 2 Beam element and local coordinates

设梁单元的节点位移为

$$\{u_e\} = \{u_1, w_1, \phi_{x1}, (\frac{dw}{dx})_1, u_2, w_2, \phi_{x2}, (\frac{dw}{dx})_2\}^T \tag{6}$$

利用型函数和单元节点位移可以得到单元上任意点的位移表达式为

$$\{u(x), w(x), \phi_x(x)\}^T = [N_u(\xi)] \{u_e\} \tag{7}$$

其中, $[N_u(\xi)]$ 为型函数矩阵. 将式代入到式和中, 得到位移、应变与节点位移的关系.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = [N] \{u_e\} \quad \{\varepsilon\} = [B] \{u_e\} \tag{8}$$

1.5 电势函数

在梁单元中引入作动器、传感器的电势自由度 $\{\varphi_a^e\}$ 、 $\{\varphi_s^e\}$, 假设作动器和传感器上电势沿长度方向均匀分布, 沿厚度方向线性变化. 单元电场强度与电势的关系为^[10]

$$\{E_a^e\} = -\{B_a^e\} \{\varphi_a^e\} = -\{0 \quad 1/h_a\}^T \{\varphi_a^e\} \tag{9}$$

$$\{E_s^e\} = -\{B_s^e\} \{\varphi_s^e\} = -\{0 \quad 1/h_s\}^T \{\varphi_s^e\} \tag{10}$$

式中, 下标 a, s 分别代表作动器层和传感器层; h_a, h_s 分别代表压电作动器和压电传感器的厚度; $\{B_a^e\}$ 、 $\{B_s^e\}$ 分别为作动器层和传感器层的电场梯度矩阵.

1.6 动力学方程推导

采用 Hamilton 原理来推导系统的动力学方程. 梁单元的动能 T^e 、势能 U^e 和外力功 W^e 分别为

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \tag{11}$$

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V_0} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \frac{1}{2} \int_{V_a} \{E_a\}^T \{D_a\} dV - \frac{1}{2} \int_{V_s} \{E_s\}^T \{D_s\} dV \tag{12}$$

$$W^e = \{u\}^T \{f_c\} - \int_S \{\varphi_a\}^T \{q_a\} dS \tag{13}$$

其中, ρ 为结构体积密度, $\{u\}$ 代表智能结构任意一点的位移矢量. $\{\varepsilon\}$ 、 $\{\sigma\}$ 分别为智能结构的应变和应力矢量; V_0 、 V_a 、 V_s 分别代表整体结构体积、作动层结构体积和传感层结构体积; $\{E_a\}$ 、 $\{D_a\}$ 与 $\{E_s\}$ 、 $\{D_s\}$ 分别为作动器和传感器的电场和电位移矢量. $\{f_c\}$ 为作用在结构上的集中力; $\{q_a\}$ 为作动层表面电荷密度, $\{\varphi_a\}$ 作动器电势; S 为表面电荷的作用面积.

根据 Hamilton 方程, 得到单元动力学方程为:

$$[M^e] \{\ddot{u}_e\} + [K_{uu}^e] \{u_e\} + [K_{ua}^e] \{\varphi_a^e\} + [K_{us}^e] \{\varphi_s^e\} - [K_{u\theta}^e] \theta = \{F_T^e\} \quad (14)$$

$$[K_{au}^e] \{u_e\} - [K_{aa}^e] \{\varphi_a^e\} + [K_{a\theta}^e] \theta = \{Q_a^e\} \quad (15)$$

$$[K_{su}^e] \{u_e\} - [K_{ss}^e] \{\varphi_s^e\} + [K_{s\theta}^e] \theta = 0 \quad (16)$$

各矩阵物理意义从略.

消除电势自由度, 得到单元动力学方程

$$[M^e] \{\ddot{u}_e\} + [K^e] \{u_e\} = \{F^e\} \quad (17)$$

由式得到传感器方程为

$$\{\varphi_s^e\} = [K_{ss}^e]^{-1} ([K_{su}^e] \{u_e\} + [K_{s\theta}^e] \theta) \quad (18)$$

将各单元方程按标准有限元组装程序进行组集, 并引入瑞丽结构阻尼, 得到系统的动力学方程为

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F\} \quad (19)$$

其中, $[M]$ 、 $[K]$ 分别为系统质量矩阵和刚度矩阵; 阻尼矩阵 $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$, $\{F\}$ 为总体载荷列阵.

2 主动控制算法

2.1 常增益负反馈控制

该方法直接利用传感器电压信号 $\{\varphi_s\}$ 进行比例负反馈控制, 即作动器电压 $\{\varphi_a\}$ 为

$$\{\varphi_a\}(t) = -G \{\varphi_s\}(t) \quad (20)$$

其中, G 为反馈增益.

2.2 常增益速度负反馈控制

将传感器信号进行微分, 得到传感器应变速率信号, 作动器电压根据以下规律给定:

$$\{\varphi_a\}(t) = -G_c \{\dot{\varphi}_s\}(t) \quad (21)$$

2.3 Lyapunov 反馈控制

在 Lyapunov 反馈控制中, 反馈电压增益也是常数, 但是其正负号与速度相反. 于是反馈电压信号可表达为

$$\{\varphi_a\}(t) = -G_{max} \operatorname{sgn}[\{\dot{\varphi}_s\}(t)] \quad (22)$$

其中, $\operatorname{sgn}[\]$ 表示符号函数, G_{max} 表示控制电压增益. 这种控制方法也叫 Bang - Bang 控制.

2.4 LQR 控制方法

系统运动方程的状态空间模型为:

$$\{\dot{\xi}\} = [A] \{\xi\} + [B] \{\varphi_a\} + [\hat{B}] + [B^h] \quad (23)$$

$$\{\varphi_s\} = [C_0] \{\xi\} + [D] \quad (24)$$

根据 LQR 最优控制理论, 反馈控制增益通过使目标函数或性能指标达到最小来确定. 目标函数取为

$$J = \int_0^{\infty} (\{\varphi_s\}^T [Q] \{\varphi_s\} + \{\varphi_a\}^T [R] \{\varphi_a\}) dt \quad (25)$$

其中 $[Q]$ 和 $[R]$ 分别为输出和控制输入的半正定和正定权矩阵. 采用全状态反馈, 控制规则由下式确定

$$\{\varphi_a\} = -[G_c] \{\xi\} = -[R]^{-1} [B]^T [\hat{P}] \{\xi\} \quad (26)$$

正定矩阵 $[\hat{P}]$ 通过求解 Riccati 方程得到:

3 算例分析

以上下表面具有分布式 PZT 传感器和作动器的悬臂刚梁为例研究智能层梁结构的振动主动控制. 系统结构如图 3 所示, PZT 与刚梁的相关参数如表 1.

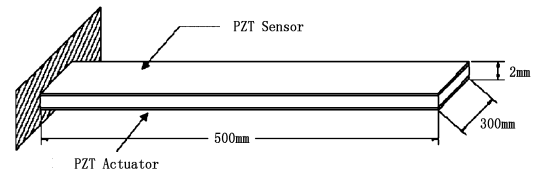


图3 具有分布式 PZT 传感器和作动器的悬臂刚梁

Fig.3 The cantilever steel beam with distributed PZT sensor and actuator

表1 结构参数

Table 1 structural parameters

Property name	PZT	steel
Elastic modulus E_{11} (10^{10} N/m ²)	13.9	21
Shear modulus G_{13} (10^{10} N/m ²)	5.34	8.07
Density (kg/m ³)	7500	7800
Piezoelectric constant d_{31} (m/V)	25.4×10^{-11}	-
Possion's ratio	0.3	0.3
Thermal expansion coefficient α	1.2×10^{-4}	23.8×10^{-6}
Electric permittivity ϵ_{33} (F/m)	1.65×10^{-8}	-
Pyroelectric constant p_3 C/m ² °C	0.25×10^{-4}	-

假设梁末端受到大小为 0.2N, 作用时间为 1 毫秒的脉冲激励, 在受到激励作用 0.5 秒后开启控制器. 仿真结果如图 4 - 7 所示.

从图中可以看出, 常增益负反馈控制的衰减时

间较长,所需控制电压较高(图4);常增益速度负反馈控制的衰减速度快于常增益负反馈控制,但仍具有较高的作动器峰值电压(图5);在适当控制增益和作动电压下,Lyapunov控制的效果比前两者要好,但存在小幅残余振动,且当反馈增益过大时,还可能导致系统不稳定(图6)。而LQR方法的控制结果较为理想,不但能够快速抑制振动,而且所需的作动器控制电压峰值较小(图7)。

在轨大型柔性空间结构还可能受到热载荷的影响,引起结构变形或振动。假设一温度梯度作用在压电层梁结构上,使得梁结构下表面温度高于上表面,且设梁主体结构温度迅速达到稳定状态。由式可知,温度的变化将引起压电传感器输出电压的变化,即热电效应(The Pyroelectric effect)。而且,热梯度的存在还将引起结构变形,即热应变效应;该热诱导变形也将引起传感器输出电压的变化。如图8所示,热电效应引起的传感器电压信号比热应变效应引起的传感器电压信号强。图9描述了压电层梁在50摄氏度热梯度作用下,末端受到脉冲激

励后的振动控制结果。从图中可以得知,由于热梯度的存在,压电层梁结构将产生热诱导静变形,且该变形不能被LQR或者常增益速度负反馈控制方法消除。

4 结论

本文基于高阶位移场理论,推导了具有分布式压电传感器和作动器的智能梁结构高阶有限元模型,并在模型中考虑了热电耦和效应。采用经典的控制方法,如简单负反馈、常增益速度负反馈、Lyapunov反馈,以及现代控制方法—线性二次型调节器方法(LQR)设计了主动控制器,比较了各种控制方法的控制效果。

研究表明,LQR控制方法更能有效的实现结构振动抑制,且具有较低的作动器峰值电压。

热载荷将影响压电传感器的输出电压,且热电效应引起的输出电压大于热应变效应引起的输出电压。压电梁结构上下表面的温度梯度将引起结构的静变形,且该静变形不能被LQR等控制方法消除。

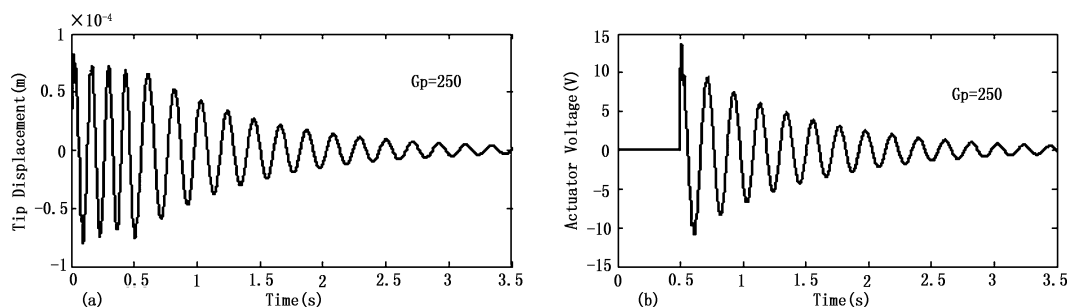


图4 (a)常增益($G_p=250$)负反馈控制作用下悬臂压电层梁末端位移响应;(b)作动器电压

Fig. 4 (a)Tip displacement of cantilever beam controlled with constant-gain negative feedback($G_p=250$); (b)The actuator voltage

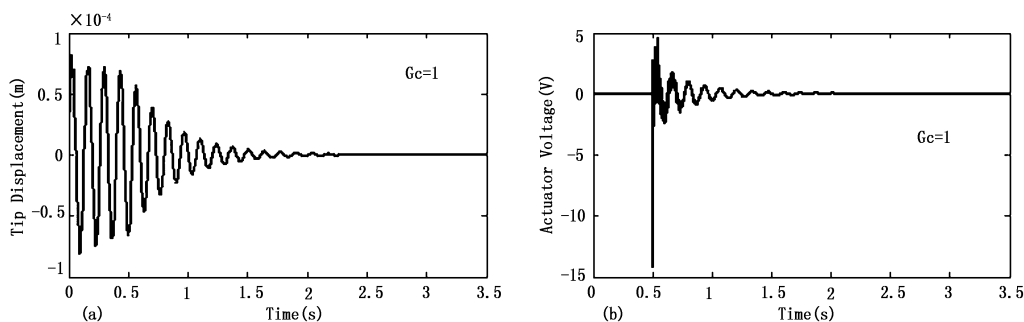


图5 (a)常增益速度负反馈控制作用下悬臂压电层梁末端位移响应;(b)作动器电压。($G_c=1$)

Fig. 5 (a)Tip displacement of cantilever beam controlled with constant-gain negative velocity feedback; (b)The actuator voltage. ($G_c=1$)

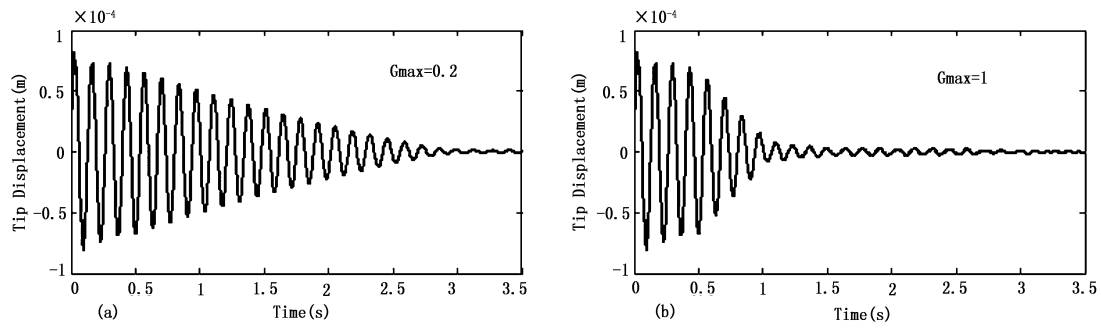


图 6 Lyapunov 反馈控制作用下悬壁压电层梁末端位移响应((a): $G_{max}=0.2$; (b): $G_{max}=1$)

Fig.6 Tip displacement of cantilever beam controlled with Lyapunov feedback(a: $G_{max}=0.2$; b: $G_{max}=1$)

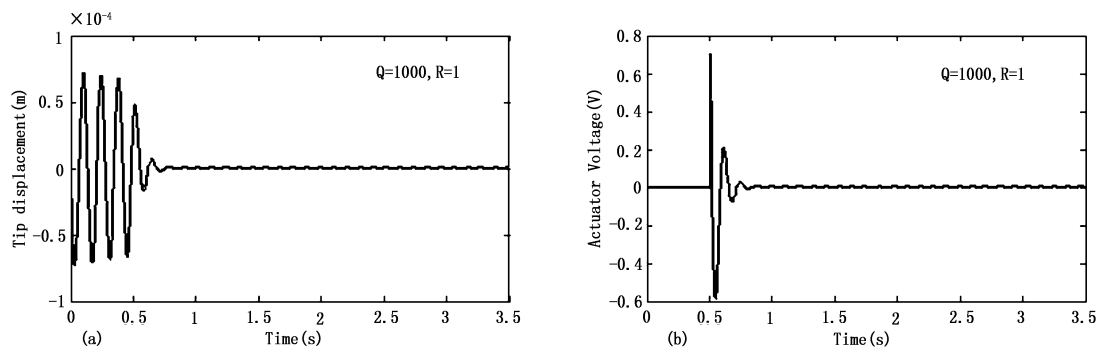


图 7 (a)LQR 控制作用下悬壁压电层梁末端位移响应; (b) 作动器电压

Fig.7 (a) Tip displacement of cantilever beam controlled with LQR method; (b) The actuator voltage

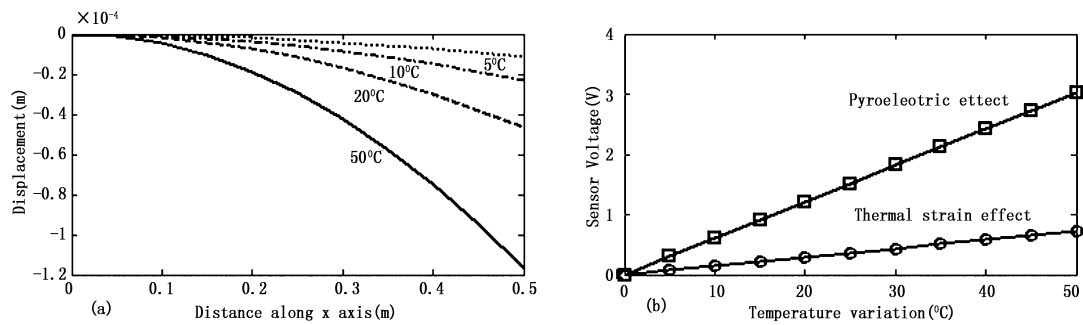


图 8 (a) 温度梯度引起的结构静变形; (b) 热梯度作用下的传感器电压

Fig.8 (a) Static deflection due to thermal gradients; (b) Sensor voltage generated due to thermal gradients

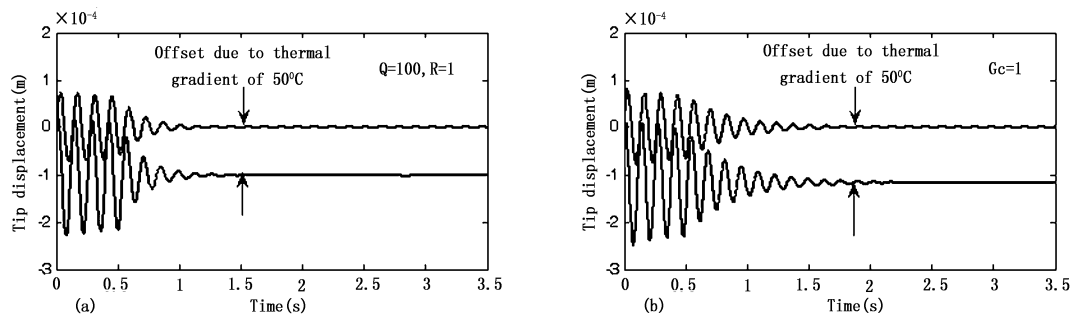


图 9 存在热梯度时的控制效果: (a)LQR 方法; (b) 常增益速度负反馈控制方法($G_c=1$)

Fig.9 Controlled dynamic response with a thermal gradient of 50°C : (a) LQR ($Q=100, R=1$); (b) constant-gain negative velocity feedback($G_c=1$)

参 考 文 献

- 1 黄文虎,王心清,张景绘等. 航天柔性结构振动控制的若干新进展. 力学进展, 1997,27(1):5~18(Huang Wenhui, Wang Xingqing, Zhang Jinghui etc. Some advances in vibration control of aerospace flexible structures. *Advances in Mechanics*, 1997, 27(1):5~18)
- 2 S. Narayanan and L. Somasundaram. Active vibration control of beams and plates with piezoelectric materials. Proceedings of SPIE, 1998, 3321:185~201
- 3 Crawley E. and Luis J. Use of piezoceramic actuators as elements of intelligent structures. *AIAA Journal*, 1987, 25(10):1373~1385
- 4 Park C. Walz C. and Chopra I. Bending and torsion models of beams with induced-strain actuators. *Smart material and structures*, 1996, 5(1):98~113
- 5 Sungsoo Na and Liviu Librescu. Modified Bang-Bang vibration control strategy applied to adaptive nonuniform cantilevered beams. AIAA, Seattle, 2001:1437
- 6 Tzou HS, Tseng CI. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 138(1):17~34
- 7 G. Song P. Z. Qiao and W. K. Binienda. Active vibration damping of a composite beam using smart sensors and actuators. AIAA, Seattle, 2001:1637
- 8 Ha SK, Keilers C, Chang F. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. *AIAA Journal*, 1992, 30(3):772~780
- 9 S. Narayanan, V. Balamurugan. Finite element modelling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 262:529~562

RESEARCH ON HIGH ORDER FINITE ELEMENT MODEL AND ACTIVE VIBRATION CONTROL FOR PIEZOELECTRIC COMPOSITE BEAMS

Jiang Jianping Li Dongxu

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract A high order finite element model of smart beam with distributed piezoelectric sensor and actuator layers was presented. The beam elements were developed incorporating the stiffness, mass and electromechanical coupling effects of the piezoelectric laminates. Considering the temperature difference in the large flexible space structures, the coupling effects between the temperature and mechanical of piezoelectric material were also taken into account. The simple negative feedback, constant-gain negative velocity feedback, Lyapunov feedback as well as a linear quadratic regulator (LQR) approach were used for active vibration control with the structures subjected to impact excitations. The LQR approach was found to be more effective in vibration control with lesser peak voltages applied in the piezo actuator layers, but the thermal induced offset could not be controlled using the LQR scheme.

Key words active vibration control, flexible space structures, piezoelectric structures, finite element, Lyapunov feedback, LQR method