

一种带绝对值项系统的分岔、激变与混沌

管迪 陈乐生

(福州大学机械工程及自动化学院,福州 350002)

摘要 研究了一种含有绝对值项的三维微分动力系统,用李雅普诺夫方法得到了系统发生第一次 Hopf 分岔的条件. 利用相轨迹图、分岔图、最大李雅普诺夫指数谱等非线性动力学分析方法,分析了该系统从规则运动转化到混沌运动的规律. 该系统是按照 Feigenbaum 途径(倍周期分岔)通向混沌的,在混沌区域存在周期窗口. 当参数达到激变临界点时,混沌吸引子和不稳周期轨道在吸引子边界上碰撞,发生边界激变,激变临界值的领域内还存在相对长时间的瞬态混沌过程.

关键词 带绝对值项系统, 分岔, 激变, 混沌, 倍周期分岔

引言

微分动力系统受到其状态变量应是连续变化的要求,其运动受到严格的限制^[1],对于自治系统,三维或三维以上系统才可能表现出混沌,如: Lorenz^[2] 方程, Rossler^[3] 方程,这些例子中都至少含有一个二次非线性项. J. C. Sprott 对 19 种含二次非线性项的系统做了研究^[4],发现了丰富的混沌现象. 证明数学形式上比 Lorenz 和 Rossler 系统更简单的系统也可以产生混沌.

带绝对值项的非线性系统广泛存在,也可以产生混沌现象,如用来描述滞回系统特性的 Bouc - Wen^[5] 模型,具有此模型的振动微分方程可以产生混沌^[6]. 本文将 J. C. Sprott 的 L 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 3.9z \\ \dot{y} = 0.9x^2 - y \\ \dot{z} = 1 - x \end{cases}$$

中的平方项改为绝对值项,构成一个含绝对值项的形式上很简单的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1y + a_2z \\ \dot{y} = a_3|x| + a_4 \\ \dot{z} = 1 + a_5x \end{cases} \quad (1)$$

分析了该系统的动力学特性,验证了它的分岔和混沌特征.

1 第一次 Hopf 分岔

系统(1)中 $a_1 \sim a_5$ 是可以变化的参数,为方便

讨论,设其中 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_4 = -1, a_5 = -1$, 而只改变绝对值项的系数. 分析系统的分岔和混沌可以从奇点的稳定性分析开始. 根据李雅普诺夫间接法^[1],可以在奇点的领域把非线性方程线性化,通过计算雅可比矩阵的特征根来判断奇点的稳定性. 由(1)式可以求得奇点为: $(1 \ a_3 \ -a_3)$, 方程在奇点处的线性化方程的系数矩阵是:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a_3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由罗斯 - 霍维兹判据可得奇点稳定的充要条件是 $a_3 < 0$. 当 $a_3 > 0$ 时,稳定奇点转化为不稳定出现极限环发生 Hopf 分岔.

2 数值仿真分析

系统(1)的动力学特性由参数 a_3 决定,选定初始条件是 $[0 \ 0 \ 0]$,用 Runge - Kutta 法进行数值积分,分别利用相图、分岔图和最大 Lyapunov 指数谱的方法对系统随参数的演化过程进行分析.

2.1 通向混沌的途径

将积分时间设为 2000s,舍去前 5000 次的迭代结果,这样既可以忽略掉暂态过程保证轨道收缩到吸引子上,也不至于计算时间过长,得到系统(1)的相轨迹,有代表性的选择如图 1.

当 $a_3 < 0$ 时,系统收敛于不动点;当 $0 < a_3 \leq 2.1775$ 时,相轨迹为一个极限环(图 1a);增加,当 2.

1775 < $a_3 \leq 2.3732$ 时,相轨迹变成周期 2 极限环(图 1b);继续增加 a_3 ,当 $2.3732 < a_3 \leq 2.4145$ 时,周期点失稳,新的稳定状态是周期 4 的极限环(图 1c);随着 a_3 的继续增加,出现周期 8 的极限环,随着参数的不断增大,极限环破裂演化成为混沌吸引子(图 1d).

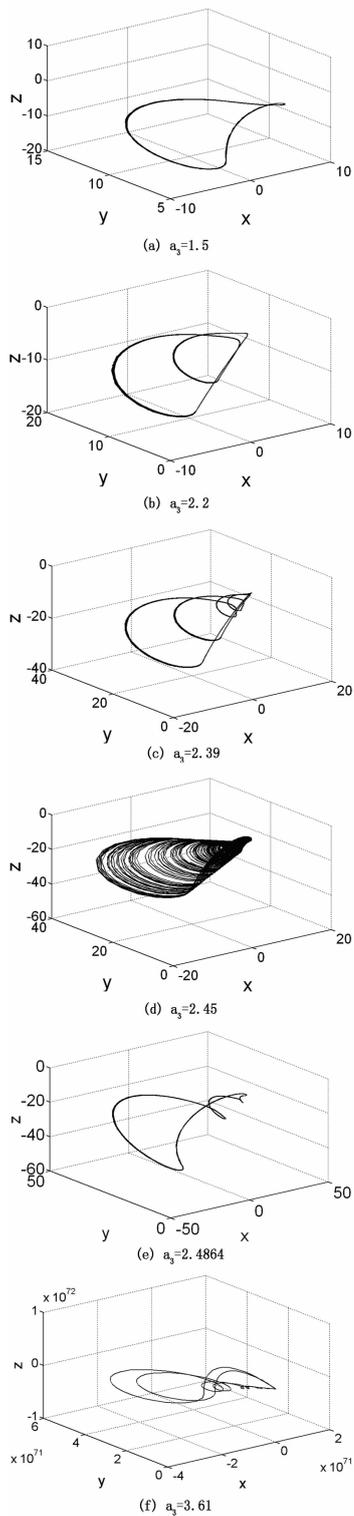


图 1 系统的相图

Fig. 1 Phase portraits of system

当 $2.4863 < a_3 \leq 2.5618$ 时,相轨迹又再次出现极限环,不过是周期三的极限环(图 1e);增大 a_3 相轨迹发生分离,出现 3×2 、 $3 \times 2 \times 2$ 周期的极限环,随着轨道进一步分离,又进入混沌状态,相轨迹变成混沌吸引子;当 a_3 超过 2.6711 时,混沌消失,又出现周期三极限环. 随着参数的增大,相轨迹的体积也逐渐变大. 大于 3 后再增大 a_3 ,相轨迹膨胀的非常厉害,经过计算当 $a_3 = 3.61$ 时相轨迹的体积已经达到 10^{71} 级(图 1f),继续增大 a_3 计算机显示溢出. J. C. Sprott 的 L 系统也具有类似的现象,当平方项前的系数达到 0.9101 后,继续增大计算机显示溢出,相轨迹也将消失.

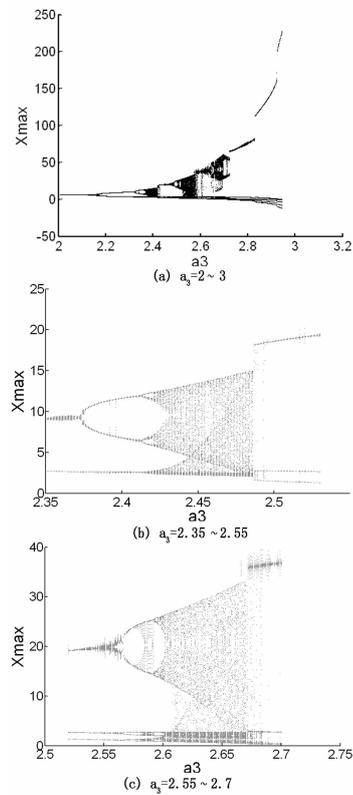


图 2 系统的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram of system

Eckmann 曾对各种可能的分岔现象进行了研究,归纳出走向混沌的三种途径^[7]: ① Feigenbaum 途径(通过倍周期分岔); ② Ruelle - Takens - Newhouse 途径(通过 Hopf 分岔); ③ Pomeau - Manneville 途径(通过阵发混沌). 从上述的分析可以看出,系统(1)分别出现稳定不动点、周期 2、周期 4、周期 8 等运动和混沌吸引子,说明系统是按照倍周期分岔途径进入混沌的. 做 $a_3 \in (1.8, 3)$ 时 x 的极大值的分岔图,如图 2a,从图中可以看出,在混沌

区域内还存在着明显的周期窗口,这种典型的结构与 Logistic 映射以及 L 系统具有相同的规律.

2.2 激变现象和瞬态混沌

当非线性系统的控制参数连续变化时,混沌吸引子的尺寸和形状发生突变,这种现象称为激变 (crisis),这是由 Grebogi 等人首先解释并命名的^[8].激变按它所引起的混沌吸引子不连续变化的性质可分为边界激变 (boundary crisis)、内部激变 (interior crisis) 和吸引子合并激变. ①边界激变,不稳定的周期轨道与混沌吸引子在吸引子的边界处相遇,引起吸引子消失;②内部激变,不稳定的周期轨道与混沌吸引子在吸引子内部相遇,引起吸引子的尺寸突然膨胀. ③吸引子合并激变,多个混沌吸引子同时在边界上与不稳定的周期轨道碰撞,引起多个吸引子合并成为一个混沌吸引子.

从系统的局部分岔图中可以看出,在 $a_3 = 2.4863$ (图 2b) 和 $a_3 = 2.6711$ (图 2c) 混沌吸引子突然消失,即发生了边界激变,正是由于边界激变的存在,使得周期运动与混沌交替出现.

a_3 到达激变临界值 μ_c 时,混沌吸引子与不稳定的周期轨道的边界相遇,混沌吸引子不再存在. 而当 a_3 略大于 μ_c 时,则原来 ($a_3 < \mu_c$) 存在的混沌吸引子的吸引域中的相轨迹,在一段相对长的时间内将做不规则的运动,类似于 $a_3 < \mu_c$ 时的混沌运动,然后逐渐趋向于另外的吸引子,这种变化称为瞬态混沌. 如 $a_3 = 2.4864$ 时,取积分时间为 2000s,不忽略暂态过程得到的相图 (图 3),与图 1e 忽略暂态过程的相图比较,发现在一段时间内相轨迹都类似于混沌吸引子,经过很长的暂态过程以后才收敛于极限环. 瞬态混沌的平均持续时间 $\langle \tau \rangle$ 正比于 $(a_3 - \mu_c)^{-\gamma}$, γ 是激变临界指数,与混沌吸引子的类型有关^[9].

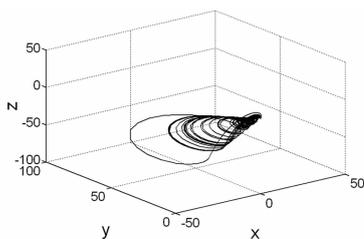


图3 $a_3 = 2.4864$ 系统相图

Fig. 3 Phase portraits of system with $a_3 = 2.4864$

2.3 Lyapunov 指数谱

基于动力系统最大李雅普诺夫指数的计算方

法^[10],选方程迭代 1000s 后的值作为初始值,这样可以保证轨迹已经收缩到吸引子上,两轨道之间的初始距离 d_0 取 10^{-8} ,测量轨道距离的时间间隔 τ 取 0.1s,取迭代 5000 次的平均结果,可以算出最大李雅普诺夫指数 λ_1 .

李雅普诺夫指数之和决定了 n 维相体积沿轨道的平均收缩速率,可以由公式 (2) 式求得^[4].

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{Tr} \text{Jacobian} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2)$$

求得系统 (1) 的 $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -1$, 所以是耗散系统,相体积总要收缩到一个吸引子上. 所有不终止于定点而又有界的轨道 (或吸引子) 都至少有一个李雅普诺夫指数等于零^[11], 据此就可以求得系统的三个李雅普诺夫指数. 如 $a_3 = 2.5$ 时系统是混沌的, 李雅普诺夫指数 $\lambda_{1,2,3} = (0.0165, -1.0165)$.

系统 (1) 随着参数 a_3 变化的最大李雅普诺夫指数谱,如图 4. 随着参数的变化,最大李雅普诺夫指数出现在 0 上下的来回振荡.

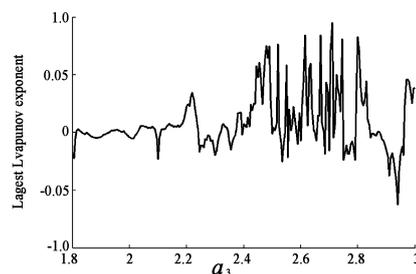


图4 系统的最大 Lyapunov 指数谱

Fig. 4 Largest Lyapunov exponent spectrum of the system

3 结论

系统 (1) 是一种带绝对值项的三维微分动力系统,形式上比 Lorenz 和 Rossler 系统更简单,却具有复杂的动力学特性,对非线性动力学的研究有一定理论意义.

①该系统从稳定定点经过 Hopf 分岔产生极限环,通过倍周期分岔途径进入混沌状态,并且在混沌区域内存在着周期窗口;②当参数达到激变临界值时,会发生边界激变,使得混沌吸引子消失;③参数略大于激变临界值时,发现运动具有较长时间的类似于混沌的暂态过程,是一种瞬态混沌状态. ④计算系统的最大李雅普诺夫指数谱,出现零上下振荡,也验证了周期运动与混沌的交替.

参 考 文 献

- 1 刘秉正,彭建华. 非线性动力学. 北京:高等教育出版社, 2004 (Liu Bingzheng, Peng Jianhua. Nonlinear dynamics. Beijing: Higher Education press, 2004 (in Chinese))
- 2 Sparrow C. The lorenz equations; bifurcation, chaos, and strange attractor. New York: Springer, 1982
- 3 Rossler O E. An equation for continuous chaos. *Phys Lett A*, 1976, 57: 397 ~ 398
- 4 J C Sprott. Some simple chaotic flows. *Physical Review E*, 1994, 50(2): 647 ~ 650
- 5 Wen Y K. Method for random vibration of hysteretic systems. *Proceedings of ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, 1976, 12: 249 ~ 263
- 6 李鸿光,何旭,孟光. Bouc - Wen 滞回系统动力学特性的仿真研究. 系统仿真学报, 2004, 16(9): 2009 ~ 2011. (Li Hongguang, He Xu, Meng Guang. Numerical simulation for dynamic characteristics of bouc - wen hysteretic system. *Journal of System Simulation*, 2004, 16(9): 2009 ~ 2011 (in Chinese))
- 7 Eckmann J P. Roads to turbulence in dissipative dynamics system. *Rev Mod Phys*, 1981, 53: 643 ~ 649
- 8 Grebogi C, Ott E, Yorke J A. Crisis sudden changes in chaotic at tractors, and transient chaos. *Physica*, 1983, 7D: 181 ~ 188
- 9 刘延柱,陈立群. 非线性振动. 北京:高等教育出版社, 2001. (Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear vibration. Beijing: Higher Education press, 2001 (in Chinese))
- 10 Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. *Meccanica*, 1980, 15: 9 ~ 20
- 11 Rasband S N. Chaotic dynamics of nonlinear system. New York: John Wiley & Sons, 1990

BIFURCATION, CRISIS AND CHAOS OF AN ABSOLUTE VALUE NONLINEAR SYETEM

Guan Di Chen Lesheng

(The college of Mechanical Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 35002, China)

Abstract This paper investigated a simple three dimensional nonlinear differentiable dynamical system with an absolute value term, whose boundary condition of the first Hopf bifurcation was derived by the Lyapunov method. Nonlinear dynamics techniques, such as phase portrait, bifurcation diagram and largest Lyapunov exponent spectrum, were employed to analyze the bifurcation and chaos features of the system. The chaotic patterns of the system were found to be resulted from Feigenbaum route, and the period windows existed inside the chaos region. When the controlling parameter passes the crisis critical value, the unstable periodic trajectory encounters with the chaotic attractor on the attractor's boundary, which results in boundary crisis. Transient chaos also occurs during a relative long time, when the parameter, during a little range, is bigger than the crisis critical value.

Key words nonlinear system with absolute value, bifurcation, crisis, chaos, Feigenbaum route